

複素領域における非線型偏微分方程式の 正則解の存在について

上智大・理工 田原 秀敏 (Hidetoshi TAHARA)
(Department of Mathematics, Sophia University, Tokyo)

本稿では、複素領域における非線型偏微分方程式

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}\right)$$

の正則解の存在について論じる。「今迄に得られている結果」の解説のみでなく、「どのようなケースが研究されずに残っているか」の部分もあわせて説明しておきたい。記述を簡単にするために、本稿では $(t, x) \in \mathbb{C}^2$ の場合のみ論じる。

1. 方程式の定式化

$$m \in \mathbb{N}^*(= \{1, 2, \dots\}), (t, x) \in \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x, N = m(m+3)/2,$$

$$Z = \{Z_{j,\alpha}\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}} \in \mathbb{C}^N$$

(ただし $(j, \alpha) \in \mathbb{N}^2(= \{0, 1, 2, \dots\}^2)$) とし, $F(t, x, Z)$ を複素変数 $(t, x, Z) \in \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_Z^N$ についての関数で次の条件をみたすものとする。

A₁) $F(t, x, Z)$ は原点 $(0, 0, 0)$ の近傍で正則;

A₂) $x = 0$ の近傍で $F(0, x, 0) \equiv 0$.

このとき, $u(= u(t, x))$ を未知関数とする次の形の非線型偏微分方程式

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}\right)$$

を考える。次の2つの問題が基本的であろう。

問題1 方程式 (E) の解の存在 (特に正則解の存在) を論じよ。

問題2 方程式 (E) の解の一意性を論じよ。

2. 研究の現状

ここでは現時点 (1999年12月) での研究の状況を先に概観しておく.

2.1. 方程式の展開

$F(t, x, Z)$ が条件 $A_1), A_2)$ をみたすと仮定する. このとき, $F(t, x, Z)$ を (t, Z) について Taylor 展開すると

$$(2.1) \quad F(t, x, Z) = a(x)t + \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} b_{j,\alpha}(x) Z_{j,\alpha} + \sum_{p+|\nu| \geq 2} g_{p,\nu}(x) t^p Z^\nu$$

と表される. ここでは

$$\nu = \{\nu_{j,\alpha}\}_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} \in N^N, \quad |\nu| = \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} \nu_{j,\alpha}, \quad Z^\nu = \prod_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} (Z_{j,\alpha})^{\nu_{j,\alpha}}$$

とした. また, 係数 $a(x), b_{j,\alpha}(x), g_{p,\nu}(x)$ はすべて原点 $x = 0 \in C$ の近傍 D での正則関数で, D は j, α, p, ν には無関係にとれる.

簡単のため

$$(2.2) \quad C\left(x, t \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} b_{j,\alpha}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha,$$

$$Du = \{D_{j,\alpha}u\}_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}}, \quad D_{j,\alpha}u = \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u,$$

$$R_2(t, x, Du) = \sum_{p+|\nu| \geq 2} g_{p,\nu}(x) t^p (Du)^\nu$$

とおく. このとき, 方程式 (E) は次の様に書ける.

$$(E) \quad C\left(x, t \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(x)t + R_2(t, x, Du)$$

2.2. 方程式の場合分け

$$I = \{(j, \alpha) \in N^2; j + \alpha \leq m, j < m\},$$

$$I_+ = \{(j, \alpha) \in I; \alpha > 0\}.$$

とおく. (2.1) (または (2.2)) の係数 $b_{j,\alpha}(x)$ をもとにして 方程式 (E) を大雑把に分類すると, 次の3つの場合に分けられる.

Case(1) すべての $(j, \alpha) \in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(x) \equiv 0$;

Case(2) ある $(j, \alpha) \in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(0) \neq 0$;

Case(3) すべての $(j, \alpha) \in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(0) = 0$ だが, ある $(j, \alpha) \in I_+$ に対しては $b_{j,\alpha}(x) \neq 0$.

