

Sarafyan の埋め込み型公式の特性について

山梨大工 田中正次 (Masatsugu Tanaka) 山下茂 (Sigeru Yamasita)

小宮右子 (Yuko Komiya) 三枝泉 (Izumi Saegusa)

1. まえがき Sarafyan, D. は, 近年連続的な近似解が得られ
る埋め込み型陽的 Runge-Kutta 法を考案した¹⁾。この公式は Runge-
Kutta 法に新機軸を出すもので, その有効利用に多くの期待
が寄せられている。この研究の目的は, 同公式の応用に役立
つと思われる基礎資料を提供することである。

2. Sarafyan の埋め込み型公式 この公式は次に示すよう
に 3 部から成り立っている。

$$(I) \text{ 関数計算部 } \left\{ \begin{array}{l} k_0 = hf(x_0, y_0) \quad k_1 = hf(x_0 + \frac{1}{6}h, y_0 + \frac{1}{6}k_0) \\ k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{4}h, y_0 + \frac{1}{16}(k_0 + 3k_1)) \\ k_4 = hf(x_0 + \frac{3}{4}h, y_0 + \frac{1}{16}(3k_0 + 9k_3)) \\ k_5 = hf(x_0 + h, y_0 + \frac{1}{7}(-4k_0 + 3k_1 + 12k_2 - 12k_3 + 8k_4)) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \text{計算能率} \\ (II) \text{ プットのための} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = k_0 \quad B = \frac{1}{30}(-89k_0 + 96k_2 + 36k_3 - 64k_4 + 21k_5) \\ C = \frac{2}{45}(71k_0 - 104k_2 - 54k_3 + 136k_4 - 49k_5) \\ D = \frac{2}{9}(-5k_0 + 8k_2 + 5k_3 - 16k_4 + 7k_5) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{の置換え} \quad & \left\{ \begin{aligned} E &= -3k_0 + 4k_2 - k_3 & F &= -(k_0 - 2k_2 + k_3) \\ G &= k_2 - k_0 & H &= k_1 - k_0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II) 数値積分部} \quad & \left\{ \begin{aligned} \tilde{y}_4(x_0+ch) &= y_0 + cA + c^2B + c^3C + c^4D & (3) \\ \tilde{y}_3(x_0+ch) &= y_0 + cA + c^2E + c^3F & (4) \\ \tilde{y}_{2,3}(x_0+ch) &= y_0 + cA + c^2G & (5) \\ \tilde{y}_{2,2}(x_0+ch) &= y_0 + cA + c^2H & (6) \\ \tilde{y}_1(x_0+ch) &= y_0 + cA & (0 < c \leq 1) \quad (7) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\tilde{y}_4(x_0+ch)$ 及び $\tilde{y}_{n,l}(x_0+ch)$ は、共に等式の右辺を計算することにより $x = x_0+ch$ に対する n 次の近似が得られることを示す。また段数の異なる同次数の公式が存在するときには、 $y_{n,l}(x_0+ch)$ のように 2 番目の添字 l をつけて段数を表し、 l 段数 n 次法であることを示す。特に $c=1$ のとき (3) は 5 次法になり、 $c=1/2$ のとき $\tilde{y}_3(x_0+\frac{1}{2}h) = \tilde{y}_4(x_0+\frac{1}{2}h)$ (8) が成立する。

3. Sarafyan の公式の打ち切り誤差 (3) ~ (7) の各公式の打ち切り誤差は、それぞれ次のように表される。

$$T_4 = \gamma_4 h^5 + O(h^6) \quad (9)$$

$$T_3 = \gamma_3 h^4 + O(h^5) \quad (10)$$

$$T_{2,3} = \gamma_2 h^3 + O(h^4) \quad (11)$$

$$T_{2,2} = \gamma_2' h^3 + O(h^4) \quad (12)$$

$$T_1 = \gamma_1 h^2 + O(h^3) \quad (13)$$

ここで $\delta_4, \delta_3, \delta_2, \delta_2', \delta_1$ は, それぞれ次のように c に依存する部分と微分方程式の右辺の関数系に依存する部分の積和として表される。

