

非可換特異点解消理論と McKay 対応の諸相

—存在と非存在を中心に—

原 和平（東京大学カブリ IPMU）

本稿は 2025 年の城崎代数幾何学シンポジウムの報告集の原稿として書き下ろしたものである。主な目的は Wemyss との共同研究 [HW] の紹介であるが、背景や関連研究もまとめ、2025 年度時点での文献ガイドとしても役立つようにした。このうち、「主張」として引用する結果は、紙数の都合上、簡略化した形で述べている。特に、定義してない用語を多く用いたり、厳密性を欠いた書き方をしている。読む際にはご注意ください、必要に応じて参照している別文献を確認していただきたい。

英語で書かれた非可換クレパント解消の解説記事としては、創始者である Van den Bergh による ICM2022 のプロシーディングス [VdB23] や、Leuschke による解説記事 [Leu12]、Wemyss によるレクチャーノート [Wem16] があるので、興味のある方はこれらも参照していただきたい。

目次

1	背景	2
1.1	クレパント解消	2
1.2	萌芽期の McKay 対応	2
1.3	特異コホモロジーと 3 次元での McKay 対応	3
1.4	3 次元におけるクレパント解消の存在問題	4
1.5	Bridgeland–King–Reid の登場と連接層の導来圏による McKay 対応	4
2	Van den Bergh の非可換クレパント解消 – 有限商特異点の外側へ	6
2.1	非可換クレパント解消と McKay 対応	6
2.2	NCCR と導来圏	7
2.3	NCCR の存在	9
3	主結果 – 導来 McKay 対応に対する位相的障害	11
3.1	傾斜対象の存在に対する位相的障害定理と NCCR の非存在定理	11
3.2	位相障害定理の応用例	12
3.3	位相障害定理の証明の方針と導来代数幾何	14
3.4	他の非存在定理	16
4	その他の話題	17
4.1	特異点の非可換 $\mathbb{Q}$ -分解末端化	17
4.2	Craw–Ishii 型問題	19
4.3	さらなる話題	19

1 背景

本稿の主題である非可換特異点解消理論は、特にクレパント特異点解消が現れる文脈で、McKay 対応の概念を一般化する枠組みとして導入された。

この節では、McKay 対応の歴史と、それがどのようなものであるかについて、軽くおさらいする。McKay 対応とは 2 次元特異点に対する John McKay の観察に端を発する、特異点の幾何学と表現論を結びつけるような一連の理論を総称したものである。McKay 対応においては、Gorenstein 特異点の「クレパント解消」という非常に良い特異点解消のクラスが重要視される。

用語に関する注意

本稿で「代数多様体」または単に「多様体」として言及するのは、特別な断りがない限り、複素数 $\mathbb{C}$ 体上有限型な分離整スキームのことである。本稿では、対応する解析空間を考えるために、主に複素数体 $\mathbb{C}$ 上で議論するが、定理の主張に特異コホモロジーが出てこない限りは、標数 0 の任意の代数的閉体 $\mathbb{k}$ に置き換えてよい。スキームや環は全て **Noether** であると仮定し、今後この点には言及しない。

1.1 クレパント解消

クレパント性の定義を復習することから始める。

定義 1.1. Gorenstein かつ正規な代数多様体間の射影射 $f: X \rightarrow Y$ がクレパントであるとは、標準因子 K_X, K_Y に対して $f^*K_Y \sim K_X$ が成り立つことである X が非特異で f が双有理射であるとき、 $f: X \rightarrow Y$ をクレパント解消という。

クレパントという単語は Reid が「標準因子の discrepancy (食い違い) が存在しない」という状況を表すために用意した造語らしい。標準因子の大きさに注目する極小モデル理論の見地からも、クレパント解消は理想的な特異点解消である。実際、特異点の $\mathbb{Q}$ 分解的末端化 ($\mathbb{Q}$ -factorial terminalization) を特異点の極小モデルと呼ぶことにすれば、クレパント解消は非特異な極小モデルのことである^{*1}。このことから分かる通り、一般にはクレパント特異点解消は存在するとは限らない。

注意 1.2. (1) 射 f が射影的ではなく固有である場合を考えることもある。本稿では、基本的に射影的なもののみを考える。

(2) Y が完備局所環のスペクトラムである場合など、 X や Y が代数多様体 (体上有限型) とは限らない場合には、標準因子の定義に関して気をつける必要がある。一般に、 $Y = \text{Spec } R$ かつ R が双対化複体を持つ Gorenstein 環である場合には、 $\mathcal{O}_Y$ が双対化複体のひとつを与える。この場合、条件 $f^!\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_X$ をもってクレパント性の定義とする。Gorenstein 局所環は、定義により必ず双対化複体を持つ。以下、Gorenstein と言う際には、双対化複体の存在も仮定することにする。

1.2 萌芽期の McKay 対応

有限部分群 $G \subset \text{SL}(n, \mathbb{C})$ を考える。定義から、群 G は n 次元アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ に作用するので、その商 $\mathbb{C}^n/G$ を考えることができる。特に $n = 2$ の場合、原点に対応する特異点 $o \in \mathbb{C}^2/G$ は du Val

^{*1} ここでは terminal に「末端」という日本語を当てています。端末と訳される場合も多いですが、ここでは [川 14] や [戸 16] に倣うことにしました。

特異点と呼ばれ^{*2}，最小特異点解消 $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2/G$ がクレパント特異点解消になっている．例外集合 $f^{-1}(o)_{\text{red}}$ は (-2) -曲線の tree になっていて，双対グラフを描くと ADE 型の Dynkin 図形が現れる．例外集合の既約成分，すなわち上記 Dynkin 図形の頂点は，有限群 G の非自明な既約表現と 1 対 1 に対応する．例外集合の既約成分は X の Picard 群の $\mathbb{Z}$ 基底を与える．以上の事実から特に以下が成り立つ

定理 1.3. 有限部分群 $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ と，商特異点の最小特異点解消 $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2/G$ に対して，2 つの数が一致する．

- (1) 特異点解消 X の Euler 数 $e(X) = \dim H^0(X; \mathbb{C}) + \dim H^2(X; \mathbb{C})$ (= 例外曲線の数 + 1)
- (2) 有限群 G の既約表現の数 (= G の共役類の数)