2.3. 研究の現状

Case(1) の場合は, 方程式の線型部分 $C(x, t\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ は $C(x, t\partial/\partial t)$ という常微分作用素に他ならない. この場合は, 正則解については Gérard-Tahara [4], [6] で, 解の一意性については Tahara [7], [8] で詳しく調べられた.

Case(2) の場合は, 正則解については Gérard-Tahara [5] で調べられたが, 解の一意性については面白い結果は知られていない. Gérard-Tahara [5] で扱われたのは, Case(2) の内の $l + \mu = m$ (意味は第 4 節に述べてある) のケースで, $l + \mu < m$ のケースは未開拓に等しい.

Case(3) の場合は, 正則解については Chen-Tahara [1], [2] で一部論じられた. 解の一意性については 未開拓. Chen-Tahara [1], [2] で扱われたのは, Case(3) の内で 確定特異点もどきの場合のみで, それ以外のケースは未開拓である. Chen 氏によると, 中国の Wuhan (武漢) の学生がこの辺を何やら調べているそうである.

分かり易く表で表すと次のとおりである.

ケース	解の存在について (正則解など)	解の一意性について
Case(1)	Gérard-Tahara [4], [6]	Tahara [7], [8]
Case(2)	$l + \mu = m$ のとき Gérard-Tahara [5] $l + \mu < m$ のとき ???	???
Case(3)	確定特異点もどきの場合 Chen-Tahara [1], [2] それ以外のとき ???	???

注1) Chen-Tahara [1],[2] では, Case(1) を「nonlinear Fuchsian type」, Case(2) と Case(3) を「nonlinear totally characteristic type」と呼んでいるが, この命名が妥当かどうかは不明.

注2) Case(3) の確定特異点もどきの場合というのは, (2.2) の方程式の線型部分 $C(x, t\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ が $L(x, t\partial/\partial t, x\partial/\partial x)$ という形に書ける場合をいう.

注3) ??? は未開拓の意味. 未開拓とは「良い理論があるのか, どうしようもない場合なのか, それも不明」という意味である. ただし筆者は「未開拓の中に, 良い理論の成り立つケースが多くある」と信じている.

3. Case (1) について

Case (1) の場合について、結果をまとめておく。Case (1) ならば、すべての $(j, \alpha) \in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(x) \equiv 0$ が成り立っている。従って、方程式 (E) は次の様に書けている。

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u - \sum_{j < m} b_{j,0}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j u = a(x)t + R_2(t, x, Du).$$

3.1. 正則解について

正則解の存在については次の結果が基本的である。

$$C(x, \lambda) = \lambda^m - \sum_{j < m} b_{j,0}(x) \lambda^j$$

とおく。 $C(x, \lambda) = 0$ の根を $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ とおき、これを (E) の特性指数と呼ぶ。

定理 1 (Gérard-Tahara [4]) A_1, A_2 および Case(1) の条件を仮定する。もしも $j = 1, \dots, m$ に対して $\lambda_j(0) \notin \{1, 2, \dots\}$ が成り立つならば、方程式 (E) は原点 $(0, 0) \in C^2$ の近傍での正則解 $u(t, x)$ で $u(0, x) \equiv 0$ となるものをただ一つ持っている。

3.2. 解の一意性について

解の一意性については、最も基本的と思われる結果をひとつ掲げておく。

定義 1 次の 1), 2) をみたす関数 $u(t, x)$ の全体を $S_{\log}(+)$ で表す。

- 1) ある $\varepsilon > 0, \theta > 0, \delta > 0$ があって、 $u(t, x)$ は領域 $\{(t, x) \in \mathcal{R}(C_t \setminus \{0\}) \times C_x; 0 < |t| < \varepsilon, |\arg t| < \theta, |x| \leq \delta\}$ での正則関数であって、
- 2) ある正数 $a > 0$ があって、 $|\arg t| < \theta$ のもとで $t \rightarrow 0$ のとき

$$\max_{|x| \leq \delta} |u(t, x)| = O\left(\frac{1}{|\log t|^a}\right)$$

が成り立つ。

ここで、 $\mathcal{R}(C_t \setminus \{0\})$ は $C_t \setminus \{0\}$ の普遍被覆面を表す。

定理 2 (Tahara [7]) A_1, A_2 および Case(1) の条件を仮定する。もしも $j = 1, \dots, m$ に対して $\operatorname{Re} \lambda_j(0) < 0$ が成り立つならば、方程式 (E) に対し $S_{\log}(+)$ の中で解の一意性が成り立つ。

