

Grothendieck Topos への入門試論

九大工学部

倉田令二郎

(Reijiro Kurata)

本論の意図 (1) Grothendieck Topos の入門にあたり
ては 一貫して古典的, 集合論的, あるいは external な立場をとる
のを見識ではあるが, できるだけ一般のトポスにおいて sheaf
を定義する Lawvere-Tierney の internal な方法を用いて簡単に
で説明し, あるいは諸定理の証明とすることの方が教育的と考える.

本論は不十分なものだが, 最初の試論である. 以下の定
義や定理における $()_e$, $()_i$ は external, internal と区別
するものである. 主な参考書は

[M.R] Makkai, Reyes, First order Categorical Logic,
Springer Lecture Note 611 (1977).

[J] Johnstone Topos Theory, Academic Press (1977).

(2) (1) で述べたやり方で Grothendieck Topos に度する基本
的性質, あるいはいかなる Topos が Grothendieck であるか (Giraud),
また $Sh(H)$ であるか, さらには Grothendieck Topos

の $\text{Sh}(H)$ への埋込み (Bar, Diaconescu, Makkai; Reyes), および著者による Progenitor が与える問題と一つの視角 (2.1, 2.2) から扱う. (3) 埋込み定理に反しては Diaconescu の方法によって証明を完成させるが, これは [M.R.] に依りよう ^左 完全性定理を用いる ~~ことができない~~. 最後には新証明を与える.

§0 Grothendieck Topology & Sheaf.

[0.1] Grothendieck Topology & Sheaf

(1) Pretopology (covering family)

$\mathcal{C}$ を finite left limit を与える Category とし, 対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し $\text{Cov}(A)$ は 次の条件を満たす射の族 $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ の集合である.

$\text{Cov}(i)$ 同型射 $A \xrightarrow{f} A$ に対し, $(A \xrightarrow{f} A) \in \text{Cov}(A)$

$\text{Cov}(ii)$ (stability) $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{Cov}(A)$ と任意の射 $B \xrightarrow{g} A$ in $\mathcal{C}$ に対し, $(A_i \times_A B \rightarrow B)_{i \in I} \in \text{Cov}(B)$

$\text{Cov}(iii)$ (closure under composition)

$(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{Cov}(A)$, $(A_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} A_i)_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(A_i)$ ならば

$(A_{ij} \xrightarrow{f_i \circ g_{ij}} A)_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(A)$

$\text{Cov}(iv)$ (monotonicity) $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{Cov}(A)$ と射の族

$(B_j \xrightarrow{g_j} A)_{j \in J}$ に対し, 任意の $i \in I$ に対し f_i が g_j を通過するならば $(B_j \xrightarrow{g_j} A)_{j \in J} \in \text{Cov}(A)$, $(\text{Cov}(A))_{A \in \mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ 上の pretopology である.

(1') Topology (covering sieve)

$\mathcal{C}$ を任意の Category¹⁾, $A \in \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{J}(A)$ は次の条件を満たす

ある A の crible の集合とする。

$J(i)$ A の maximum crible は $J(A)$ に入る。

$J(ii)$ (stability) $R \in J(A)$ と $B \xrightarrow{f} A$ in $\mathbb{C}$ に對し,

$$f_*^{-1}(R) = \{g \mid X \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A \in J(A)\} \in J(B)$$

$J(iii)$ (local character) R, R' は A の crible , $R \in J(A)$ とする

もしある $B \xrightarrow{f} A \in R$ に對し $f_*^{-1}(R') \in J(B)$ ならば $R' \in J(A)$.

注 1) $\mathbb{C}$ は finite left limit をもたなくてよい。

射の族 $\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ に對し, $[\alpha]$ によって, α によ

って生成された A の crible をあらわすとする。

命題 0.1 e^① finite left limit をもつ $\mathbb{C}$ には $\text{Cor}(i) \sim (iv)$

と成たす $\text{Cor}(A)_{A \in \mathbb{C}}$ が与えられたとする。このとき,

$J(A) = \{[\alpha] ; \alpha \in \text{Cor}(A)\}$ とおけば $J(A)_{A \in \mathbb{C}}$ は $J(i) \sim (iii)$ と成

たす。② ① ①' $\mathbb{C}$ には $J(i) \sim (iii)$ と成て $J(A)_{A \in \mathbb{C}}$ が与え

られたとする。このとき $\text{Cor}(A) = \{\alpha ; [\alpha] \in J(A)\}$ とおけば, こ

れは $\text{Cor}(i) \sim \text{Cor}(iv)$ と成たす。③ ①と②は逆の関係にある。

Pretopology $\text{Cor}(A)_{A \in \mathbb{C}}$, なる $\mathbb{C}$ は topology $J(A)_{A \in \mathbb{C}}$ の与えられた

$\mathbb{C}$ は site といふ。

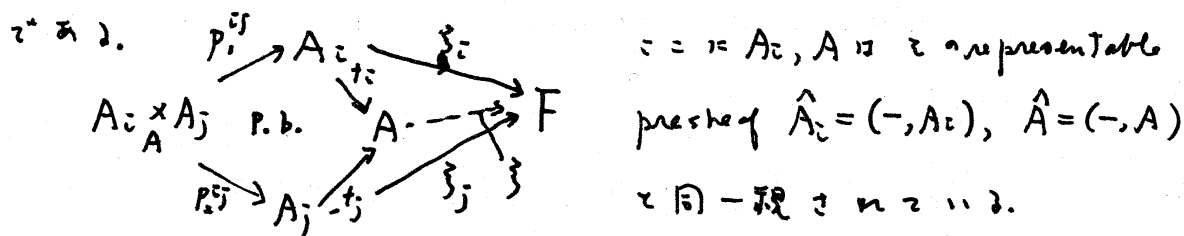
(2) e sheaf ($\mathbb{C}$)