このように，商特異点を構成するために使われた有限群 G の情報と，クレパント特異点解消 $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2/G$ の情報が結びつく．次元 n が 2 より大きくなると，Dynkin 図形との関係は失われるが，商 $\mathbb{C}^n/G$ がクレパント解消 X をもつならば， X の幾何的な情報は有限群 G の情報と結びつくこと期待される．このような有限群 G と商特異点 $\mathbb{C}^n/G$ のクレパント解消の間の関係を **McKay 対応** と呼ぶ．上記の Euler 数と既約表現の数の一致という形での McKay 対応は，Reid によって一般の n に対しても予想され，Batyrev によって解決された．

定理 1.4 ([Bat99]). 有限部分群 $G \subset \text{SL}(n, \mathbb{C})$ に対し，商 $\mathbb{C}^n/G$ がクレパント解消 $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ を持つと仮定する．このとき $e(X) = e(f^{-1}(o)) = \{G \text{ の既約表現の同型類の個数} \}$ が成り立つ．

1.3 特異コホモロジーと 3 次元での McKay 対応

(この節と次節の内容に関しては，[Ito20] も参照せよ．) 上記の Batyrev の定理 1.4 は 90 年代後半の結果であるが，それ以前の 90 年代前半から，伊藤由佳理と Miles Reid を中心として 3 次元の場合の McKay 対応の研究が行われていた．伊藤や Reid をはじめとする研究者たちは，主に以下の二つの視点から 3 次元 McKay 対応を研究した．

- (A) 特異コホモロジーの各次数まで見る，McKay 対応の主張の拡張と精密化．
- (B) 3 次元における商 $\mathbb{C}^3/G$ のクレパント解消の存在．

2 次元の場合には，現れるコホモロジーは， H^0 と H^2 のみである．しかし，3 次元以上では， H^4 など，より多くの次数が現れる．よって，単に Euler 数を見るのではなく，各 Betti 数が群の情報とどのように結びつくか考えることは，自然な問いである．また，Batyrev の定理のように，McKay 対応の主張には「クレパント解消が存在するならば」という条件が付く．よって，商 $\mathbb{C}^n/G$ がいつクレパント解消を持つかを調べることは自然な問題である．

まず問題 (A) に関しては，以下の有名な研究がある．

主張 1.5 ([IR96]). 有限部分群 $G \subset \text{SL}(n, \mathbb{C})$ に対して， $\Gamma = G(-1)$ を Tate twist とする．また， $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ を極小モデルとする^{*3}．このとき，age 次数分解 $\Gamma = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \Gamma_i$ が存在し，以下が成り立つ．

- (i) 集合 Γ_1/G と自然に対応する $H^2(X, \mathbb{Q})$ の基底がある．

^{*2} Klein 特異点，2 次元単純特異点，有理二重点 (RDP) など，他にも同値なクラス・呼び方がある．

^{*3} [IR96] では，極小モデルの存在は仮定になっているが，現在では [BCHM10] により，一般的に極小モデルの存在が分かっている．例えば [川 14, 系 3.6.10] を見よ

- (ii) $n = 3$ ならば, 集合 Γ_2/G と自然に対応する $H^4(X, \mathbb{Q})$ の基底がある. (すぐ後に見るように, このとき X はクレパント解消である.)

伊藤–Reid によるこの結果を, 整係数コホモロジーに拡張するという問題がある. これに関しては, [Rei96, Cra05, NdC23] などの研究があるが, 一般の場合は現在も未解決である.

1.4 3次元におけるクレパント解消の存在問題

問題 (B) に関しては, 最終的に伊藤, Roan, Markushevich の結果を合わせる形で, 有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の分類に沿って網羅的にクレパント解消が構成され, 以下の定理が証明された (例えば [Ito96] を見よ).

定理 1.6. 任意の有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ に対して, 商 $\mathbb{C}^3/G$ はクレパント解消を持つ.

一方「如何に有限部分群 G の分類に依存せずに, クレパント解消の統一的な構成を与えるか?」という問題は残っていた. 伊藤と中村は G -cluster という $\mathbb{C}^n$ 内のスキーム論的な G -軌道をパラメータ付けるモジュライ空間, すなわち G -Hilbert スキームを導入し, 以下に続く定理を証明した.

定義 1.7 ([IN96]^{*4}). 有限部分群 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ に対して, $|G|$ 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^{|G|}(\mathbb{C}^n)$ の部分スキームを

$$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n) := \left\{ [Z] \in \mathrm{Hilb}^{|G|}(\mathbb{C}^n) \mid \begin{array}{l} Z \subset \mathbb{C}^n \text{ は } G \text{ 不変部分スキーム} \\ \text{かつ } G\text{-表現として } H^0(\mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{C}[G] \end{array} \right\}$$

で定義する. この $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ を **G -Hilbert スキーム** と呼ぶ. 定義から, Hilbert–Chow 射 $f: G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ が定まる.

- 滑らかな点のなす軌道の引き戻し $f^{-1}((\mathbb{C}^n/G)_{\mathrm{sm}})$ の閉包として得られる既約成分 $Y \subset G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ を指して, G -Hilbert スキームの**主成分**と呼ぶ.
- Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^{|G|}(\mathbb{C}^n)$ の普遍族を, $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ (または主成分 Y) への制限したものを, $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ (または主成分 Y) 上の普遍族と呼ぶ.

定理 1.8. 有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ に対し, G -Hilbert スキームの主成分 $Y \subset G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ を考える. 以下の場合, Hilbert–Chow 射の制限 $Y \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ はクレパント特異点解消である.

- (1) $n = 2$ のとき [IN96, IN99, 中 01].
- (2) $n = 3$ かつ G が Abel 群のとき [Nak01].

注意 1.9. 定義 1.7 では, 精密モジュライ^{*5}である Hilbert スキームの部分スキームとして G -Hilbert スキームを定義した. しかし, G -Hilbert スキーム自体を精密モジュライとして構成することもできる. [Blu11] を見よ.

1.5 Bridgeland–King–Reid の登場と接続層の導来圏による McKay 対応

ここで有名な Bridgeland–King–Reid の仕事が登場する. 彼らのアイディアは, 主成分 Y がクレパント解消を与えることの証明に**連結層の導来圏**を用いるというものである. この手法によって, [IN96]

^{*4} ここでの定式化に至る過程を含めては, [IN99] や [Nak01] を参照せよ.

^{*5} fine moduli のこと. 訳は [向 08] に倣った.

と [Nak01] の上記結果を, 3 次元の任意の有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ を含む形に拡張した.