注) $t(\partial u / \partial t) = u(\partial u / \partial x)$ は、 $\lambda \equiv 0$ であり、 $u \equiv 0$ 以外に $u(t, x) = (x + a)/(c - \log t)$ (ただし $a, c \in \mathbb{C}$ は任意定数) という形の解をもっている。この例では、 $\operatorname{Re} \lambda = 0$ であり、「 $S_{\log}(+)$ の中での解の一意性は成り立たない」。

4. Case (2) について

Case (2) の場合について, 結果をまとめておく. もともとの方程式は

$$\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} b_{j,\alpha}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u = a(x)t + R_2(t, x, Du)$$

であった. これに対して $\mathcal{J}$ を次のようにおく.

$$\mathcal{J} = \{(j, \alpha); \alpha > 0 \text{ で } b_{j,\alpha}(x) \neq 0\}$$

4.1. 結果 (正則解の存在定理)

$\mathcal{J} \neq \emptyset$ とする. μ と l を

$$\begin{aligned} \mu &= \max\{\alpha; (j, \alpha) \in \mathcal{J}\} (\geq 1), \\ l &= \max\{j; (j, \mu) \in \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

とおく. そして,

$$(4.1) \quad \sum_{j \leq l} b_{j,\mu}(0) \lambda^j = 0$$

という方程式を考える. もしも $b_{l,\mu}(0) \neq 0$ ならば, この方程式は l 次の多項式であり, その根として, l 個の複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ が決まる. 次の結果が成り立つ.

定理 3 (Gérard-Tahara [5]) $A_1), A_2)$ および

- 1) $\mathcal{J} \neq \emptyset$,
- 2) $l + \mu = m$ (よって $l = m - \mu$),
- 3) $b_{l,\mu}(0) \neq 0$ (つまり $b_{m-\mu,\mu}(0) \neq 0$),
- 4) (4.1) の根について $\lambda_1, \dots, \lambda_l \notin \{1, 2, \dots\}$

を仮定する. このとき, $\phi_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, \mu - 1$) をみたす任意の正則関数 $\phi_0(t), \dots, \phi_{\mu-1}(t)$ に対して, 方程式 (E) は原点 $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ の近傍での正則解 $u(t, x)$ で 次の i), ii) をみたすものをただ一つ持っている.

$$\begin{aligned} i) \quad & u(0, x) \equiv 0, \\ ii) \quad & \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u \Big|_{x=0} = \phi_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, \mu - 1). \end{aligned}$$

4.2. 証明のスケッチ

< 4.2.1. 方程式の reduction >

$u(t, x)$ の代りに

$$w(t, x) = u(t, x) - \sum_{k=0}^{\mu-1} \phi_k(t) \frac{x^k}{k!}$$

を考えることにすれば、初めから

$$(4.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k u \Big|_{x=0} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, \mu-1)$$

の場合のみ考えればよい。以下、(4.2) のケースを論じる。

μ と l の定義より、 $\mu \geq 1$ であり、方程式は次の形に書けている。

$$(4.3) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^m u - \sum_{j \leq l} b_{j, \mu}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu u \\ - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m, \alpha < \mu}} b_{j, \alpha}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u = a(x)t + R_2(t, x, Du).$$

今、 $U(t, x) = (\partial/\partial x)^\mu u$ とおいて、 u に関する方程式 (4.3) を U に関する方程式に書き換えてみる。(4.2) のもとでは

$$u = D_x^{-\mu} U \quad \left(\text{ただし } (D_x^{-1} f)(t, x) = \int_0^x f(t, y) dy \right)$$