$\mathbb{C}$ は finite left limit をもつ site とする。 $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{Cor}(A)$

と $\mathbb{C}$ 上の presheaf $F \in \hat{\mathbb{C}} = \mathcal{P}^{\text{op}}$ に対し, $\hat{\mathbb{C}}$ には $\mathbb{C}$ の射の族

$(A_i \xrightarrow{f_i} F)_{i \in I}$ が covering $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ に対し compatible とは

下の⑩式に於いて, 任意の $i, j \in J$ に対して $\{i, j\} \in \mathcal{C}$ であることは $\mathcal{C}$ の定義より成り立つ。



presheaf F on $\mathcal{C}$ が族 $(A_i \xrightarrow{\tau_i} A)_{i \in I}$ に対して sheaf property を満たすことを示す。

1. $(A_i \xrightarrow{\tau_i} A)_{i \in I}$ は $\mathcal{C}$ の任意の compatible family $(A_i \xrightarrow{\tau_i} F)_{i \in I}$ に対して, ⑩式と可換になるような $\{i, j\} \in \mathcal{C}$ が唯一存在することを示す。最後に F が $\mathcal{C}$ 上の sheaf であることを示す。

$(A_i \xrightarrow{\tau_i} A)_{i \in I} \in \text{Cov}(A)$ である。 F が sheaf property を満たすことを示す。

(2) F が site $\mathcal{C}$ 上の sheaf であるための条件は任意の $A \in \mathcal{C}$ と任意の covering crible $R \in J(A)$ に対して,

$$\hat{\mathcal{C}}(A, F) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(R, F) \quad (A \rightarrow F) \mapsto (R \rightarrow A \rightarrow F)$$

が同型となることを示す。これは A は representable presheaf $\hat{A}$ と同一視される。 crible R は $\hat{A}$ の subpresheaf $\hat{R}$ と同一視される。

Canonical Grothendieck Topology

これは $\mathcal{C}$ の representable presheaf を sheaf とする最も強い (i.e. $J(A)$ が最も多い) topology である。そのとき $(A_i \xrightarrow{\tau_i} A)_{i \in I}$ が covering family であるための条件は effective epimorphic (これは A の representable presheaf であることは ⑩式 sheaf property を満たす) かつ, $\mathcal{C}$ の任意の

証明. $\Rightarrow$ は定義に依るから $\Leftarrow$ をいざやう.

j-shed $A \subset B' \rightarrow A$ is s.t. $B' \rightarrow A = B' \rightarrow B \rightarrow A$ and $B \rightarrow A$ are
- $\rightarrow$ and $\leftarrow$. $A \subset 1 \subset \subset \in \Omega_j$ and $i \geq 0$. It's.

closed subobject $X' \rightarrow B'$ is $\exists$ 1. closed subobject $X \rightarrow B$ of the same type $\exists$ 9
 $\exists$ 11 is the unique $\rightarrow \exists \exists$ 1 $\exists$ $X' \rightarrow B' = (B' \xrightarrow{h} B) \wedge (X \rightarrow B)$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般に任意の } B \rightarrow \Omega_j \text{ に対して } X \rightarrow 1 \text{ ならば } X \rightarrow B \text{ である} \\ \text{closed subobject である} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 Y' & \rightarrow & X & \rightarrow & 1 \\
 \downarrow p.b. & & \downarrow p.b. & & \downarrow a.t. \\
 B' & \xrightarrow{h} & B & \rightarrow & \Omega_j
 \end{array}$$

$$B' = (B' \xrightarrow{h} B) \wedge (\overline{B'} \xrightarrow{g} B), \quad X \mapsto B \text{ a-変性か}$$

$\therefore \overline{B'} \cong B \quad \Rightarrow \text{ } \exists \text{ } B' \rightarrow B \text{ is dense \& } \tau_2 \text{ } \square.$

(3) i.e. Grothendieck Topology = 束関係

$(\mathbb{C}, J)$ is site, J is $\mathbb{C} \perp \Rightarrow$ Grothendieck Topology $\Leftarrow$ 12.

$$\mathbb{C} \ni X \mapsto J(X), \quad Y \xrightarrow{f} X \text{ in } \mathbb{C} \mapsto J(X) \xrightarrow{J(f)} J(Y) \quad (\text{with } R \mapsto f_*^{-1}(R))$$

次に $\gamma: \mathcal{T}$ は functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{T}$ を定義する. $\gamma(1) = \hat{\mathcal{C}}$ とする.

$$J \mapsto \Omega \quad \tau^* \alpha \beta. \quad \text{---} \text{---} \text{---} \Omega \text{ is Topos } \hat{\mathbb{C}} \text{ a subobject classifier}$$

1" $n > 2$ $\mathbb{C} \ni X \mapsto \Omega(X) = \{\text{crisble of } X\} = F > 2$ 定数 Ω_n

Prop 0.4: i.e. $J \in \mathbb{C}^+$ is a Grothendieck Topology & l.

$J \rightarrow \Omega$, $\hat{C} = 2-17$ a classifying map $\tau: \Omega \xrightarrow{j} \Omega \times \mathbb{Z}$. So τ ,

① J は $(I)_c$, 意味は $\alpha-17$ の $\hat{C}$ の topology である。

①, $\hat{\mathcal{C}}$ is a subpresheaf $J \rightarrow \Omega$ is s.t. l. is a charac map
 $\Omega \hookrightarrow \Omega$ s.t. $\hat{\mathcal{C}}$ a topology is s.t. J is Grothendieck Topology.