定理 1.10 ([BKR01]). 有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ を考える. $n = 2, 3$ のとき, G -Hilbert スキームの主成分 Y と Hilbert-Chow 射の制限 $f: Y \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ はクレパント解消を与える. さらに, 導来圏の同値

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{coh} Y) \simeq \mathrm{D}^b(\mathrm{coh}[\mathbb{C}^n/G])$$

が存在する.

ここで, $[\mathbb{C}^n/G]$ は商スタックである. 上記定理の主張の中で, 導来圏に関する部分は少し唐突で, 内容的にも浮いて見えるかもしれない. しかし, 導来圏を考えることこそが証明の鍵であり, 射 $f: Y \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ がクレパント解消になることは, 導来圏の同値と「同時に」証明されるのである.

圏 $\mathrm{coh}[\mathbb{C}^n/G]$ の対象は, $\mathbb{C}^n$ 上の G 同変層と同一視できる. 特に $[Z] \in G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^n)$ に対する $\mathcal{O}_Z$ はこの圏の対象である. つまり, クレパント解消 Y は, 「圏 $\mathrm{coh}[\mathbb{C}^n/G]$ の対象のモジュライ空間」として得られたことになる.

同様のアイデア (すなわち, 幾何的状況に付随して現れる特殊な Abel 圏の対象のモジュライ空間として, 良い特異点解消を構成する手法) は, Bridgeland によって, 3 次元フロップにも適用された. この研究は [BKR01] とほぼ同時期に発表されている.

主張 1.11 ([Bri02, Che02]). 3 次元のフロップ収縮 $f: X \rightarrow Z$ を考える^{*6}. 以下が成り立つ.

- (1) 導来圏 $\mathrm{D}^b(\mathrm{coh} X)$ の中に偏屈核と呼ばれる Abel 圏 $\mathrm{Per}(X/Z) \subset \mathrm{D}^b(\mathrm{coh} X)$ が存在する.
- (2) 圏 $\mathrm{Per}(X/Z)$ の対象のモジュライ空間 X' として, 収縮 f のフロップ $f': X' \rightarrow Z$ が得られる.
- (3) 導来圏の同値 $\mathrm{D}^b(\mathrm{coh} X) \simeq \mathrm{D}^b(\mathrm{coh} X')$ が存在する.

有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ に対する商 $\mathbb{C}^3/G$ のクレパント解消の存在と同様, 3 次元フロップの存在は知られていた. しかし, [BKR01] と [Bri02] による, 導来圏とモジュライ理論を用いてクレパント解消やフロップを構成するアイデアは, 導来圏の理論が幾何学に応用された例として, 大きな注目を集めた.

ここで, フロップ収縮 $f: X \rightarrow Z$ は, 双有理なクレパント射であることに注意されたい. 特に, X が滑らかならば, フロップ収縮 $f: X \rightarrow Z$ やフロップ $f': X' \rightarrow Z$ は, 多様体 Z のクレパント解消でもある. クレパント解消と導来圏の興味深い関係については, 次のような定義と予想が知られるようになった.

定義 1.12. 2 つの滑らかな代数多様体 X_+ と X_- が **K-同値 (K-equivalent)** であるとは, ある滑らかな代数多様体 W と射影的雙有理射 $f_+: W \rightarrow X_+$, $f_-: W \rightarrow X_-$ が存在して, 線型同値 $f_+^* K_{X_+} \sim f_-^* K_{X_-}$ が成り立つことである.

予想 1.13 (DK 予想, [Kaw02a], [Huy06, Conjecture 6.24]). 2 つの滑らかな代数多様体 X_+ と X_- が K-同値であるとき, 導来圏の同値 $\mathrm{D}^b(\mathrm{coh} X_+) \simeq \mathrm{D}^b(\mathrm{coh} X_-)$ が存在する.

特に, この予想は以下の二つの予想を含む.

- (a) Gorenstein 正規多様体 Z がクレパント解消を持つとする. このとき, Z の全てのクレパント解消は, 互いに同値な導来圏を持つだろう.

^{*6} [Bri02] では X が非特異な場合を考えているが, のちに X が Gorenstein 末端特異点のみを持つ場合に拡張された [Che02].

- (b) (Bondal-Orlov 予想 [BO95]) 二つの滑らかな代数多様体 X_+ , X_- の間にフロップ $X_+ \dashrightarrow X_-$ が存在するとき、導来圏の同値 $D^b(\text{coh } X_+) \simeq D^b(\text{coh } X_-)$ が存在するだろう。

注意 1.14. (1) 主張 1.11 は、3 次元の場合に予想 1.13 (b) が成り立つことを示している。

- (2) 異なる二つのクレパント解消は、フロップの列で繋がる [Kaw08]。よって、3 次元においては、主張 1.11 が予想 1.13 (a) を導く。4 次元以上では、予想 1.13 は広く未解決である。

4 次元以上では、滑らかな多様体のフロップが特異点をもつことがあることにも注意せよ。実は、滑らかな多様体と特異点を持つ多様体の導来圏は、互いに同値になることはできない。そのため、高次元における予想 1.13 (a) と (b) の関係は微妙である (cf. [Kaw02b, Kuz08])。

定理 1.10, 主張 1.11, そして予想 1.13 (a) に触発された結果、導来圏を用いた研究が、McKay 対応の中心となり、発展していくことになる。中でも Van den Bergh は、上記の二つの研究 [BKR01, Bri02] が、非可換環の理論を通して見ることで統一的に理解できることに気がついた。これをきっかけに、非可換特異点解消の理論が登場し、McKay 対応の考え方は有限商とは限らない特異点に拡張していく。

2 Van den Bergh の非可換クレパント解消 – 有限商特異点の外側へ

本節では Van den Bergh による非可換クレパント解消の理論を概説する。本稿では、非可換という言葉に「可換とは限らない」という意味で用いる。

2.1 非可換クレパント解消と McKay 対応

定義 2.1 ([VdB04a]). 正規 Gorenstein 整域 R を考える。環 R の非可換クレパント解消 (**noncommutative crepant resolution**) とは、以下の三条件を満たす非可換 R -代数 A のことである。

- (a) ある反射的有限生成 R -加群 $M \in \text{ref}(R)$ に対して、 R 代数の同型 $A \simeq \text{End}_R(M)$ が存在する。
- (b) 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して、等号 $\text{gl.dim } A_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}}$ が成り立つ。ここで $\text{gl.dim } A_{\mathfrak{p}}$ は有限生成右 $A_{\mathfrak{p}}$ -加群の圏 $\text{mod } A_{\mathfrak{p}}$ の大域次元を表す。
- (c) 非可換環 A は R -加群として極大 Cohen–Macaulay である。