$$\begin{aligned} \delta_4 = & \frac{1}{5760} (48c^5 - 5c^4 + 8c^3 - 9c^2) D^{(4)}f + \frac{1}{4320} (36c^5 - 5c^4 + 3c^3 - 54c^2) f_1 D^{(4)}f \\ & + \frac{1}{1440} (12c^5 - 55c^4 + 61c^3 - 18c^2) f_1^2 D^{(4)}f + \frac{1}{480} (4c^5 - 50c^4 + 23c^3 + 9c^2) f_1^3 Df \\ & + \frac{1}{480} (28c^5 - 95c^4 + 94c^3 - 27c^2) f_1 Df_1 Df + (48c^5 - 125c^4 + 104c^3 - 27c^2) \cdot \\ & \left\{ \frac{1}{1440} D^{(4)}f Df_1 + \frac{1}{960} D^{(4)}f_1 Df + \frac{1}{1920} f_1^2 (Df)^2 \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{96} (4c^4 - 4c^3 + c^2) (D^{(3)}f + 3Df_1 Df + f_1 D^{(2)}f) + \frac{1}{96} (4c^4 - 8c^3 + 3c^2) \cdot f_1^2 Df \quad (15)$$

$$\delta_{2,3} = \frac{1}{48} (8c^3 - 3c^2) (D^{(2)}f + f_1 Df) \quad (16)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{24} (4c^3 - c^2) D^{(2)}f + \frac{1}{6} c^3 f_1 Df \quad (17)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} c^2 Df \quad (18)$$

4. 打ち切り誤差の大小判定 (13)~(17) の各公式の打ち切り

誤差の大小は, それぞれ $\delta_4, \delta_3, \delta_{2,3}, \delta_{2,2}$ 及び δ_1 の微分方程式の右辺の関数系に依存しない部分の自乗和

$$\begin{aligned} A_{43} = & \left\{ \frac{1}{5760} (48c^5 - 5c^4 + 8c^3 - 9c^2) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{4320} (36c^5 - 5c^4 + 3c^3 - 54c^2) \right. \\ & + \frac{1}{1440} (12c^5 - 55c^4 + 61c^3 - 18c^2) \left. \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{480} (4c^5 - 50c^4 + 23c^3 + 9c^2) \right. \\ & + \frac{1}{480} (28c^5 - 95c^4 + 94c^3 - 27c^2) \left. \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{1}{1440} \right)^2 + \left(\frac{1}{960} \right)^2 + \left(\frac{1}{1920} \right)^2 \right\} \cdot \\ & (48c^5 - 125c^4 + 104c^3 - 27c^2)^2 \quad (19) \end{aligned}$$

$$A_{33} = \frac{11}{(96)^2} (4c^4 - 4c^3 + c^2)^2 + \left(\frac{1}{96} \right)^2 (4c^4 - 8c^3 + 3c^2)^2 \quad (20)$$

$$A_{23} = \frac{2}{(48)^2} (8c^3 - 3c^2)^2 \quad (21)$$

$$A_{23}' = \left(\frac{1}{24}\right)^2 (4c^3 - c^2)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \quad (22)$$

$$A_{13} = \left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 \quad (23)$$

を用いて判定する。(19)~(23)をそれぞれ(3)~(7)の各公式の打ち切り精度判定基準という。

5. Sarafyan の公式の安定性とその評価

テスト方程式 $y' = \lambda y$ (λ は複素定数) (24) に公式(3)~(7)を適用すると、漸化式

$$\begin{aligned} \tilde{y}_4(x_n + ch) = & \left\{ 1 + ch\lambda + \frac{1}{2}c^2h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}c^3h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}c^4h^4\lambda^4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{480}(-9c^2 + 23c^3 - 10c^4)h^5\lambda^5 + \frac{1}{640}(9c^2 - 28c^3 + 20c^4)h^6\lambda^6 \right\} y_n \quad (24) \end{aligned}$$

