

2.2 の Siegel modular の Whittaker function

名古屋市立保育短大 丹羽伸二 (Shinji Niwa)

この講演では表題の Whittaker function の (explicit formula が得られるような) 構成法と、その Whittaker function の double Mellin Transform および $SL(2)$ の Whittaker function との convolution について述べている。勿論、Mellin transform や convolution を求めるのに Whittaker function の explicit formula を使うが、そのため計算は楽になっただけのものと思われる。基本的な文献は Soudry [16] で、 $\mathbb{K} = \mathbb{K}$ nonarchimedean な局所体上でこの話はほとんど済んでいるので archimedean の場合と主として取り扱う。

1. $G = Sp(2, \mathbb{K})$ 上の Whittaker function の構成法
 $\mathbb{K}$ を局所体, $\psi \in \mathbb{K}$ の additive character, $V = M_{2,2}(\mathbb{K})$, $V \times V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in V \right\}$ とする。 $f \in \mathcal{S}(V)$ に対し $Sp(2, \mathbb{K})$ の Weil 表現 ρ を

$$r\left(\begin{smallmatrix} E & X \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \psi(t_X({}^t x_1, x_2))f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right),$$

$$(1) \quad r\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{smallmatrix}\right)f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = |\det A|^2 f\left(\begin{smallmatrix} x_1 A \\ x_2 A \end{smallmatrix}\right),$$

$$r\left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \int \int_V \psi(t_{Y_1}({}^t y_1, x_2) + {}^t y_2 x_1)) \\ f\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) dy_1 dy_2$$

1. ように定義する。 $x_2 \in V$, ${}^t x = x \in V$, $A \in V$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. あり。例として

$$(2) \quad r\left(\begin{smallmatrix} a & E & 0 \\ 0 & & E \end{smallmatrix}\right)f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} a x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$$

1. ように $r \in GSp(2, \mathbb{R})$ に拡張できるが、 $GSp(2, \mathbb{R})$ の拡張は色々ある。さう

$$(3) \quad X = \begin{pmatrix} a & & & \\ b & & & \\ c & & & \\ d & & & \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ に対して } \sigma(X) = \begin{pmatrix} a & d \\ b & -c \end{pmatrix}$$

とあき、 $(g, h) \in GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ の $V \times V$ への作用を

$$(4) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(g, h)} = \left(\sigma^{-1}({}^t g \left(\sigma \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{pmatrix} \right) h \right), \sigma^{-1}({}^t g \left(\sigma \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{pmatrix} \right) h) \right)$$

2. 定義する。ただし

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$$

2"ある。 $f \in \mathcal{S}(V \times V)$, $g \in GL(2, \mathbb{R})$ に対し

$$(5) \quad \rho(g) f(x) = f(x^g)$$

に於て, $2 GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ の表現 ρ を定義する。

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと } GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$$

の中の $(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の stabilizer は

$$F = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

2", $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ に対し

$$(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))^{(u, 1)} = (\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))^{(1, u^{-1})},$$

$$(6) \quad \rho(u, 1) f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) = r \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)),$$

$$r \begin{pmatrix} E & x_1 x_2 \\ x_2 x_3 & E \\ 0 & E \end{pmatrix} f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))$$

$$= \psi(x_3) f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))$$

r なることが示されるので 2", $H = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$

上 $GL(2, \mathbb{R})$ の Whittaker function と掛けたとき得られるものは Whittaker function が得られる。 $\pi_1, \pi_2 \in GL(2, \mathbb{R})$ の admissible representation とし、 $W(\pi, \psi) \in \pi$ の Whittaker model とする。 $W_i \in W(\pi_i, \psi), g \in GSp(2, \mathbb{R})$ に対し

$$(7) \quad \widetilde{W}(g) = \int_{\substack{H \\ F^\times}} r(g) \rho(h_1, h_2) f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) \\ W_1(h_1) W_2(h_2) dh_1 dh_2$$