② $F \in \hat{\mathcal{C}}$ s.t. $(\mathcal{C}, J) \models \text{sheaf} \iff F$ is j -sheaf

③ R is a crible of $(\mathcal{C}, \text{object } X)$ is s.t. $\times \exists$

$R \in J(X) \iff R \rightarrow X$ is j -dense in $\hat{\mathcal{C}}$.

④ Grothendieck Topology J is s.t. $\hat{\mathcal{C}}$ is s.t. $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ is s.t. $\times \exists$ is s.t.
 $j_X: \Omega(X) \rightarrow \Omega(X)$ is s.t. $\times R \in \Omega(X)$ is

$j_X(R) = \{Y \xrightarrow{f} X; f_*^{-1}(R) \in J(Y)\}$ is s.t. $\times \exists$.

$\Omega_j(X)$ is j_X is s.t. $\times \exists$.

⑤ - s.t. j -dense $G' \rightarrow G$ in $\hat{\mathcal{C}}$

$G \in \hat{\mathcal{C}}$ is $G = \varinjlim X_\alpha$ (X_α is representable i.e. $X_\alpha \in \mathcal{C}$)

is s.t. $\times \exists$ is s.t. $\times \text{colimiting Cone } X_\alpha \rightarrow G$ is s.t. $\times \exists$ $R_\alpha \rightarrow X_\alpha$

is s.t. $\times \exists$ $G' = \varinjlim R_\alpha$ (colimit is universal in $\hat{\mathcal{C}}$), $\downarrow \text{p.b.} \downarrow$
 $G' \rightarrow G$

is s.t. $\times \exists$ $G' \rightarrow G$ j -dense $\iff$ is s.t. $\times \exists$ $R_\alpha \rightarrow X_\alpha$ j -dense

$\Rightarrow$ is s.t. $\times \exists$ is s.t. $\times \text{sheaf } F$ is s.t. $\times \exists$ $\hat{\mathcal{C}}(X_\alpha, F) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(R_\alpha, F)$ is s.t. $\times \exists$

is s.t. $\times \exists$ $\hat{\mathcal{C}}(G, F) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(G', F)$ is s.t. $\times \exists$ (0.3) is s.t. $\times \exists$ $G' \rightarrow G$ is dense is s.t. $\times \exists$.

(4): Topos $\tilde{\mathcal{E}}_j$, associated sheaf functor

$\tilde{\mathcal{E}}_j (= \text{Sh}_j(\mathcal{E}))$ is s.t. $\times \exists$ j -sheaf object is s.t. $\times \exists$ $\mathcal{E}$ is full subcategory is s.t. $\times \exists$.

Prop 0.5: inclusion functor $\tilde{\mathcal{E}}_j \xrightarrow{i} \mathcal{E}$ is left exact is left adjoint is s.t. $\times \exists$ is s.t. $\times \exists$ associated sheaf functor is s.t. $\times \exists$.

$X \in \mathbb{E} = \text{Set}$, $a(X)$ は次のようにする。

$$X \xrightarrow{f} \Omega^X \xrightarrow{g} \Omega_j^X \quad \text{epi-mono 分解をとり, } a(X) = \overline{Y}(\text{in } \Omega_j^X) \text{ とおく.}$$

Prop 0.6: $\tilde{\mathbb{E}}_j$ は Topos である。 $\forall A^B$ は $\mathbb{E}$ の $z \in \text{in } \tilde{\mathbb{E}}_j$, $\tilde{\mathbb{E}}_j$ の subobject classifier は $1 \xrightarrow{x \cdot t} \Omega_j$ である。

§1. Lifting up to $\hat{\mathbb{C}}$.

1.1e Prop. $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ は Category, $\mathbb{D}$ は locally small, $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ は Functor である。 $u_*: \hat{\mathbb{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は $F \in \hat{\mathbb{D}}$ に Set として $u_*F = F \circ u$ に F を定義する functor である。 u の $\mathbb{C}$ 上の Functor $u^*, u_r: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{D}}$ が存在して $u^* \dashv u_* \dashv u_r$ となる $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$

$$\begin{array}{ccc} h^{\mathbb{C}}, h^{\mathbb{D}} \text{ は Yoneda embedding} & & \begin{array}{ccc} h^{\mathbb{C}} \downarrow & \xrightarrow{u_*} & \downarrow h^{\mathbb{D}} \\ \hat{\mathbb{C}} & \xleftarrow{u_*} & \hat{\mathbb{D}} \\ & \xrightarrow{u_r} & \end{array} \text{ が可換.} \\ X \mapsto \hat{X} = (-, X) & & \end{array}$$

証明, $D \in \mathbb{D}$ として, $\hat{\mathbb{D}}(D \downarrow u)$ (対象は $D \rightarrow uC$ in $\mathbb{D}$, map は

$$\begin{array}{ccc} D \rightarrow uC & & \\ \downarrow u_f & \text{is } f & \hat{\mathbb{D}}(u \downarrow D) \text{ (対象は } uC \rightarrow D, \text{ map は } u_f \downarrow \xrightarrow{f} D \text{ is } f) \\ uC' & & \end{array}$$

である。 $F \in \hat{\mathbb{C}}$ として

$$u^*F(D) = \varinjlim_{D \rightarrow uX \in (D \downarrow u)^{\text{op}}} F(X) \quad u_rF(D) = \varprojlim_{uX \rightarrow D \in \hat{\mathbb{D}}(u \downarrow D)^{\text{op}}} F(X) \quad \text{である。}$$

1.2e $\langle u_* u_r \rangle: \hat{\mathbb{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ 上の geometric morphism である。

1.3e $\langle u^* u \rangle: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{D}}$ は geometric morphism である。

$\mathbb{C}, \mathbb{D}$ が product をとり u が $z \in \text{in}$ を preserve する $(D \downarrow u)^{\text{op}}$ は filtered category である。 u は left exact, $\langle u^* u \rangle$ は geometric morphism である。 ([M.R] 39~40).

