

フラクタルと工学

龍谷大学

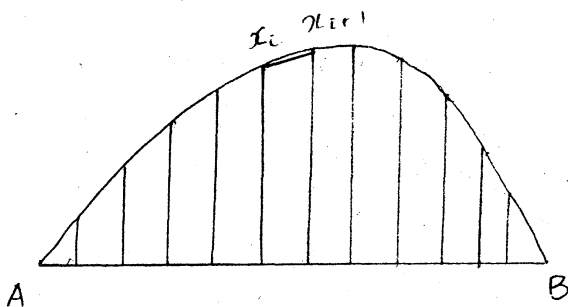
山口 昌哉

カオスとフラクタルの研究が物理と数学で云い出されて、十数年、最近では工学の各分野でその研究発表がおこなわれるようになって来た。又、情報処理学会、機械学会などでは、そのための特別のセクションまで設けられるまでになっている。ここではフラクタルに関し、工学者の間に幾分の誤解とも云うべきことが存在するので、そのことを説明しておきたい。しばしば聞くことは、「フラクタルは自然科学の一般原理から説明できない。このことがフラクタルの欠点である」とか、「自然現象は微分方程式であらわされる。したがってフラクタルは微分方程式として記述できないから自然科学ではない」とかであって、このことに関して説明をしておきたい。結論から云うと、フラクタルの方法は、ニュートンよりもはるかに古い科学的な方法であって、人間は長い間そのことを忘れていたが今や、計算機の発達によって再びそのような古い方法がよみがえり、又はるかに効果的に用いられる時代となっているのである。

1. 分析と総合のみが科学の方法か？

約50年前、寺田寅彦は、その隨筆の中で、当時の物理学で取扱へなかつた物理現象たとえば、樹木の形、ガラスの割れ目、河の流木の分岐等について、「もしもこれらの問題をかみこなすに適當な箇、すなわち「方法」が見出された時には、形勢は一変してこれらの「骨董的」な諸現象が新生命を吹きこまれて学会の中心問題として檯面台に押し出される」とも限らない……」（岩波寺田寅彦隨筆集第四卷「自然界の模様様」と云つてゐる。それから20年程たつて1958年中谷宇夫郎は岩波新書「科学の方法」では、寺田の夢みた新しい「方法」への指向は、影をひそめ、科学は矢張り分析と総合以外にはあり得ないと確言してゐるのは大変興味深いことである。

分析と総合と云へば、その典型的な例が微分法(分析)と積分法(総合)である。

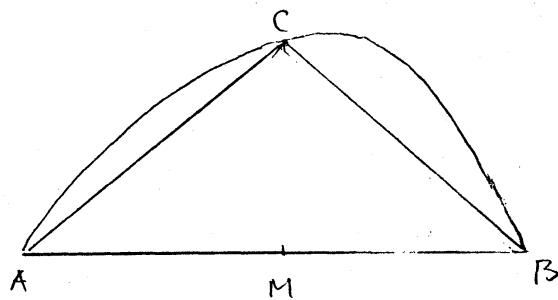


このような曲線と線分ABでかこまれた面積を求めるために分点 x_i, x_{i+1} をむすぶ曲線の弧を線分 $\overline{x_i x_{i+1}}$ でおきかえて近

似する(分析であり微分である)。そしてこのような梯形の面積の和でもって、求める面積の近似とする。(この部分が積分であり総合である。) これはニュートンのはじめた方法である。

しかし次のような面積のもとめ方、そのためには曲線の別の近似法があり、実はアルキメデスによって2200年以上前に考察されている。そのことは放物線とその弦にかこまれた部分の面積をもとめるしほり出し法(高木貞治解析概論98頁にある)面白いのは、高木貞治はこの方法は面白いが、アルキメデスの天才をもつてしてはじめて出来る方法であり、2次曲線としての放物線にのみ適用できる特殊な方法があるとして、もっと誰にでも出来る一般的な方法としてニュートンの方法を述べている。

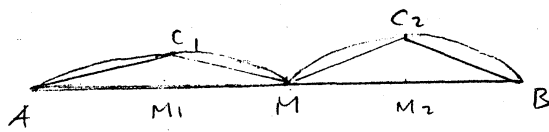
しかし、ここではこの論議を遂にして見よう、アルキメデスの方法をぐぐって述べて見よう。彼の方法は次のような近似法なのである。先と同じ曲線を近似しよう。