とすると

$$(8) \quad \widetilde{W} \left(\begin{pmatrix} 1 & x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & x_1 x_2 \\ & x_2 x_3 \\ 0 & E \end{pmatrix} g \right) = \psi(x_0 + x_3) \widetilde{W}(g)$$

が成り立つ。勿論、(8) だけを $\widetilde{W}$ が Whittaker function だとは言えず、例えば $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ の場合なら不変微分作用素の固有関数でなければならぬ。

(7) の例として $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ の場合を考えると

$$(9) \quad \widetilde{W} \left(\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_0 \\ \hline 1 & \\ \hline & -x_0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} E & x_1 x_2 \\ & x_2 x_3 \\ \hline & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & & & \\ & \sqrt{y_2} & & \\ & & \sqrt{y_1}^{-1} & \\ & & & \sqrt{y_2}^{-1} \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}} \\ = \exp(2\pi i(x_0 + x_3)) \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y_1^{-1} y_2^{-1}}{v_1 v_2} y_1 \sqrt{y_2} K_{\nu_1}(2\pi v_1) K_{\nu_2}(2\pi v_2) \\ \exp\left(-\pi\left(\frac{y_1}{v_1 v_2} + \frac{v_1 v_2}{y_2} + \left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_2}\right) y_2\right)\right) dv_1 dv_2$$

とある。 $f \in \mathcal{S}(V \times V) \times \mathbb{C}$ $f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \exp(-\pi t_2(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}))$ を取ると。 $k \in SO(4)_n Sp(2, \mathbb{R}) \mathbb{Z}''$, K_ν は modified Bessel function $\mathbb{Z}''$ である。 (9) の $\widetilde{W}$ と

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z = g \cdot z' \in E$$

$$(10) \quad \text{すなわち } W_{\nu_1, \nu_2}(z) = \widetilde{W}(g) \text{ とおくと}$$

$$\Delta_1 W_{\nu_1, \nu_2}(z) = d_1 W_{\nu_1, \nu_2}(z),$$

$$\Delta_2 W_{\nu_1, \nu_2}(z) = d_2 W_{\nu_1, \nu_2}(z),$$

$$d_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 - 2)/8,$$

$$d_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{256} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{32} + \frac{3}{64},$$

$$\lambda_1 = \nu_1^2 - \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = \nu_2^2 - \frac{1}{4}$$

が成り立つ。 Δ_1, Δ_2 は [9] の不変微分作用素 $\mathbb{Z}''$

$$\Delta_1 = \sum_{i, j=1}^3 y_i y_j \partial_i \bar{\partial}_j - d(2, \bar{\partial}_3 + \bar{\partial}_1 \partial_3 - \frac{\partial_2 \bar{\partial}_2}{2}),$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= d^2 (\partial_1 \partial_3 - \frac{\partial_2^2}{4}) (\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_3 - \frac{\bar{\partial}_2^2}{4}) \\ &\quad + \frac{\sqrt{-1}}{4} d \left(\sum_{i=1}^3 y_i \partial_i \right) (\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_3 - \frac{\bar{\partial}_2^2}{4}) \\ &\quad + \frac{\sqrt{-1}}{4} d \left(\sum_{i=1}^3 y_i \bar{\partial}_i \right) (\partial_1 \partial_3 - \frac{\partial_2^2}{4}) \\ &\quad + \frac{d}{16} \left(\partial_1 \bar{\partial}_3 + \bar{\partial}_1 \partial_3 - \frac{\partial_2 \bar{\partial}_2}{2} \right),\end{aligned}$$

$$\partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial z_{i'}} \quad , \quad \bar{\partial}_{i'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{i'}} \quad , \quad d = y_1 y_3 - y_2^2$$

である。(10) の証明は例えは次のようにすればできる。

$$\Theta(y_1, y_2) = y_1^{-1} \sqrt{y_2}^{-1} W_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & \sqrt{y_2} & \sqrt{y_1}^{-1} & \sqrt{y_2}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\Theta\left(x + \frac{1}{y_2}, y_2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_2) x^n$$