§2 Lifting up to $\tilde{\mathbb{C}}$.

2.0 $\mathbb{C} \xrightarrow{u} \mathbb{D}$

$h^c \downarrow \quad \quad \downarrow h^D$

$\hat{\mathbb{C}} \xrightleftharpoons[u_r]{u_i} \hat{\mathbb{D}}$

$a_c \uparrow \quad \quad \uparrow a_D$

$\tilde{\mathbb{C}} \xrightleftharpoons[u_r^*]{u_i^*} \tilde{\mathbb{D}}$

$u_i^* = a_D \cdot u_i \cdot i_c$
 $u_* = a_c \cdot u \cdot i_D$
 $u_r^* = a_D \cdot u_r \cdot i_c$

(2.1)_e $\langle u, u \rangle$ is geometric morphism $\Rightarrow \exists$, 次条件は同値である。

(i) $u^* - 1u_* = \eta \wedge \exists \langle u^*, u_* \rangle$ is geometric morphism $\vdash \tau_2$.

(ii) $u: \hat{C} \rightarrow \hat{D}$ is dense mono & dense mono $\Rightarrow i > j$.

(iii) $\therefore \hat{D} \rightarrow \hat{C}$ is sheaf $\neq$ sheaf $\Rightarrow i > 3$.

(2.2)₂ 次の条件は同値である.

(ii) $u_x \mapsto u_y^*$ ($\langle u_x, u_y^* \rangle = 1 \Rightarrow$ is geometric morphism.)

(ii) $u: \hat{D} \rightarrow \hat{C}$ is dense mono & dense mono $\Rightarrow j > 3$.

(iii) $u_i: \hat{C} \rightarrow \hat{D}$ is sheaf & sheaf $i \geq 3$.

(2.1) (2.2) 例, 定理 (Lawrence Tierney [T] 3.47) 和

42.

(2.3)_i $f = \langle t_*, f^* \rangle (t^* \rightarrow t_*)$ is Topos $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$ is geometric morphism $\times \pi$. $j \in \mathcal{F}$ is topology $\times 1$. geometric morphism

$$i: \tilde{F}_i \rightarrow F_i \quad \text{et } \langle i, a \rangle \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ とするとき次の条件は同値である。

$j \downarrow \sim \nearrow i$ (i) f は $i \in \mathbb{Q}$ 。つまり f は geometric morphism $f = \langle f_*, f^* \rangle$ があるとして $\mathbb{Q}$ が可換。

(ii) f^* は $\mathcal{F}$ の dense mono $\mathcal{E}$ の iso に $j > 1$ 。

(iii) f_* は $\mathcal{E}$ の object と $\mathcal{F}$ の j -sheaf に $j > 1$ 。

2.3: 4.3 2.1e, 2.2e と同じであるには上 $\mathbb{Q}$ のかわりに

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\langle id, d \rangle} & \hat{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\langle u, u^* \rangle} & \hat{\mathcal{C}} \\ & \searrow \langle u_*, u^* \rangle & & \nearrow \langle id, d \rangle & \\ & \tilde{\mathcal{C}} & & \hat{\mathcal{D}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\langle id, d \rangle} & \hat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\langle u_*, u^* \rangle} & \hat{\mathcal{D}} \\ & \searrow \langle u_*, u^* \rangle & & \nearrow \langle id, d \rangle & \\ & \tilde{\mathcal{D}} & & \hat{\mathcal{C}} & \end{array}$$

と考へればよい。2.3: の条件 (ii) と 2.1e, 2.2e の条件 (i) は次の lemma によって等しい。

2.4: lemma $\mathcal{E} \in \text{Topos}$, $j \in \text{Topology}$ とする。associated sheaf functor $\mathcal{E} \xrightarrow{j} \tilde{\mathcal{E}}$ にかゝる

$$X' \hookrightarrow X \text{ dense in } \mathcal{E} \iff aX' \cong aX \quad ([J] 3.4.2)$$

2.5e u が left exact とは必ずしもない場合、2.1 の条件 (i) (ii) (iii)

への関係は次の通りである。 (ii) $\iff$ (iii)

$$(ii) \text{ である } \implies (iii) \implies (i) \quad u^* \dashv u_*$$

2.6e 2.1e, 2.5e の条件 (ii) が成立するものの条件

R と $A \in \mathcal{C}$ の crible, R に対応する presheaf $\hat{R}$ と置く。

family $\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ に対して $[\alpha]$ は α によって生成される crible,

$$u(\alpha) = (uA_i \rightarrow uA)_{i \in I} \quad u(R) = \{ uX \xrightarrow{u^*} uA ; X \rightarrow A \in R \}$$

$$\alpha \in \text{Cov}_{\mathcal{C}}(A) \iff [\alpha] \in K(A) \text{ によって } \text{Cov}_{\mathcal{C}}(A) \text{ を定める}$$