きわめて幼稚な近似であるが、上の曲線と三角形ACB

で近似しよう。ニュートンのように細かい部分に分けないことがこの方法の特徴であって、全体を一度に近似するのである。これこそはニュートンのような天才が考えつくような方法ではなく、幼稚園の多岐か、画家がスケッチの見当をつけるときにやる、きわめて日常的な方法である。数学的且科学的なのは、このことをどんどん繰り返すところである。

近似を進めよう。ACの上にはみ出している部分、CBの上にはみ出している部分を、この近似の誤差と考え、誤差のグラフをかけば、2つの山になり、再び元の方法が適用できる。



面積の近似として、最初の3角形とここでできた2つの3角形 AC_1M_1 , M_1C_2B の2つをつけ加える。このやり方は更にくりかえすと今度は4つの山ができて4つの3角形をつけ加えれば近似は更に正確となる。この方法はきわめて収束が早い。

このような関数の近似の方法は、今やフラクタルの研究やウェーブレットの研究について、ほとんどの場合にも用いられる方法であり、著者によつてスケッチ的近似、中点変位法、マルチレゾリューション(多重解像度の方法)と呼ばれる。

る。しかし考えを正せば、紀元前 = 世紀にアルキメデスが述べた方法にすぎない。

2. アルキメデスの方法は新しい科学の方法たり得るか？
たしかにこの方法は従来の意味での分析総合ではないことにはわかったが、新しい何をついて加えたのか？

これをわかるためには次の関数 $\varphi(x)$ を考える。

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2(1-x) & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

この関数を用いた力学系 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ は典型的カオス的な力学系である。 $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x)$, $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = \varphi^3(x)$
... とかくことにすると、アルキメデスの方法を2次元関数

$$(1) \quad x(1-x)$$

を近似するやり方として見れば、実は次の展開にほかならない。

$$(2) \quad x(1-x) = \frac{1}{4} \varphi(x) + \frac{1}{4^2} \varphi^2(x) + \dots + \frac{1}{4^n} \varphi^n(x) + \dots$$

このことは、先の例と、 $\varphi^n(x)$ の定義とグラフを考えるとすぐわかる。

とすると、級数(2)の各項の4を2でおきかえて見れば

$$\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\varphi^2(x)}{2^2} + \dots + \frac{\varphi^n(x)}{2^n} + \dots$$

という級数が得られるが、これが収束して、 $\varphi^n(x)$ は連続
 であるので一様収束して和は一つの連続関数 $T(x)$ を
 表わしている。これは実は1903年に高木貞治氏が発見し
 た。いたゞこの級数も有限にならない連続関数
 である。

$$(3) \quad T(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\varphi^2(x)}{2^2} + \dots + \frac{\varphi^n(x)}{2^n} + \dots$$

つまり、アルキメデスの方法による連続関数 $T(x)$ の近似が
 できたわけである。

3. 微分方程式に代えるもの

再び関数 $x(1-x)$ を考えよう。これは次の2階常微分
 方程式:

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -2$$

の境界条件: $y(0) = y(1) = 0$ のもとでの解である。
 $T(x)$ はどうなるのか?

そのためには(4)を2進有理数 $\frac{1}{2^n}$ の上での無限連立1次方
 程式系と書きなおす。

$$(5) \quad y\left(\frac{2^{i+1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \left\{ y\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + y\left(\frac{i}{2^n}\right) \right\} + \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

n はすべての自然数

これは (4) と同値なものがある。 $T(x)$ はいた
る x まで微分できないものを (4) の形に書けな
いとは明らかだから (5) と似た

$$(6) \quad T\left(\frac{2^{i+1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \left\{ T\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + T\left(\frac{i}{2^n}\right) \right\} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$T(0) = T(1) = 0 \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

という無限連立系をみたす。これはポアソン
方程式の一般化となる。(火田-山口 1984)

4. 一般化

多次元の場合には、シルベンスキー空間 (シルベンスキー
ガスケット) 上のラプラシアン, 同様に, ポアソン
方程式の研究として木上 淳が研究を進め
ている

J. Kigami 'A Harmonic Calculus on the Sierpinski Spaces' to
appear in JJAM Vol. 6. No. 2.