$$\tilde{y}_3(x_n + ch) = \left\{ 1 + ch\lambda + \frac{1}{2}c^2h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}c^3h^3\lambda^3 + \frac{1}{96}(8c^3 - 3c^2)h^4\lambda^4 \right\} y_n \quad (25)$$

$$\tilde{y}_{2,3}(x_n + ch) = \left(1 + ch\lambda + \frac{1}{2}c^2h^2\lambda^2 + \frac{1}{16}c^3h^3\lambda^3 \right) y_n \quad (26)$$

$$\tilde{y}_{2,2}(x_n + ch) = \left(1 + ch\lambda + \frac{1}{2}c^2h^2\lambda^2 \right) y_n \quad (27)$$

$$\tilde{y}_1(x_n + ch) = (1 + ch\lambda) y_n \quad (28)$$

が得られる。

(24)~(28)の右辺において、 y_n にかけられている $h\lambda$ の多項式を、公式(3)~(7)の安定多項式と呼ぼう。安定多項式の絶対値が1以下であるような複素平面上の $h\lambda$ の集合、及び原点を含む単連結な閉部分集合を、それぞれその公式の絶対安定領域及び有効絶対安定領域(それを Se と表そう)という。また Se と実軸との交りを絶対安定区間という。ここでは公式の安定性の優劣は、有効絶対安定領域の面積 $A(Se)$ や絶対安定区間の長さ l

よって評価される。

6. Sarafyan の公式の特性 Fig. 1 ~ Fig. 5 は, (3) ~ (7) の各公式について, C を横軸にとり, 打ち切り精度判定基準の常用対数と有効絶対安定領域の面積を縦軸にとり, C の変動についてこれらの特性値がどのように変動するかを図示したものである。この特性図が Sarafyan の公式の使用に当って基礎資料として役立つことを期待する。