($\mathbb{C}$ is finite left limit and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$)

$B \in \mathbb{D}$ is for $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\text{cov}_p(B))$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

u is continuous and $\alpha \in \mathcal{C}(\text{cov}_p(A)) \Rightarrow u(\alpha) \in \mathcal{C}(\text{cov}_p(uA))$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

Prop. ① $R \in A$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $u \cdot \hat{R} = [u(R)]^\wedge$ ($\mathbb{D}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $u(R)$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$) is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $u: \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{D}}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

② $\hat{R} \rightarrow \hat{A}$ dense is $u \cdot \hat{R} \rightarrow u \cdot \hat{A}$ $\Leftrightarrow u$ is continuous

① and ④, $uA = u \cdot \hat{A}$, $[u(\alpha)] = [u(R)]$ ($R = [\alpha]$) is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

2.7e (2.2) (ii) is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

$u: \hat{\mathbb{D}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ is dense mono and dense mono is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

(0.4) is ⑤ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

is dense is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

$Y \rightarrow u \cdot X$ (Y is representable in $\hat{\mathcal{C}}$) is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

$S \rightarrow Y$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

§3 Functor $\mathcal{E}_c: \mathcal{C} \xrightarrow{h^c} \hat{\mathcal{C}} \xrightarrow{q_c} \tilde{\mathcal{C}}$

3.1e $\mathcal{C}$ is finite left limit and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

topology is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ is $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccccc} \hat{C}(A, F) & \rightarrow & \prod_{i \in I} \hat{C}(A_i, F) & \Rightarrow & \prod_{j \in J} \hat{C}(A_i \times_A A_j, F) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \end{array}$$

$$\tilde{C}(aA, F) \rightarrow \prod_{i \in I} \tilde{C}(A_i, F) \rightrightarrows \prod_j \tilde{C}(a(A_{\alpha}^{\times} A_j), F)$$

縦の β は $a - i$ による. $\gamma = r$

$$\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{Cov}_E(A) \iff \exists \lambda'' \exists F \in \tilde{\mathcal{C}} \text{ s.t. } \alpha = \lambda'' \circ F \text{ is a sheaf property.}$$

$\gamma \in \pi_1(0,3; \mathbb{C}) \iff$ 上の図式が equalizer である (仮定 $f \in \tilde{\mathcal{C}}_{\text{equalizer}}$)

$$\Leftrightarrow \exists h'' \text{ s.t. } F \in \tilde{\mathcal{C}}_1 = \{g \mid \exists \tau \in \mathbb{R} \text{ s.t. } g = \tau \cdot F\} \text{ is a scalar multiple of } F$$
$$\Leftrightarrow (2A_1 \rightarrow 2A)_{\text{CH}_2} \text{ is } \hat{C}_{12} = 2, 1, 2 \text{ effective spin-orbital } \tau = 2$$
$$\Rightarrow (2A_i \rightarrow 2A)_{i \in I} \text{ is } \hat{C} = \pi^{-1}(2A) \text{ covering } 2A.$$
$$(\equiv \tau^a A_i, A = \hat{A}_i, \hat{A} \in \mathbb{R} - \text{field } \mathbb{R})$$

3.2 lemma (c.f. [MR] 1.49) Functor $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S} = \mathbf{Set}^{I^{\text{op}}}$

ii) $\mathbb{R}, \mathbb{S}$ are coequalizer and $\mathbb{S}$ is an epimorphism and coequalizer respectively.

(ii) I is full, faithful and

(iii) I preserve coequalizer

(iv) 任意の $S \in \mathcal{S}$ に対し $1. R \in IR$ がある $\Leftrightarrow \text{epi} IR \Rightarrow S \in \mathcal{S}$ がある.

3.9.4 I is equivalence τ'' is $\perp$.

証明 任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して $(\mathbb{R} \rightarrow S, \gamma) \in \mathcal{S}$ となる S はある。

Ex: Coequalize $X \rightrightarrows IR \Rightarrow S$ i.e.). $IR' \rightarrow X$ zero. zero

$$I: R' \twoheadrightarrow X \twoheadrightarrow IR \twoheadrightarrow S \text{ (coequalizer of } \tau_1, \tau_2 \text{)}. I \text{ is full } \tau_1 \neq \tau_2$$
$$IR' \supset IR \text{ ist } IR \text{ zu } R' \supset R, \text{ also z.B.} \Rightarrow \text{coequalizer}$$
$$R' \rightarrow R \rightarrow R' \text{ in } \mathcal{R} \text{ and } \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'' \text{ is coadjoint, then } \mathcal{R}'' \cong S$$

§6 Diaconescu embedding

6.1. $\mathbb{E} \models \tau \equiv \tau' \iff \tau \equiv \tau'$. $\mathbb{E} \models \exists x \in H \text{ s.t. } Hx$
 f^* is faithful τ and τ' is geometric morphism $\mathbb{E} \xrightarrow{\langle f^*, f_* \rangle} \mathcal{S}h(H)$ ($f^* \dashv f_*$)
 τ is in $\mathcal{S}h$. Diaconescu is the τ is $\mathcal{S}h$ (c.f. [J] 7.51).

$\mathbb{C} \models \exists x \in H \text{ s.t. } Hx$. $\mathbb{E} \cong \tilde{\mathbb{C}}$, Poset $P \in \mathcal{S}h$ and τ is $\mathcal{S}h$.