とあくと微分方程式(10)は a_n の漸化式になる。 a_0 が決まれば、 n 個の a_n が決まることから解かるが、更に(10)の2つの微分方程式の compatibility condition から a_0 は8次の常微分方程式をみたさなければならない。この常微分方程式は凄惨ながら2000行くらいの極めて長い式であるが、

$$\begin{aligned}a_0(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\pi\left(\frac{v_1 v_2}{y} + \left(\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}\right)y\right)\right) \\ &\quad K_{\nu_1}(2\pi v_1) K_{\nu_2}(2\pi v_2) \frac{dv_1}{v_1} \frac{dv_2}{v_2}\end{aligned}$$

がこの方程式をみたすことは、部分積分と K_ν の微分方程式

によつて (計算機を伴えば) 確かめることが出来る。Bump [3] のように発展方程式を用いるなど (もっと簡単に (10) が示せると思われるか) よく解からない。なお (8), (10) をみたす $\tilde{W}(g)$ は定数倍を除いて unique であることが知られているのだ (Hashizume [5], [6]), (9) はどのような関数 Whittaker function の explicit formula を与えていることになる。

2. double Mellin transform

(9) で決まる W_{ν_1, ν_2} の double Mellin transform は 2, 3 の積分公式を組み合せると次のように求まる。

定理 1.

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \int_0^\infty \int_0^\infty W_{\nu_1, \nu_2} \left(\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{-1} & y_2^{-1} \end{smallmatrix} \right) y_1^{\rho_1} y_2^{\rho_2} \frac{dy_1 dy_2}{y_1 y_2} \\
 &= -\frac{1}{64} \pi^{-(3\rho_1 + \rho_2 + 7)/2} \Gamma\left(\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\nu_1 + 3}{4}\right) \\
 &\quad \Gamma\left(\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\nu_2 + 3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\nu_1 + 3}{4}\right) \\
 &\quad \Gamma\left(\frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\nu_2 + 3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\rho_1 + 2}{2}\right) \\
 &\quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{\rho_1 + \nu_1 - \nu_2 + 2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho_1 - \nu_1 - \nu_2 + 2}{2}\right) \Gamma(\nu_2)}{\Gamma\left(\frac{3\rho_1 + \rho_2 - 2\nu_2 + 7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\nu_2 + 3}{4}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_3F_2 \left(\frac{\rho_1 + \nu_1 - \nu_2 + 2}{2}, \frac{\rho_1 - \nu_1 - \nu_2 + 2}{2}, \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\nu_2 + 3}{4}; \right. \\
& \quad \left. -\nu_2 + 1, \frac{3\rho_1 + \rho_2 - 2\nu_2 + 7}{4}; 1 \right) + \\
& \quad \frac{\Gamma\left(\frac{\rho_1 + \nu_1 + \nu_2 + 2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho_1 - \nu_1 + \nu_2 + 2}{2}\right) \Gamma(-\nu_2)}{\Gamma\left(\frac{3\rho_1 + \rho_2 + 2\nu_2 + 7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\nu_2 + 3}{4}\right)} \times \\
& \quad {}_3F_2 \left(\frac{\rho_1 + \nu_1 + \nu_2 + 2}{2}, \frac{\rho_1 - \nu_1 + \nu_2 + 2}{2}, \frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\nu_2 + 3}{4}; \right. \\
& \quad \left. \nu_2 + 1, \frac{3\rho_1 + \rho_2 + 2\nu_2 + 7}{4}; 1 \right) \}
\end{aligned}$$

$z^n {}_3F_2$ は generalized hypergeometric function

$$(12) \quad {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; a_4, a_5; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n}{n! (a_4)_n (a_5)_n} z^n$$

z^n がある。 ${}_3F_2$ は $a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + 1$ のとき Saalschütian といふ $z=1$ の値が Γ -関数の積で表わされるが、(11) に表れる ${}_3F_2$ は Saalschütian z^n はなく $z, \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_4 + 1) + a_3 = a_5$ を満たしている。 Bailey [1] に ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; a_4, a_5; 1)$ の一次関係式の完全な(?)リストがあるが、それらのどれに適用しても (11) の右辺は Γ 関数の積になることはないようである。 ${}_2F_1$ については Gauss の公式