謝辞 Sarafyan の論文をご紹介下さった一松先生, この資料の内容についていろいろとご助言を賜った一松先生はじめ研究委員の皆様にお礼申し上げます。

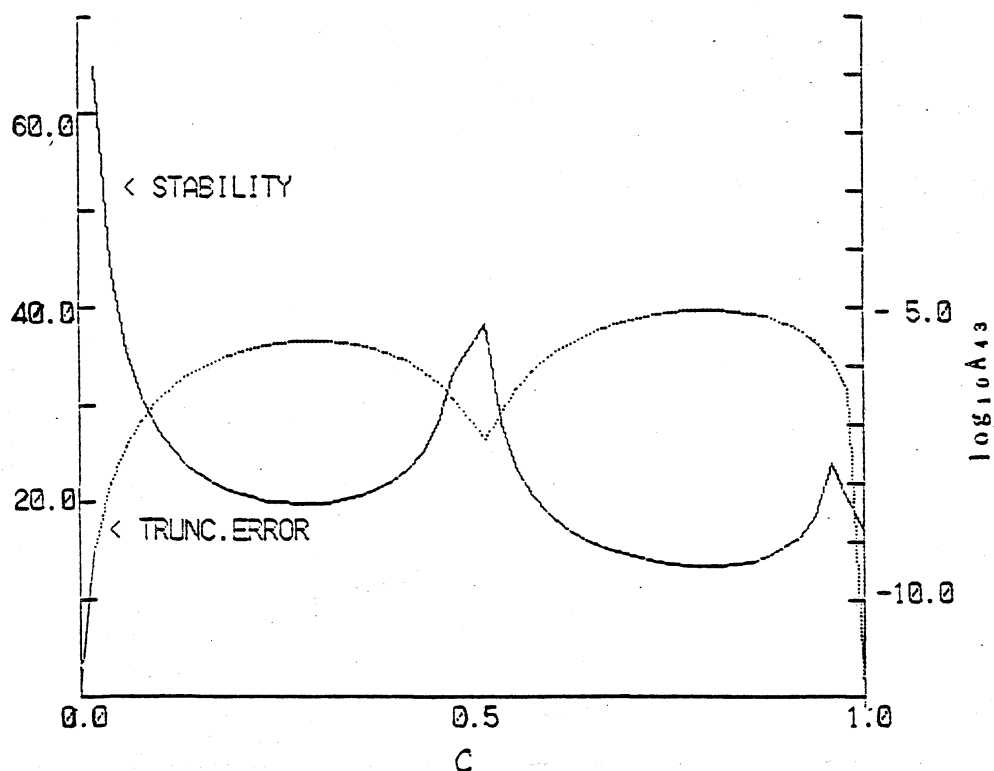


Fig. 1 公式(3)(6段数4次法)の特性

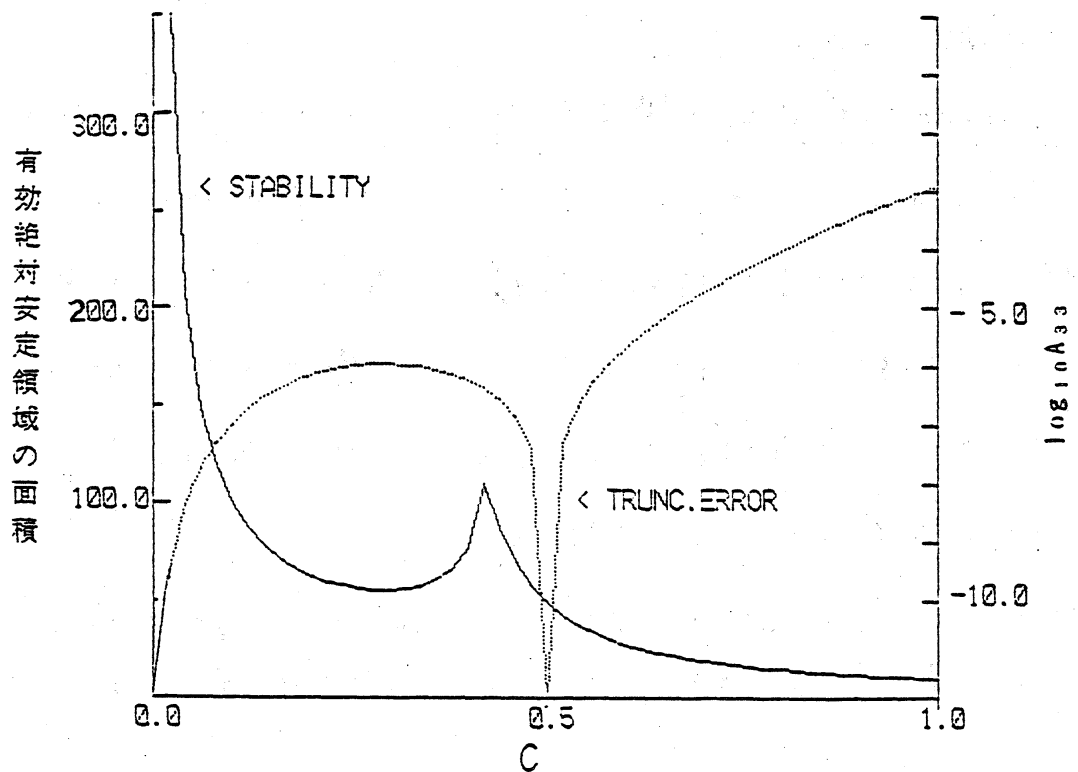