P is object is composable strings of maps of $\mathbb{C}$ $w = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$, $d_1(\alpha_i) = d_0(\alpha_{i+1})$

$$w_1 \leq w_2 \iff w_1 = (\alpha_1 \cdots \alpha_n w_2) \circ \tau.$$

functor $d: P \rightarrow \mathbb{C}$ is $(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \mapsto d_0(\alpha_1)$ and τ is $\mathcal{S}h$. $w \leq w_2$ is $\mathcal{S}h$
 τ is $d(w_1) \rightarrow d(w_2)$ is $\mathcal{S}h$ is $\mathcal{S}h$.

$\mathbb{C}$ is Grothendieck topology τ is $J(X) \times \{1\}$. P is Grothendieck topology
 $K(w)$ is $\mathcal{S}h$ and τ is $\mathcal{S}h$. $w \in P$ is $\mathcal{S}h$ is $\mathcal{S}h$.

$$S \in K(w) \xrightarrow{D_d} \forall w' \leq w \{d(w') \rightarrow d(w) \mid w' \leq w', w' \in S\} \in J(d(w))$$

$$= \text{and } d \text{ is 2.1 (ii) } \tau \text{ is } (d, \text{ is 2.2 (ii) } \tau \text{ is } \mathcal{S}h, \text{ is } \mathcal{S}h$$

$d^* \dashv d_* \dashv d_r^*$ is $\mathcal{S}h$ is $\mathcal{S}h$. τ is d_* is faithful and τ is [J] 7.51).

$\mathbb{E} \cong \tilde{\mathbb{C}} \xrightarrow{\langle d_*, d_r^* \rangle} \tilde{P}$ ($\tilde{P}$ is K -sheaf of $\mathbb{E}$) is geometric morphism $\tau: \hat{P}$, $\tilde{P}$ is $\mathcal{S}h$
 τ is $\mathcal{S}h$ is $\mathcal{S}h$ [J] 5.34) is $\mathcal{S}h$ is $\mathcal{S}h$.

6.2 Diaconescu embedding is $L_{w, w'}$ is order logical τ is $\mathcal{S}h$.

$$\{w \in w \mid Q: \mathbb{E} \xrightarrow{T'} \tilde{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_*} \tilde{P} \text{ is } \mathcal{S}h \text{ is } \mathcal{S}h\}$$

$$A \in \mathbb{E} \models \exists x \in H \text{ s.t. } Hx \iff QA \equiv \mathbb{E}(d(-), A) \text{ is } \mathcal{S}h. \text{ is } Q \text{ is}$$

(1) Ω -preserving (2) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ preserving

(3) $\vee, \wedge$ -preserving (4) $\exists, \forall$ -preserving τ is $\mathcal{S}h$.

(2), (3) & (4) $\Rightarrow \exists \langle d, d^* \rangle$ が geometric morphism であることは示す。

(1) は既述である。 $\mathcal{V}$ -preserving であることは $\mathcal{Q}$ が sublogical であることと同等である。 $\mathbb{E} \xrightarrow{f} \mathbb{F}$ は 2 の Topos $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ の Ω -preserving product preserving functor であることは、 f が sublogical であることと同等である。

$f(A) \times f(B^A) \xrightarrow{f(\omega)} f(B)$ の exp. conjugate $f(B^A) \rightarrow f(B)^{f(A)}$ が mono であることは、 f が $\mathcal{V}$ -preserving であることと同等である。 (これは

Prop (Mikkelsen) left exact, Ω -preserving functor $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ が sublogical であることは f が $\mathcal{V}$ -preserving であることと同等である。
 のこと (4) の $\mathcal{V}$ -preserving であることは $\mathcal{Q}$ が sublogical であることと同等である。

6.3. 6.2 の証明

(1) $\mathcal{Q}$ が sublogical であることは

$$\mathcal{Q}(B^A)(P) = (d(P), B^A) \cong (d(P) \times A, B)$$

$$\mathcal{Q}(B)^{\mathcal{Q}(A)}(P) = \text{Nat}(\mathcal{Q}A \upharpoonright P, \mathcal{Q}B \upharpoonright P) = \text{Nat}[(d(-), A) \upharpoonright P, (d(-), B) \upharpoonright P]$$

注) $\hat{P}$ の exponential B^A は $B^A(P) = \text{Nat}(A \upharpoonright P, B \upharpoonright P)$ である。

これは $A \upharpoonright P$ は Functor $A: P \rightarrow \mathcal{S}$ と $P = \{i; i \leq P\}$ に制限したもので

すなわち $\omega_P: B^A(P) \times A(P) \rightarrow B(P)$ は $\omega_P(\tau, a) = \tau_P(a)$ となる。

$$\tau(P): \mathcal{Q}(B^A)(P) \rightarrow \mathcal{Q}(B)^{\mathcal{Q}(A)}(P) \quad (d(P) \times A \xrightarrow{f} B \mapsto \tau^\dagger)$$

は $\mathcal{Q}$ のように定義する。 $i \leq P$ に対して $\tau_i^\dagger: (d(i), A) \rightarrow (d(i), B)$ は

$$d(i) \xrightarrow{A} A \mapsto (d(i) \xrightarrow{\langle d(i \rightarrow P), a \rangle} d(P) \times A \xrightarrow{f} B) \quad (*)$$

k は $\hat{P}$ の射を k とする mono である。

$E(P)$ が可解であることである。 $d(P) \times A \xrightarrow{f} B$, $f \neq f'$ である。
 $\mathbb{C}$ は generator であるから $X \in \mathbb{C}$ であるから $X \rightarrow d(P) \times A \xrightarrow{f} B$ である。
 である。 $X = d(f)$, $1 \leq p \leq r$ であるから $\tau_p^f(a) \neq \tau_p^{f'}(a)$
 (1) であるから $\tau^f \neq \tau^{f'}$.