と表される。よって積分作用素 $D_x^{-\mu}$ を使うと、方程式 (4.3) は次の形に変換される。

$$(4.4) \quad - \sum_{j \leq l} b_{j, \mu}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j U \\ + \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^m D_x^{-\mu} U - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m, \alpha < \mu}} b_{j, \alpha}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j D_x^{\alpha-\mu} U \\ = a(x)t + R_2 \left(t, x, \left\{ \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j D_x^{\alpha-\mu} U \right\}_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} \right).$$

仮定より、 $b_{l, \mu}(0) \neq 0$ であつたから、全体を $-b_{l, \mu}(x)$ で割っておき、 $\beta = \alpha - \mu$ とおくと、 $\beta \in \mathbb{Z}$ 、 $j + \alpha - \mu = j + \beta \leq m - \mu = l$ であり、方程式 (4.4) は次の形に書ける。

$$(4.5) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^l U + c_1(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{l-1} U + \dots + c_l(x) U \\ + \sum_{\substack{j+\beta \leq l \\ \beta < 0 \\ \text{finite}}} c_{j, \beta}(x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^j D_x^\beta U$$

$$= a(x)t + R_2\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j D_x^\beta U\right\}_{\substack{j+\beta \leq l \\ \text{finite}}}\right).$$

< 4.2.2. 方程式 (4.5) に対する結果 >

結局, 定理 3 は方程式 (4.5) に対する次の結果に帰着された. (4.5) の特性指数 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ を方程式

$$\lambda^l + c_1(0)\lambda^{l-1} + \dots + c_l(0) = 0$$

の根で定義する.

命題 1 (Gérard-Tahara [6]) もしも $j = 1, \dots, l$ に対して $\lambda_j \notin \{1, 2, \dots\}$ が成り立つならば, 方程式 (4.5) は原点 $(0, 0) \in C^2$ の近傍での正則解 $U(t, x)$ で $U(0, x) \equiv 0$ となるものをただ一つ持っている.

方程式 (4.5) は D_x^{-1} という積分を含んでいる. 「この様な積分-偏微分方程式をどう扱うか」については, Gérard-Tahara [6] の Chapter 10 に書かれている.

5. Case (3) について

Case (3) の場合で「確定特異点もどきのケース」について, その結果をまとめておく. もともとの方程式は

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} b_{j,\alpha}(x) \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u = a(x)t + R_2(t, x, Du)$$

であった. ここでは次の仮定のもとで論じる.

$$c_1) \quad b_{j,\alpha}(x) = O(x^\alpha) \quad (x \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

5.1. 結果 (正則解の存在定理)

$c_1)$ のもとでは, $b_{j,\alpha}(x) = x^\alpha c_{j,\alpha}(x)$ と書ける. $\mathcal{L}(x, \lambda, \rho)$ と $L(\lambda, \rho)$ を次の様におく.

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \rho) = \lambda^m - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} c_{j,\alpha}(x) \lambda^j \rho(\rho-1) \cdots (\rho-\alpha+1),$$

$$L(\lambda, \rho) = \mathcal{L}(0, \lambda, \rho) = \lambda^m - \sum_{\substack{j+\alpha \leq m \\ j < m}} c_{j,\alpha}(0) \lambda^j \rho(\rho-1) \cdots (\rho-\alpha+1).$$

定理 4 (Chen-Tahara [2]) $A_1), A_2)$ および $c_1)$ を仮定する. もしも, ある定数 $\sigma > 0$ が存在して,

$$(5.1) \quad |L(k, l)| \geq \sigma(k+l+1)^m, \quad (k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$$

(ただし $N^* = \{1, 2, \dots\}$, $N = \{0, 1, \dots\}$) が成り立つならば, 方程式 (E) は原点 $(0, 0) \in C^2$ の近傍での正則解 $u(t, x)$ で $u(0, x) \equiv 0$ となるものをただ一つ持っている.