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}$$

があることに注意する。伊吹山 A に講演のあと、一般の場合

と予想するように言われたが, $S_p(2) \approx SO(3, 2)$ なる ${}_3F_2$ が (11) に現われるのである. $SO(n+1, n)$ の Whittaker function の多重 Mellin 変換は ${}_{n+1}F_n$ で表わせるかも知れない。

3. convolution

Bump [2] は $SL(3, \mathbb{R})$ の Whittaker function と $SL(2, \mathbb{R})$ の Whittaker function の convolution が Γ 関数の積 (local L-function に一致) になることを示している。これは $S_p(2, \mathbb{R})$ の Whittaker function と $SL(2, \mathbb{R})$ の Whittaker function と同様のことを示す。Bump [2] は Barnes の second lemma を使うが, これは Whittaker function の explicit formula (9) を用いて直接 convolution の計算ができ, その帰結として (定理 1 を使う) Barnes の second lemma の類似を得るようになる。

定理 2.

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \int_0^\infty \int_0^\infty W_{\nu_1, \nu_2} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & & & \\ & \sqrt{y_2} & & \\ & & \sqrt{y_1}^{-1} & \\ & & & \sqrt{y_2}^{-1} \end{pmatrix} \right) \sqrt{y_2} K_\nu(2\pi y_2) \\
 & y_1^{\Delta-2} dy_1 y_2^{-2} dy_2 \\
 & = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi^{-\Delta} \Gamma(\Delta)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \pi^{-2A} \Gamma\left(\frac{A+\nu_1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{A-\nu_1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{A+\nu_1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{A-\nu_1-\nu}{2}\right)$$

$$\times \pi^{-2A} \Gamma\left(\frac{A+\nu_2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{A-\nu_2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{A+\nu_2-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{A-\nu_2-\nu}{2}\right)$$

(13) の右辺の第2行目, 第3行目はそれぞれある admissible representation π_1, π_2 の local L-function $L(s, \pi_1), L(s, \pi_2)$ である。(10) において $\nu_1 = \nu, \nu_2 = \nu$ とし (2) ぞれから d_1, d_2 を $W_{\nu_1, \nu}$ から得られる $W_{\nu_1, \nu}$ の $Sp(2, \mathbb{R})$ による右-translation で生成される関数空間における $Sp(2, \mathbb{R})$ の右-translation による表現が π_1 である。 $W_{\nu_2, \nu}$ から同様に構成される表現が π_2 である。 W_{ν_1, ν_2} に対応する Siegel wave form $F(\nu_1, \nu_2)$ から (10) で得られる d_1, d_2 に対し $\Delta_1 F = d_1 F, \Delta_2 F = d_2 F$ とする F) と Laplacian の固有値が $\lambda = \nu^2 - \frac{1}{4}$ である Maass wave form f の L-関数のテンソル積 (Rankin convolution) の Γ -factor は $L(s, \pi_1) L(s, \pi_2)$ であるから

定理2は

(14) "The local integral does agree with the local L-function"

という Bump の言葉で表現できる。

定理2の証明には公式

$$(15) \quad \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{2} - \frac{z^2 + w^2}{2y}\right) K_\nu\left(\frac{zw}{y}\right) \frac{dy}{y} \\ = K_\nu(z) K_\nu(w)$$

を用いる。(15)は Watson [19] に最も簡単な証明があるといえるが、 K_ν を積分表示しておき積分の順序を変え適当に変数変換をすれば (15) の右辺になる。従ってこのようなことは non-archimedean の場合も出来ると思われるが、実際次のことが成り立つ。 $k = \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, Φ は $\mathcal{O}$ の characteristic function とし $\pi \in GL(2, k)$ の admissible representation, $W(\pi, \psi)$ を π の Whittaker model とすると π が既約なら