$Q(ev): Q(B^A)(P) \times Q(A)(P) \rightarrow Q(B)(P)$ $Q(B^A \times A)(P) \xrightarrow{Q(ev)} Q(B)(P)$
 $\downarrow \kappa(P) \times 1$ $\nearrow ev_P(P)$
 $Q(B)(P) \times Q(A)(P)$
 $\downarrow$
 $\langle d(P) \xrightarrow{f} B^A, d(P) \xrightarrow{a} A \rangle \in$
 $d(P) \xrightarrow{\langle f, a \rangle} B^A \times A \xrightarrow{ev} B = d(P) \xrightarrow{\langle 1, a \rangle} d(P) \times A \xrightarrow{f} B$
 $\downarrow$
 $\langle f, a \rangle \in Q(B^A \times A)(P) \in \langle \tau, a \rangle \in Q(B)(P) \times Q(A)(P)$
 $\downarrow$
 $\langle \tau, a \rangle \xrightarrow{ev_P(P)} \tau_P^f(a) = d(P) \xrightarrow{\langle 1, a \rangle} d(P) \times A \xrightarrow{f} B$ である。

以上より (1) は可解である。

(2) Q が Ω -preserving であることである。

$\text{Site}(\mathbb{C}, J) = \{ \Omega \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{classifying map } j: \Omega \rightarrow \Omega \}$
 $j_X(R) = \{ Y \xrightarrow{f} X \mid f_*^{-1}(R) \in J(Y) \}$ である (0.2) (1) (4),
 $\tilde{\mathbb{C}}$ の subobject classifier Ω_j は j の image である。 J の canonical topology の場合 $\Omega_j(X) \cong E(X, \Omega) \cong \text{Sub}_K(X)$ ($E = \tilde{\mathbb{C}}$)
 である。 $\text{Site}(P, K) = \{ \Omega \in \hat{P} \mid \text{classifier } k: \Omega \rightarrow \Omega \}$
 $k_w(r) = \{ w' \in w \mid (w, w') \in K(w) \}$ (r は w の crible) である。
 $\tilde{P}$ の subobject classifier Ω_k は k の image である。

以下 $\Omega_k(w) \cong \text{Sub}_E(d(w)) \cong E(d(w), \Omega)$ である。

P は w の crible r である。 $dr = \{ dw' \rightarrow dw \mid w' \in r \}$

とあるが、これは $\mathbb{Q}$ にある dw の cube であることに注意

しよう。 $K(w)$ の定義から

$$w' \in k_w(r) \Leftrightarrow w' \leq w, \forall w'' \leq w' \{ dw'' \rightarrow dw' \mid w'' \leq w'', w'' \in r \} \in J(dw'') \quad ①$$

$$\Leftrightarrow w' \leq w, \forall w'' \leq w' \{ X \rightarrow dw'' \mid X \rightarrow dw'' \rightarrow dw' \rightarrow dw \in dr \} \in J(dw'') \quad ②$$

実際 ① の $\{ \}$ の部分 $\in S_1 \subset L$ 。 ② の $\{ \}$ の部分 $\in S_2 \subset L$ 。

$S_3 = \{ dw'' \rightarrow dw' \mid w'' \leq w' \}$ とあるが S_3 は実は dw'' の max. cube

で $J(dw'')$ に属する。 したがって $S_1 = S_2 \cap S_3$ が成立する。 ② より

$$w' \in k_w(r) \Leftrightarrow w' \leq w, \forall w'' \leq w' (dw'' \rightarrow dw' \rightarrow dw \in j_{dw}(dr))$$

$$\Leftrightarrow w' \leq w, dw' \rightarrow dw \in j_{dw}(dr)$$

$$したがって $k_w(r) = k_w(r') \Leftrightarrow j_{dw}(dr) = j_{dw}(dr')$$$

ゆえに $\Omega_k(w)$ の元は $\Omega_j(dw)$ の元である。 逆に dw の cube

R に対して $\gamma = \{ dw' \rightarrow dw \in R, w' \leq w \}$ は w の cube であり $dr = R$

となるから $\Omega_j(dw)$ の元は $\Omega_k(w)$ の元である。

したがって $\Omega_k(w) \cong \Omega_j(dw) \cong \text{Sub}_E(dw)$ となる。

§7 Progenitor (→ べき)

$\mathbb{E}$ は §4 (5) にある。 次のように $\mathbb{E}$ の object P を与える。

$H = \text{Sub}(P)$ とする。

(1) H は $\mathbb{E}$ の set of generators G を示す。 与えられた P は Progenitor である。

(2) 任意の generator $X \in G$ に対し、 $X \rightarrow Y$ in $\mathbb{E}$ ならば $Y \in H$ である。

このように Progenitor P は γ によって作れる。

7.1 H -covering 定義: $A \in \mathcal{E}$ に対して family of Map

$(X_i \rightarrow A)_{i \in I}$ が H -covering であるとは $X_i \in H$, $X_i \rightarrow A$ は mono, $\pi \rightarrow \bigvee_{i \in I} X_i = A$ である。

Prop 7.1. 任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して (A の H -covering は存在する。実際、 H に対して条件 (1) より $(X_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$, $X_i \in G$ の形の epimorphic family がある。epi-mono 分解によって $X_i \rightarrow X'_i \xrightarrow{f'_i} A$ を作れば仮定 (2) によって $X'_i \in H$ かつ $\bigvee_{i \in I} X'_i = A$ である。