(a) のような反射加群 M を、環 R の非可換クレパント解消 A を与える加群と呼ぶ。

非可換クレパント解消は、通常略して NCCR と呼ばれる。

- 注意 2.2.** (1) おおまかに述べれば、NCCR の定義において、条件 (a) が「射」の射影性と双有理性に、条件 (b) が非特異性に、条件 (c) がクレパント性に対応している。これにより、NCCR はクレパント解消の非可換環類似であると考えられる。詳しくは [VdB04a, Section 4] を見よ。
- (2) 環 R が有限 Krull 次元かつ、任意の極大イデアルが同じ高さを持つ（つまり環 R が等余次元）ならば、NCCR の定義の条件 (b) は単に

$$\text{gl.dim } A < \infty$$

という条件に置き換えることができる [IW14a]。ちなみに、等余次元性を満たさない正規 Gorenstein 整域 R の具体例を扱う NCCR の研究は、まだ見たことがない（少なくとも代数多様体研究の文脈からは大きく逸脱している）。

- (3) NCCR は非可換 Calabi–Yau 代数の例であり、環の表現論の文脈でも盛んに研究されている。NCCR の定義は、環 R が Cohen–Macaulay 整域の場合に拡張することができるが、代数幾何学

の文脈では、環 R が Gorenstein 整域である状況が興味を中心にしやすい。

例 2.3. (1) 群 G が $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の有限部分群 (または reflection を含まないような $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の有限部分群) であるとき, Auslander の定理によって同型

$$S \sharp G \simeq \mathrm{End}_{S^G}(S)$$

が成り立つ。ここで、 $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ は多項式環、 $S \sharp G$ は斜群環 (skew group ring)、 $S^G \subset S$ は不変式環である。さらに、自然な Abel 圏の同値 $\mathrm{coh}[C^n/G] \simeq \mathrm{mod} S \sharp G$ が存在し、特に $\mathrm{mod} S \sharp G$ は有限大域次元を持つ。加えて、 $\mathrm{End}_{S^G}(S)$ は S^G 加群として極大 Cohen–Macaulay である。よって、多項式環 S は S^G の NCCR $S \sharp G$ を与える。

(2) Van den Bergh は、主張 1.11 (1) に現れる Abel 圏 $\mathrm{Per}(X/Z)$ に対して、 $Z = \mathrm{Spec} R$ ならば R のある NCCR A が存在して、Abel 圏の同値 $\mathrm{Per}(X/Z) \simeq \mathrm{mod} A$ が成り立つことを示した [VdB04b]。

例えば、 $R := \mathbb{C}[x, y, z, w]/(xy - zw)$ とし、 $M := (x, z) \subset R$ とする。このとき、 $R \oplus M$ は NCCR $A = \mathrm{End}_R(R \oplus M)$ を与える。

(3) 正規 Gorenstein 整域 R が正則であるならば、 R 自身が R の NCCR $R = \mathrm{End}_R(R)$ を与える。

NCCR が存在すれば、定理 1.10 や主張 1.11 と類似した結果を示すことができる：

主張 2.4. 3 次元の正規 Gorenstein $\mathbb{C}$ -整域 R を考える。反射的 R -加群 M が NCCR $A = \mathrm{End}_R(M)$ を与え、 $M = \bigoplus_{i=0}^n M_i$ を直既約分解、 $d = (\mathrm{rank}_R M_i)_{i=0}^n$ をこれから定まる階数ベクトルとする。一般的な安定性条件 $\theta \in \mathbb{Z}^{n+1}$ で $\theta(d) = 0$ であるものに対して、 $\mathcal{M}_{\theta, d}(A)$ を次元ベクトルが d の θ -安定右 A 加群の精密モジュライ空間とする。このとき、既約成分 $Y \subset \mathcal{M}_{\theta, d}(A)$ が一意に存在して、以下のことが成り立つ。

- (1) 自然な射 $Y \rightarrow \mathrm{Spec} R$ はクレパント解消を与える。
- (2) 導来圏の同値 $D^b(\mathrm{coh} Y) \simeq D^b(\mathrm{mod} A)$ が成り立つ。

特に、3 次元 Gorenstein $\mathbb{C}$ -整域に対しては、NCCR が存在するならクレパント解消も存在する。

注意 2.5. (1) 厳密には、主張 2.4 においては、森田同値類の中で A と M を適切に取り替えることにより、次元ベクトル d が原始的であると仮定する必要がある。

(2) 例 2.3 の NCCR に対して主張 2.4 を適用すると、定理 1.10 と主張 1.11 がそれぞれ得られる。

標数 0 では、Grauert–Riemenschneider 消滅定理により、クレパント解消を持つ Gorenstein 特異点は標準特異点である。同様の定理は NCCR に対しても成り立つ。

定理 2.6 ([SVdB08]). 有限型な正規 Gorenstein $\mathbb{C}$ -整域 R が NCCR を持つとする。このとき、多様体 $\mathrm{Spec} R$ は標準特異点のみを持つ。

2.2 NCCR と導来圏

NCCR に対しては、予想 1.13 (a) を一般化した以下の予想があり、NCCR の研究における中心問題の一つになっている。

予想 2.7 ([VdB04a]). 正規かつ Gorenstein な $\mathbb{C}$ -整域 R に関して、 $\mathrm{Spec} R$ の全てのクレパント解消、ならびに R の全ての NCCR は、(存在すれば) 互いに同値な導来圏を持つ。

以下の定理は、予想 2.7 と直接的な関係はないものの、注意 2.2 (1) と主張 2.4 と合わせて、NCCR という概念のさらなる正当化を与える。

定理 2.8 ([IW14b]). 射 $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R$ を d 次元 Gorenstein 多様体の間の射影双有理射とし、ある非可換代数 A に対して導来圏の同値

$$D^b(\operatorname{coh} X) \simeq D^b(\operatorname{mod} A)$$

が成り立つと仮定する。このとき、射 f がクレパント解消であるための必要十分条件は、非可換代数 A が R の NCCR であることである。

特に、NCCR はクレパント解消と導来同値になることができる、唯一の非可換環のクラスである。

予想 2.7 に関しては、まず 2 次元の場合に、定理 2.6 およびいくつかの文献を合わせることで、次のことが分かる。

命題 2.9 (cf. [VdB04b, IW13]). 2 次元の正規 Gorenstein 有限型 $\mathbb{C}$ -整域 R に対して、以下の三つの条件は同値である。