注) (5.1) のタイプの条件は ふつう 「Poincaré 条件」といわれる.

5.2. 証明のスケッチ

ここでは, 形式的べき級数 $f(t, x) = \sum_{i,j} f_{i,j} t^i x^j \in C[[t, x]]$ に対して $|f|(t, x)$ と $S(f)(t, x)$ (この S を shift operator という) を次で定義する.

$$|f|(t, x) = \sum_{i,j} |f_{i,j}| t^i x^j,$$

$$S(f)(t, x) = \sum_{i,j} f_{i,j+1} t^i x^j.$$

< 5.2.1. 形式解の構成 >

$A_1), A_2), c_1)$ のもとでは, 方程式 (E) は

$$(5.2) \quad \mathcal{L}\left(x, t \frac{\partial}{\partial t}, x \frac{\partial}{\partial x}\right) u = a(x) t + R_2\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{(j,\alpha) \in I}\right)$$

と書ける. 左辺の $\mathcal{L}$ の中では $x \partial / \partial x$ がひとつの単位として入っているが, 右辺の R_2 の中では $\partial / \partial x$ のままである.

形式解を

$$(5.3) \quad u(t, x) = \sum_{k \geq 1} u_k(x) t^k, \quad u_k(x) \in C[[x]] \quad (k \geq 1)$$

とおき, これを 方程式 (5.2) に代入すると

$$(5.4) \quad \mathcal{L}\left(x, k, x \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k = f_{k-1}\left(x, \left\{p^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_p; 1 \leq p \leq k-1, (j, \alpha) \in I\right\},\right)$$

という形の漸化式が得られる. ここで $f_0 = a(x)$ であり, $k \geq 2$ のとき f_{k-1} は $u_1, \dots, u_{k-1}$ から決まるものである. (5.4) は

$$L\left(k, x \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k = f_{k-1}$$

$$+ x \sum_{(j,\alpha) \in I} S(c_{j,\alpha})(x) k^j \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} - 1\right) \cdots \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha + 1\right) u_k$$

と表されるので, $f_{k-1} \in C[[x]]$ が既知ならば 解 $u_k \in C[[x]]$ は一意的に解ける. これより (5.3) の形の形式解が一意的に得られることが分かった.

< 5.2.2. 形式解の収束性について >

もともとの方程式 (5.2) は

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad & L\left(t\frac{\partial}{\partial t}, x\frac{\partial}{\partial x}\right)u \\
 &= x \sum_{(j,\alpha)\in I} S(c_{j,\alpha})(x) \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(x\frac{\partial}{\partial x} - 1\right) \cdots \left(x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha + 1\right)u \\
 &\quad + a(x)t + R_2\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{(j,\alpha)\in I}\right)
 \end{aligned}$$

であった。これの優級数の方程式として、次を考えるのは自然であろう。

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & \sigma Y = x \sum_{(j,\alpha)\in I} |S(c_{j,\alpha})|(x) Y \\
 & \quad + |a|(x)t + |R_2|\left(t, x, \left\{1^j S^\alpha(Y)\right\}_{(j,\alpha)\in I}\right).
 \end{aligned}$$

命題2 (5.1) の Poincaré 条件を仮定する。次が成り立つ。

(1) (5.5) の形式解を $u(t, x)$, (5.6) の形式解を $Y(t, x)$ とすると $u \ll Y$ が成り立つ。

(2) もっと詳しくは、

$$u = \sum_{k \geq 1, l \geq 0} u_{k,l} t^k x^l, \quad Y = \sum_{k \geq 1, l \geq 0} Y_{k,l} t^k x^l$$

とおくと

$$(k+l+1)^m |u_{k,l}| \leq |Y_{k,l}|, \quad (k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$$