補題 $W \in W(\pi, \psi)$ なら W が右- $GL(2, \mathcal{O})$ 不変なら

$$(16) \quad \int_k \Phi(y) \Phi\left(\frac{z}{y}\right) \Phi\left(\frac{w}{y}\right) \omega_\pi(y) W\left(\begin{smallmatrix} \frac{zw}{y^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) dy \\ = W\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) W\left(\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

が成り立つ。ここで ω_π は π の central character である。

dy は k の additive 的 Haar measure である。この証明は

$W(y)$ の積分表示を用いて簡単に出来る。この補題を用いて

non-archimedean の場合も (13), (14) に当るものを示す

ことが出来る。Soudry [16] には (16) に対応する式がある。

(16) の Φ はいわば変形 Bessel 関数に当るといえるが、Soudry

〔16〕では Bessel 関数 J_ν に当たるもので (16) の式を作っているのが難しくなっている。筆者は最近志村対応の拡張に成功したが、その中で (13) を用いるので、ここには (13) を定理として書いておくことも少しは意味があるのではなにかと思う。

REFERENCES

1. W. N. Bailey, "Generalized hypergeometric series," Cambridge, 1935.
2. D. Bump, *Barnes second lemma and its application to Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. of Math. **109** (1987), 179-186.
3. ———, *Automorphic forms on $GL(3, \mathbb{R})$* , Lect. Notes in Math. **1083** (1984).
4. ———, "The Rankin-Selberg method. In : Number theory, trace formulas and discrete groups: a symposium in honor of Atle Selberg," Academic Press, 1989.
5. M. Hashizume, *Whittaker functions on semisimple Lie group and their applications*, 数理学研究金録 61 (1987), 123-137.
6. M. Hashizume, *Whittaker functions on semisimple Lie groups*, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 259-293.
7. R. Howe and I. I. Piatetski-Shapiro, *Some examples of automorphic forms on Sp_4* , Duke Math. J. **50** (1983), 55-106.
8. S. Nakajima, *Invariant differential operators on $SO(2, q)/SO(2) \times SO(q)$ ($q \geq 3$)*, Master these, Univ. of Tokyo.
9. ———, *On invariant differential operators on bounded symmetric domains of type 4*, Proc. Japan Acad. **58**, Ser. A (1982), 235-238.
9. S. Niwa, *On generalised Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2*, Nagoya Math. J. **121** (1991), 171-184.
10. M. E. Novodvolsky, *Fonctions J pour $GSp(4)$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **280** (1975), 191-192.
11. ———, *Automorphic L -functions for symplectic group $GSp(4)$* , Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), 87-95.
12. T. Oda, *On Whittaker functions of class 1 on $Sp(2, \mathbb{R}) = Sp_4(\mathbb{R})$* , 数理学研究金録 689 (1989), 148-164.
13. I. I. Piatetski-Shapiro and D. Soudry, *L and ϵ functions for $GSp(4) \times GL(2)$* , Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81** (1984), 3924-3927.
14. ———, *Automorphic forms on the symplectic group of order four*, Lecture Notes of I.H.E.S. (1983).
15. D. Soudry, *A uniqueness theorem for representations of $GSO(6)$ and the strong multiplicity one theorem for generic representations of $GSp(4)$* , Israel J. of Math. **58** (1987), 257-287.
16. ———, *The L and γ factors for generic representations of $GSp(4, k) \times GL(2, k)$ over a local nonarchimedean field k* , Duke Math. J. **51** (1984), 355-394.
17. E. Stade, *On explicit integral formulas for $GL(n, \mathbb{R})$ -Whittaker functions*, Duke Math. J. **60** (1990), 313-362.
18. ———, *Poincaré series for $GL(3, \mathbb{R})$ -Whittaker functions*, Duke Math. J. **58** (1989), 695-729.
19. G. N. Watson, "Treatise on the theory of Bessel functions," Cambridge Univ. Press, 1944.