Fig.2 公式(4)(4段数3次法)の特性

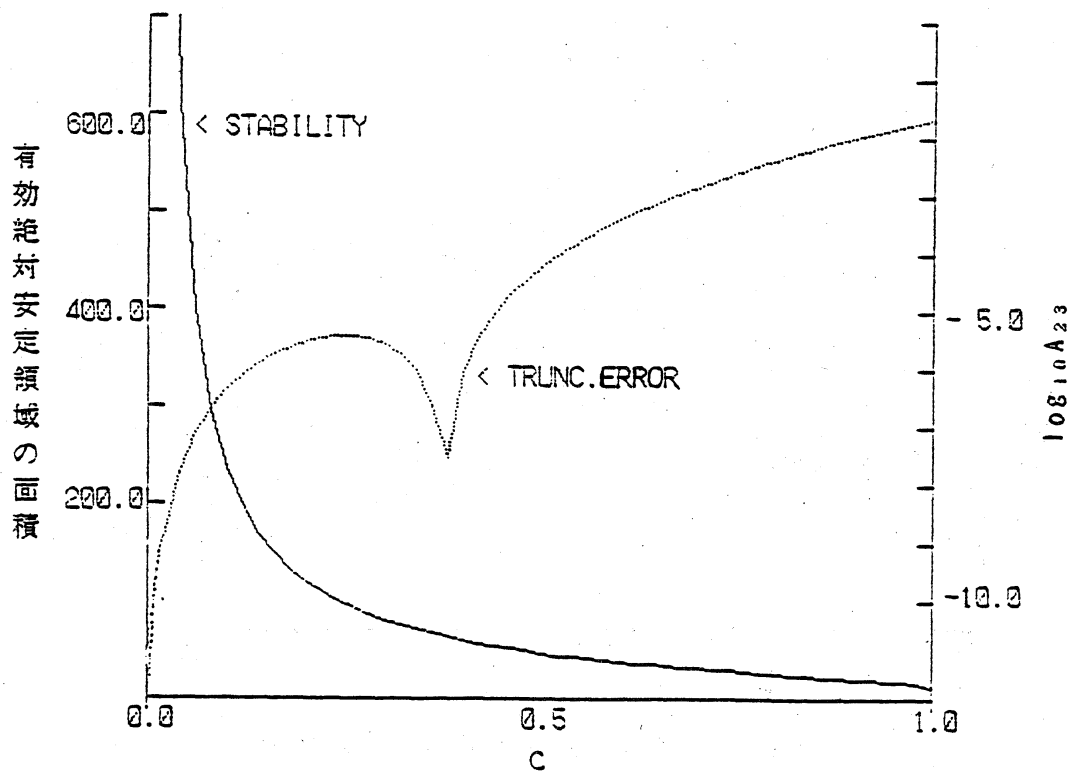


Fig.3 公式(5)(3段数2次法)の特性

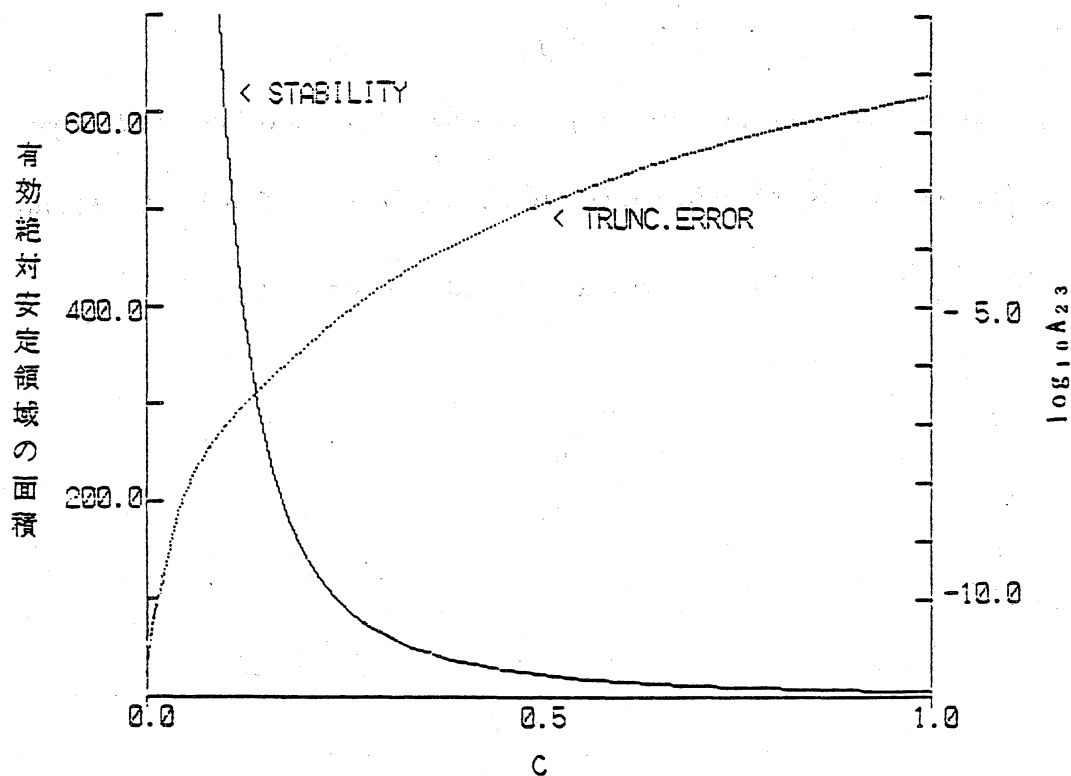


Fig.4 公式(6)(2段数2次法)の特性

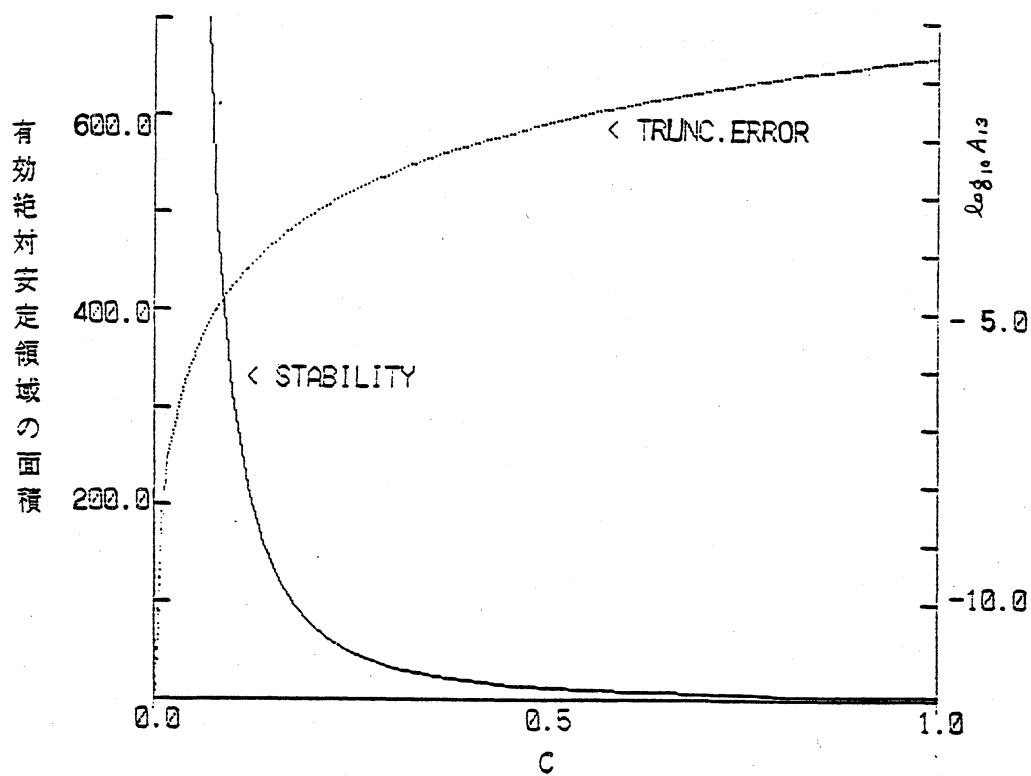


Fig.5 公式(7)(1段数1次法)の特性

[文献]

Sarafyan, D., continuous approximate solution of ordinary differential equations and their systems, Comp. & Maths. with Appls., Vol. 10, No. 2, pp. 139 ~ 159 (1984)