が成り立つ。

この命題より $u(t, x)$ の収束性を得るには $Y(t, x)$ の収束性を言えばよい。

< 5.2.3. $Y(t, x)$ の収束性について >

$Y(t, x)$ の形は

$$Y = \sum_{k \geq 1, l \geq 0} Y_{k,l} t^k x^l$$

となっていた。 $k \geq 1$ という条件を利用して $Y(t, x)$ の収束性を示そう。

$$W(\rho) = \rho \sum_{k \geq 1, l \geq 0} Y_{k,l} \rho^{(2m+1)(k-1)+l}$$

とおくと、 $Y(\rho^{2m+1}, \rho) = \rho^{2m} W(\rho)$, $W(0) = 0$ で「 $W(\rho)$ が収束すれば $Y(t, x)$ も収束する」。従って問題は $W(\rho)$ の収束性の証明にある。(5.6) の中の shift operator の処理には次の命題を使う。

命題 3 次が成り立つ.

$$S^\alpha(Y)(\rho^{2m+1}, \rho) \ll \rho^{m+(m-\alpha)} W(\rho) = O(\rho^m) W(\rho).$$

これと (5.6) から次を導くことは易しい.

$$\begin{aligned} \sigma \rho^{2m} W &\ll \rho C(\rho) \rho^{2m} W + |a|(\rho) \rho^{2m+1} \\ &\quad + |R_2| \left(\rho^{2m+1}, \rho, \{\rho^{m+(m-\alpha)} W\}_{(j,\alpha) \in I} \right). \end{aligned}$$

両辺から ρ^{2m} をキャンセルすると

$$\sigma W \ll \rho C(\rho) W + |a|(\rho) \rho + G_2(\rho, W)$$

という形の不等式を得る. ここで

$$G_2(\rho, W) = \frac{1}{\rho^{2m}} |R_2| \left(\rho^{2m+1}, \rho, \{\rho^{m+(m-\alpha)} W\}_{(j,\alpha) \in I} \right)$$

であり, $G_2(\rho, W)$ は (ρ, W) の正則関数で その Taylor 展開は (ρ, W) について 2 次以上の項のみから出来ている. 結局のところ,

$$(5.7) \quad \sigma Z = \rho C(\rho) Z + |a|(\rho) \rho + G_2(\rho, Z), \quad Z(0) = 0$$

という関数方程式を考えると, その形式解 $Z(\rho)$ は $W(\rho) \ll Z(\rho)$ をみたすことが分かる. よって 問題は $Z(\rho)$ の収束性の証明に帰着された.

< 5.2.4. $Z(\rho)$ の収束性の証明 >

関数方程式 (5.7) に陰関数の定理を使うと「(5.7) は $\rho = 0$ の近傍での正則解 $Z = Z^*(\rho)$ をただ一つ持っている」ことが分かる. 形式的に計算してみると, 形式解 $Z(\rho)$ はただ一つであることが分かるので, それは正則解 $Z^*(\rho)$ を展開したものにならない. これで, 形式解 $Z(\rho)$ の収束性が証明された.

参考文献

- [1] H. Chen and H. Tahara : *On the holomorphic solution of non-linear totally characteristic equations*, Preprint 98/20, Institut für Mathematik, Potsdam, 1998.

- [2] H. Chen and H. Tahara : *On totally characteristic type non-linear partial differential equations in the complex domain*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 35 (1999), 621-636.
- [3] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 26 (1990), 979-1000.
- [4] R. Gérard and H. Tahara : *Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 121-151.
- [5] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular partial differential equations, II.* " Structure of differential equations, Katata/Kyoto, 1995 " (edited by Morimoto-Kawai), 135-150, World Scientific, 1996.
- [6] R. Gérard and H. Tahara : *Singular nonlinear partial differential equations*, Aspects of Mathematics, E 28, Vieweg-Verlag, 1996
- [7] H. Tahara : *Uniqueness of the solution of non-linear singular partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan, 48 (1996), 729-744.
- [8] H. Tahara : *On the uniqueness theorem for nonlinear singular partial differential equations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 5 (1998), 477 - 506.