- (1) 多様体 $\operatorname{Spec} R$ は有理特異点（すなわち du Val 特異点）のみを持つ。
- (2) 多様体 $\operatorname{Spec} R$ はクレパント特異点解消を持つ。
- (3) 環 R は NCCR を持つ。

さらに、上記の状況下で以下のことが成り立つ。

- (i) 多様体 $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消は同型の差を除いて一意である。
- (ii) 環 R の NCCR は森田同値の差を除いて一意である。
- (iii) 多様体 $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消と、環 R の NCCR は、互いに導来同値である。つまり予想 2.7 が成り立つ。

注意 2.10. 有限型という条件や、標数 0 の体を含んでいるという条件を外したい場合には、環 R に課すべき条件（準優秀性、等余次元性など）や、有理特異点の定義の仕方について注意深くなる必要がある。正標数の剰余体を持つ場合を考えたいときは、例えば [Lip69, Theorem (17.4)] と [IW14a, Lemma 2.5 (4), Lemma 2.16] が使える。

3 次元では、2 次元における命題 2.9 (ii) のような一意性は成り立たない。しかし、主張 2.4 および注意 1.14 (2) によって、以下のことが分かる。

定理 2.11. 3 次元の正規かつ Gorenstein な有限型 $\mathbb{C}$ -整域 R を考える。このとき、この環 R に対する予想 2.7 は正しい。

Proof. どこにもちゃんと書かれていない気がするので、書いておく。三段階に分けて証明する。

- (a) 多様体 Y と Y' を $\operatorname{Spec} R$ の 2 のクレパント解消とする。このとき、 Y と Y' はフロップの列で繋がる。よって主張 1.11 により、 $D^b(\operatorname{coh} Y) \simeq D^b(\operatorname{coh} Y')$ である。
- (b) 多様体 Y を $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消、非可換環 A を R の NCCR とする。このとき、主張 2.4 によって、 A -加群のモジュライ空間としてクレパント解消 Y' が構成され、 $D^b(\operatorname{coh} Y') \simeq D^b(\operatorname{mod} A)$ である。よって (a) により、 $D^b(\operatorname{coh} Y) \simeq D^b(\operatorname{mod} A)$ でもある。
- (c) 非可換環 A と A' を R の 2 つの NCCR とする。このとき、主張 2.4 によって、 A -加群のモジュライ空間としてクレパント解消 Y が構成され、 $D^b(\operatorname{coh} Y) \simeq D^b(\operatorname{mod} A)$ である。さらに、(b)

により $D^b(\text{coh } Y) \simeq D^b(\text{mod } A')$ でもある．よって $D^b(\text{mod } A) \simeq D^b(\text{mod } A')$ である．

以上の議論により，定理が成り立つ． □

注意 2.12. (1) 環 R が有限型ではない場合， $\text{Spec } R$ 上の相対 MMP がどの程度成り立つかを気にする必要がある．特に「2 つのクレパント解消がフロップで繋がること」が MMP によって保証されない限り，(a) の議論を用いることはできない．さらに， $R/\mathfrak{m} \not\simeq \mathbb{C}$ である場合には，主張 1.11 の議論を運用する上で，フロップ収縮に現れる特異点の完備局所的な振る舞いにも注意深くなる必要があるだろう．

(2) 一方で，NCCR に対しては次の定理 2.13 が成り立つ．ここでの R は非常に一般的で，体を含んでいる必要すらないようだ．

定理 2.13 ([IR08]). 正規 Gorenstein 整域 R であって， $\dim R \leq 3$ であるようなものを考える．このとき， R のすべての NCCR は互いに同値な導来圏を持つ．

予想 2.7 は高次元では広く未解決である．

NCCR の構成および，導来圏の同値を考える際に，重要となるのが傾斜対象の概念である．以下， $\text{Perf}(X)$ で X の完全導来圏（完全複体の導来圏）を表すことにする．

定義 2.14. スキーム X が qcqs であるとする（Noether である必要はない）．完全対象 $T \in \text{Perf}(X)$ が傾斜対象であるとは，以下の二つの条件を満たすことである．

- (1) 任意の $i \neq 0$ に対して $\text{Hom}(T, T[i]) \simeq 0$ ．
- (2) 対象 $F \in D(\text{Qcoh } X)$ が $\text{RHom}(T, F) \simeq 0$ を満たすならば， $F \simeq 0$ ．

傾斜対象 T がベクトル束と擬同型であるとき， T を傾斜ベクトル束と呼ぶ．

例 2.15. 主張 2.4 で，モジュライ $\mathcal{M}_{\theta, d}(A)$ の普遍束を Y に制限したものは， Y 上の傾斜ベクトル束である．

傾斜ベクトル束に対して以下が成り立つ．

定理 2.16 ([HVdB07, TU10, HH24]). 環 R と，その上で射影的なスキーム $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ を考える．また， $T \in \text{Perf}(X)$ を傾斜対象とする．このとき，以下のことが成り立つ．

- (1) 関手 $\text{RHom}_X(T, -): D^b(\text{coh } X) \rightarrow D^b(\text{mod } \text{End}_X(T))$ は三角圏の同値である．
- (2) 射 f がクレパント解消ならば，環 $A = \text{End}_X(T)$ は R の NCCR である．
- (3) 加えて T がベクトル束であるとき， $M := (f_* T)^{\vee\vee} \in \text{ref}(R)$ とおくと， R -代数の同型 $A \simeq \text{End}_R(M)$ が成り立つ．特に， M は R の NCCR を与える．

2.3 NCCR の存在

すでに見たように，NCCR の存在は，特に 3 次元で重要な帰結を持つ．高次元でも，NCCR の存在からは 3 次元と同様の帰結が期待されると共に，その存在問題は環の表現論においても興味深い問いである．以下では，NCCR を持つことが知られている環の例をまとめる．

定理 2.17 (3 次元における NCCR の存在). 3 次元正規 Gorenstein $\mathbb{C}$ -整域 R が以下のいずれかであるとき，環 R は NCCR を持つ．

- (a) 有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ に付随する不変式環 $R = S^G$. ここで S は 3 変数多項式環または 3 変数形式的べき級数環 [Aus62].
- (b) $\mathrm{Spec} R$ が cDV 特異点のみをもち, かつクレパント解消を持つもの [VdB04b].
- (c) 3 次元 Gorenstein トーリック多様体の座標環 [Bro12, ŠVdB20b].
- (d) 弱 del Pezzo 曲面 S に対する $R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(S, \omega_S^{-n})$ [VdB04a, Tom25b].
- (e) クレパント解消 $f: Y \rightarrow \mathrm{Spec} R$ および, Y 上の豊富かつ大域生成な直線束 $\mathcal{L}$ であって $H^2(Y, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ を満たすものが存在する環 R [TU10].