7.2 Topology $J(A)$ A の crible の集合 $J(A)$ を次のように定める。

定義 crible $R \in J(A) \iff R$ は H -covering である。

Prop 7.2 $J(A)$ は Grothendieck Topology である。

[証明] $(\text{cov}(A) \ni \alpha \iff [\alpha] \in J(A) \times 1 \rightarrow \text{cov}(A) \text{ かつ } (\text{cov}(i) \sim (i\gamma))$ であることはよく知られている。

$\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{cov}(A) \iff I_0 \subseteq I$ と $X_i \in H$, $X_i \rightarrow A_i$ かつ $i \in I_0$ に対して存在して $(X_i \rightarrow A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I_0}$ が H -covering である。ことに注意する。条件 $\text{cov}(i)$ は max-crible が H -covering であることを意味し、Prop 7.1 によって成り立つ。

$\text{cov}(i)$ は $(X_i \rightarrow A)_{i \in I}$ が H -covering ならば $B \rightarrow A$ に対して $(X_i \times_A B \rightarrow B)_{i \in I}$ が H -covering になることは容易に示される。

条件 $\text{cov}(i\gamma)$ (monotonicity) は $\alpha \in \text{cov}(A)$, $[\alpha] \subset [\beta]$ ならば $\beta \in \text{cov}(A)$ であることを意味する。 $[\alpha]$ が H -covering

それより $\beta \in \text{Cor}(A)$ である。

$\text{Cor}(\text{iii})$ $(A \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \text{Cor}(A)$, $(A_{ij} \xrightarrow{g_j} A_i)_{j \in J_i} \in \text{Cor}(A_i)$ $i \in I$
 ならば $(A_{ij} \xrightarrow{g_j} A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cor}(A)$ である。

$(X_i \rightarrow A_i \rightarrow A)_{i \in I_0}$ が Hl-covering , $(X_{ij} \rightarrow A_{ij} \rightarrow A_i)_{j \in (J_i)_0}$ が Hl-covering である。

$$\begin{array}{ccccc} Y_{ij} & \rightarrow & B_{ij} & \rightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{ij} & \rightarrow & A_{ij} & \rightarrow & A_i \rightarrow A \end{array}$$

それより $(Y_{ij} \rightarrow B_{ij} \rightarrow X_i)_{j \in (J_i)_0}$ は X_i の Hl-covering である。

したがって $(Y_{ij} \rightarrow B_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow A_i \rightarrow A)_{i \in I_0, j \in (J_i)_0}$ は A の Hl-covering である。したがって

$(Y_{ij} \rightarrow X_{ij} \rightarrow A_{ij} \rightarrow A_i \rightarrow A)_{i \in I_0, j \in (J_i)_0}$ は A の Hl-covering である。これは $(A_{ij} \rightarrow A_i \rightarrow A)_{i \in I, j \in J_i}$ が生成する crible に属するから $(A_{ij} \rightarrow A_i \rightarrow A)_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cor}(A)$ 。

7.3 7.2 の λ は Topology に A の $\mathbb{E}$ 上の sheaf の $\mathbb{E}$ を $\tilde{\mathbb{E}}$ であるとき $\varepsilon_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}$ は equivalence である。

[証明] (3.3) の条件は λ によって満たされる。まず $\varepsilon_{\mathbb{E}}$ は left exact continuous であるから λ の geometric morphism の inverse image である。

したがって任意の small colimit を保存する。任意の $A \in \mathbb{E}$ に対して representable $\hat{A}$ は $\text{Cor}(A)$ の family に対して sheaf-property を満たす sheaf, したがって $\hat{A} \cong \alpha_{\mathbb{E}} \hat{A}$ であり $\varepsilon_{\mathbb{E}}$ は full かつ faithful, $F \in \tilde{\mathbb{E}}$ に対して $\varepsilon_{\mathbb{E}} X \Rightarrow F$ となる $X \in \mathbb{E}$ が存在する (4.1)。

Theorem H^1 is canonical topology (H^1 -covering is $\mathbb{R}$ -Topology $\times \mathbb{R}^1$)

$$\mathbb{E} \text{ is a topology on } \mathbb{R}, \text{ inclusion } u: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E} \text{ is continuous.}$$

3. a. $\tau \ni T' = u_*' \mathcal{E}_E : E \rightarrow \tilde{H}$ is $L_{\infty, w}$ -1st order logical
 τ -a.s.

(証明) $\exists \delta > 0$ such that $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ such that $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

例 3.12 任意の $R \in J(A)$ に対して $R \rightarrow A$ dense となる。

$$X \xrightarrow{\alpha} A \quad (X \in H) \quad \text{is} \quad \alpha^{-1}(R) \in J(X) \quad \text{iff} \quad X \text{ is } H\text{-covering}$$

Es ist zu zeigen, dass es zu $\alpha_X^{-1}(R) \cap \text{map}(H)$ ein H -core gibt, welches α_X enthält.

X of $H^1 = 3.172$ covering circle ± 3 . $\delta \approx 0.3$ $u^* = -u_v^*$, $1 \tau =$

$$s \mapsto \tau \text{ } \exists\text{-preserving } \tau \circ \sigma. \quad \forall\text{-preserving } \tau \text{ " } s \text{ " } \tau = u \cdot h \in \mathcal{K}$$

sublogical なものは、それ自身に十分だが、それは 6.3 の(1)

"Q is sublogically" is proved by the same way.