主張 2.18 (高次元における NCCR の存在). 正規 Gorenstein 整域 R が以下のいずれかであるとき, 環 R は NCCR を持つ.

- (a') 有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ に付随する不変式環 $R = S^G$. ここで S は n 変数多項式環または n 変数形式的べき級数環 [Aus62].
- (b') クレパント解消 $f: Y \rightarrow \mathrm{Spec} R$ であって

$$\text{任意の } x \in \mathrm{Spec} R \text{ に対して } \dim f^{-1}(x) \leq 1$$

を満たすものを持つ正規 Gorenstein 整域 R [VdB04b].

- (e') 戸田-上原の条件を満たすような環 R [TU10].
- (f) 簡約代数群 G の擬対称表現 W であって, generic 性を満たすものに付随するアフィン商の座標環 $(\mathrm{Sym} W)^G$ [ŠVdB17, VdB23].
- (g) 射影的有理等質多様体の余接束 T^*G/P に対する $R = H^0(\mathcal{O}_{T^*G/P})$ [BMR08].
- (h) 金光 [Kan22] の意味での単純フロップ収縮として現れる, さまざまな特異点の座標環 [Har17, DHKR25, Seg16, Har22, Har25, Har21, Har24].
- (i) 様々なトーリック環や, それに近い環 [ŠVdB20a, HN19, Nak19, HM22, Han25, Mat25, Tom25a].

注意 2.19. 定理 2.17 および主張 2.18 において, (a') は (a) が, (b') は (b) が, (e') は (e) がそれぞれ高次元化された主張である. さらに個別の例に対して, いくつかコメントを添えておく.

- (b) 孤立 cDV 特異点であることは, 3 次元 Gorenstein 末端特異点であることと同値である. 一般の cDV 特異点は孤立とは限らないことに注意.
- (d) [VdB04a] の出版版における証明には間違いがあるが, 後に arXiv 版がアップデートされ, 修正されている. [VdB04a] で議論されているのは del Pezzo 曲面に対する主張であるが, 最近 [Tom25b] によって弱 del Pezzo 曲面に拡張された.
- (e) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の反標準埋め込みのアフィン錐などが例である. こう書くと, (d) の特別な場合にも思えるが, (e) に含まれない例もある. 例えば, 例外集合 E が「conic の錐を非特異点で爆発したもの」になるクレパント解消の例を含む.
- (f) 一般化された (affine) determinantal variety の座標環など, 豊富な例を含む. ところで, [Bri13] によれば, 連続群 G がアフィンスキームに作用している場合にも, G -Hilbert スキームを考えることができる. しかし, [Ter14] の結果などを見る限り, 特異点解消の文脈で連続群の G -Hilbert スキームを調べても, 定理 1.10 のような望ましい結果を得ることはできないようだ. (定理 1.10 が 2, 3 次元限定の主張であることや, 連続群の作用に付随する Artin スタックの種々の性質を踏まえると, これは全く不思議なことではないと思う.)
- (g) このような R はシンプレクティック特異点のみを持ち, T^*G/P は $\mathrm{Spec} R$ のクレパント解消で

ある。例えば G/P が A 型の等質多様体であるならば、 $\text{Spec } R$ は A 型のべき零軌道閉包である。NCCR の存在は、[BMR08] の結果から得られる正標数体上での傾斜ベクトル束を、標数 0 に還元することで得られる。より一般に、Kaledin の論文 [Kal08] の中で

(*) R がシンプレクティック特異点の完備局所環で、 $\text{Spec } R$ がクレパント解消 (= シンプレクティック解消) を持つならば、 R は NCCR も持つ。

ことが主張されているが、私には証明が難しすぎて、まだよく理解できていない。勉強中。トーリック hyperKähler 多様体に対しては、[ŠVdB21] のような研究もある。

(h) 既知の全ての例で分かっているわけではないが、細々と調べている。単純フロップは単純向井対と呼ばれる、Fano 多様体と豊富ベクトル束の対を用いて分類される。さらに、各 (単純) 向井対に付随する、射影 Calabi–Yau 多様体が存在する。フロップを NCCR の観点から調べることで、これらの射影 Calabi–Yau 多様体に対して帰結を得ることができる。単純フロップ (および対応する単純向井対) の分類リストは未完成で、これを完成させることも面白い問題である。

(i) NCCR A を与える加群 M が反射的イデアルの直和であるとき、 $A = \text{End}_R(M)$ をトーリック NCCR という。トーリック NCCR の概念は、名前の通り、トーリック特異点の文脈でよく研究される。しかし、4 次元の (孤立ではない) 超曲面トーリック特異点であって

(1) NCCR を持つが

(2) トーリック NCCR を持たない

ものが存在するなど、理論的に上手くいっている概念ではない [ŠVdB20a]。一方、関連するテーマでは [FMS19] のような興味深い研究もある。

3 主結果 – 導来 McKay 対応に対する位相的障害

主張 2.4 によって、3 次元では NCCR の存在がクレパント解消の存在を導く。よって以下の問は自然である。

問題 3.1. 3 次元 Gorenstein $\mathbb{C}$ -整域 R に対して、クレパント解消の存在は NCCR の存在と同値か？

定理 2.17 では、実にさまざまな Gorenstein 標準特異点のみを持つ 3 次元の環 R に対して、その NCCR が存在することを紹介した。よって、問題 3.1 の答えは Yes であると期待したくなる (例えば [Leu12, Section 20 (ii)] を見よ)。しかし、結論から言うとこれは正しくない。この節では、そのことを傾斜対象の位相障害定理を通して解説する。

3.1 傾斜対象の存在に対する位相的障害定理と NCCR の非存在定理

この節では、[HW] の主定理である位相障害定理を紹介し、応用としてクレパント解消を持つが NCCR を持たないアフィン多様体の例を紹介する。定理そのものは非常に一般的で、クレパント解消以外の文脈においても様々な結論を誘導する。

定理 3.2. スキームの間の射影射 $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ を考える。 X が傾斜対象を持つと仮定する。このとき、 $R/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{C}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m} \subset R$ に対して、 $F = f^{-1}(\mathfrak{m})_{\text{red}}$ を被約ファイバーとして得られる射影スキームとすると、以下のことが成り立つ。

(1) 任意の奇数 i に対して、 $H^i(F; \mathbb{C}) = 0$ である。

(2) Euler 数 $e(F) = \sum_{i \geq 0} b_{2i}(F)$ は、局所化 $\text{End}_X(T)_{\mathfrak{m}}$ 上の単純加群の同型類の個数と一致する。

上記定理からは、ファイバー $F = f^{-1}(\mathfrak{m})$ に対する複素係数特異コホモロジーの情報が得られる。一方で、もしファイバー F の次元が 2 次元以下であるならば、整係数特異コホモロジーの情報も得ることができる。

定理 3.3. スキームの間の射影射 $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R$ を考える。また、 $R/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{C}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m} \subset R$ に対して、 $F = f^{-1}(\mathfrak{m})_{\text{red}}$ を被約ファイバーとして得られる射影スキームとする。以下のことを仮定する。

- (a) X が傾斜対象を持つ。
- (b) ファイバー F の次元は 2 以下である。

このとき、 $H^1(F; \mathbb{Z}) = H^3(F; \mathbb{Z}) = 0$ である。

定理 3.2, 定理 3.3 はそれぞれ対偶をとることで、傾斜対象の非存在に対する十分条件を与えていると捉えることができる。よって、これらを総称して傾斜対象の存在に対する**位相障害定理**と呼ぶ。

3 次元の特異点解消を考えたとき、各ファイバーの次元は 2 以下である。よって、系として以下のことが分かる。

系 3.4. 正規かつ Gorenstein な 3 次元**有限型** $\mathbb{C}$ -整域 R を考え、クレパント解消 $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R$ が存在すると仮定する。もし、ある閉点 $x \in \operatorname{Spec} R$ であって、非消滅 $H^3(f^{-1}(x); \mathbb{Z}) \neq 0$ を満たすものがあるなら、環 R は NCCR を持たない。

Proof. 環 R が NCCR A を持つと仮定する。定理 2.11 により、導来圏の同値 $\Phi: \operatorname{D}^b(\operatorname{coh} X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{D}^b(\operatorname{mod} A)$ が存在する。対象 $T := \Phi^{-1}(A)$ が傾斜対象であることが分かるので、定理 3.3 に矛盾する。 $\square$

注意 3.5. (1) 系 3.4 における有限型の仮定は、定理 2.11 を運用するために必要である。しかし、注意 2.12 (1) の通り、MMP が機能する限りにおいて、3 次元かつ Gorenstein な完備局所 $\mathbb{C}$ -整域のクラスに拡張できるはずである。傾斜対象や NCCR の定義は完備化で保たれ、仮定はファイバーに関するものなので、完備局所環で成り立てば、より一般のクラスでも成り立つはずだが... 著者は MMP の専門家ではないので、この報告集の原稿を書いている今現在、この点についてこれ以上詳しく述べることができないことをお詫びいたします。

- (2) クレパント解消の射 f の有理性を用いることで、1 次の特異コホモロジー $H^1(f^{-1}(x); \mathbb{Z})$ は常に消滅することが分かる。また、5 次元以上の特異コホモロジーは、次元の理由で消滅する。よって、3 次元有理特異点解消に対しては、3 次特異コホモロジー $H^3(f^{-1}(x); \mathbb{Z})$ が唯一消滅しない可能性を持っている。
- (3) 位相障害定理は、コホモロジー的 McKay 対応と、導来圏を用いる McKay 対応を繋ぐ定理でもある。特に、コホモロジーの非消滅が導来 McKay 対応の適用範囲の限界を示すのは面白い。

3.2 位相障害定理の応用例

位相障害定理の証明のアイデアを紹介する前に、いくつか具体的な応用例を紹介する。

3.2.1 クレパント解消を持つが NCCR を持たない例

この説では、系 3.4 の応用として、問題 3.1 の反例を与える．以下の例では、常に $S = \mathbb{C}[x, y, z, w]$ とおく．

例 3.6. 正整数 k に対して、多項式 $p_k = x^2 + y^3 + z^6 + w^k$ を考え、 $R_k := S/(p_k)$ とおく．もし $k \equiv 0, 1 \pmod{6}$ であるならば、重み付きブローアップを繰り返すことでクレパント解消

$$f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R_k$$

が得られる．ここで [Cai05, Example 6.1] より、原点 $o \in \operatorname{Spec} R_k$ に対して、

$$b_3(f^{-1}(o)) = \begin{cases} 2\left(\frac{k}{6} - 1\right) & \text{if } k \equiv 0 \pmod{6} \\ \frac{2(k-1)}{6} & \text{if } k \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

となる．したがって、 $k \equiv 0, 1 \pmod{6}$ かつ $k \geq 7$ であるならば、系 3.4 によって環 R_k は NCCR を持たない．

例 3.7. 正整数 k に対して、多項式 $q_k = x^3 + y^3 + z^3 + w^k$ を考え、 $R'_k := S/(q_k)$ とおく．多様体 $\operatorname{Spec} R'_k$ がクレパント解消

$$f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R'_k$$

を持つための必要十分条件は $k \equiv 0, 1 \pmod{3}$ となることである．ここで [Cai99, Example 4.15] より、原点 $o \in \operatorname{Spec} R'_k$ に対して、

$$b_3(f^{-1}(o)) = \begin{cases} 2\left(\frac{k}{3} - 1\right) & \text{if } k \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{2(k-1)}{3} & \text{if } k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

となる．したがって、 $k \geq 4$ であるならば、系 3.4 によって環 R'_k は NCCR を持たない．

例 3.8. 正整数 k に対して、多項式 $r = x^3 + y^4 + z^4 + w^4$ を考え、 $R'' := S/(r)$ とおく．このとき多様体 $\operatorname{Spec} R''$ はクレパント解消

$$f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R''$$

を持つ．ここで [Cai05, Example 6.2] より、原点 $o \in \operatorname{Spec} R''$ に対して、

$$b_3(f^{-1}(o)) = 12$$

となる．したがって、系 3.4 によって環 R'' は NCCR を持たない．

注意 3.9. 上記の環 R_k, R'_k, R'' は全て次数付き環の構造を持つ．この事実を用いることで、 S を 4 変数形式的ベキ級数環に置き換えても、NCCR の非存在が証明できる．

3.2.2 傾斜対象を持たない例

例 3.10 (フロップ収縮の例)．射影多様体 V を次数 3 または 4 の 3 次元 del Pezzo 多様体とする．局所 Calabi–Yau 多様体 $X := \operatorname{Tot}_V(\mathcal{O}_V(-1)^{\oplus 2})$ と、環 $R := H^0(X, \mathcal{O}_X)$ を考えると、構造射

$$f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R$$

はフロップ収縮である．収縮 f の例外集合は零切断 $V_0 \subset X$ であり、射 f は V_0 を 1 点に収縮する．ここで、 $b_3(V_0) > 0$ であるから、定理 3.2 (1) より、 X は傾斜対象を持たない．さらに、予想 2.7 が R に対して成立するならば、 R は NCCR を持たない．

以下の例は NCCR とは無関係ではあるが、傾斜対象の非存在が示せる例として面白い。

例 3.11. 任意の複素 Enriques 曲面 S を考え、 L を S 上の非常に豊富な直線束とする。環 R を (S, L) のアフィン錐の座標環とすると、

$$f: X := \text{Tot}_S(L^{-1}) \rightarrow \text{Spec } R$$

は有理特異点解消である。頂点 $o \in \text{Spec } R$ に対して、 $f^{-1}(o) \simeq S$ であり、かつ

$$H^3(S; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

であるため、定理 3.3 によって X は傾斜対象を持たない。

ちなみに、Enriques 曲面 S の接続層の Grothendieck 群 $K_0(S)$ は群として有限生成である。よって、後述する注意 3.16 のような議論を用いて傾斜対象の非存在を示すことができない。つまり、整係数コホモロジーの捩れ部分まで見ることで、はじめて傾斜対象の非存在が分かる。この点で、非常に興味深い例であると言える。

3.2.3 コホモロジーに関する帰結

ここまで、定理 3.2 および 3.3 を傾斜対象の非存在という、「ネガティブ」な主張を示すために用いてきた。しかし、これら定理は同時に消滅定理の一種と考えることもできる。実際、定理 2.17 に現れる環 R と、クレパント解消 $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ に対して、ファイバーの整係数 3 次コホモロジーが消滅することがわかる。特に、(a), (c) および (e) の例に対して、これは非自明な帰結であるように思う。

また詳しくは述べないが、偶数次の整係数コホモロジーに自然な基底を与える問題 [Rei96] とも繋がりがああるかもしれないと考えている。

3.3 位相障害定理の証明の方針と導来代数幾何

この節では、定理 3.2 の証明のアイディアを解説する。

注意 3.12. これまで扱ってきたのは、三角圏としての導来圏であった。しかし、ここからは (完全) 導来圏を dg 増強して、dg 圏 (または安定 ∞ -圏) として扱う。複体の圏と異なり、(完全) 導来圏を dg 増強するには、[Dri04] の結果を用いる必要がある。

定理 3.2 の証明においては、鍵となる概念が二つある。ひとつは、dg 圏に対する periodic cyclic homology の理論、もうひとつは導来ファイバー積の概念である。

後者の概念から説明する。射影射 $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ は平坦とは限らないため、層係数コホモロジーの基底変換公式が成り立たない。これと同じ理由によって、傾斜対象 T が誘導する X と非可換環 $A = \text{End}_X(T)$ の完全導来 dg 圏の“同値”^{*7}

$$\text{Perf}_{\text{dg}}(X) \simeq \text{Perf}_{\text{dg}}(A)$$

から“ファイバー”に対する圏 $\text{Perf}(f^{-1}(\mathfrak{m}))$ と $\text{Perf}(A/\mathfrak{m}A)$ の同値は誘導されない。しかし、定理はファイバーに関する主張であるため、何かしらの方法でファイバーにアクセスしなければならない。

ここで、導来スキームの圏におけるファイバー積、すなわち導来ファイバー積を考える必要が出てくる。導来スキームとは、おおまかに述べれば通常のスキームに負の次数にのみコホモロジーを持つよう

^{*7} ここで言う dg 圏の同値は、dg 圏のなす圏に対する森田モデル構造の、ホモトピー圏 $\text{Hmo}_{\mathbb{C}}$ の中での同値である。

な dg 代数の層が乗ったものである．実際には，dg 代数の間の擬同型や張り合わせの議論を両立させるため，ご存知のようにホモトピー論や無限圏の理論を用いた複雑な基礎づけが必要になる．導来スキーム $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\bullet)$ に対して，その classical truncation が古典的なスキーム $\pi_0 \mathcal{X} = (X, H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\bullet))$ として定義され，導来スキームの“底スキーム”のように扱われる．

我々の文脈に戻って，導来ファイバー

$$\mathcal{X} := X \times_{\mathrm{Spec} R}^L \mathrm{Spec} R/\mathfrak{m}$$

および，導来テンソル積

$$\mathcal{A} := A \otimes_R^L R/\mathfrak{m}$$

を考える．すると，導来代数幾何および dg 圏の一般論によって適切な意味で

$$\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(\mathcal{X}) \simeq \mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$$

が成り立つ．導来スキーム $\mathcal{X}$ の classical truncation は古典的な意味でのスキーム論的ファイバー $\pi_0 \mathcal{X} = f^{-1}(\mathfrak{m})$ である．同様に， $H^0(\mathcal{A}) = A/\mathfrak{m}A$ である．

さて，dg 圏に対しては，その加法的不変量 (additive invariant) が考えられる．中でも，periodic cyclic homology HP と呼ばれるものがある．これは，標数 0 において，以下の性質を持つ．

(1) 準射影的 $\mathbb{C}$ -スキーム Z に対して，

$$\mathrm{HP}_i(\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(Z)) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^{i+2k}(Z; \mathbb{C})$$

が成り立つ [Wei97, Kel98, Bar03].

(2) (Nil-invariance) 導来 $\mathbb{C}$ -スキーム $\mathcal{Z}$ で classical truncation $\pi_0 \mathcal{Z}$ が準コンパクトかつ分離的であるものに対して，

$$\mathrm{HP}_i(\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(\mathcal{Z})) \simeq \mathrm{HP}_i(\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(\pi_0 \mathcal{Z}))$$

が成り立つ [Kon21].

以上のことから，導来ファイバー $\mathcal{X}$ に対して $\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}$ の periodic cyclic homology を考えることで，古典的な意味でのファイバー $f^{-1}(\mathfrak{m})$ の位相に関する情報が得られることがわかった．一方で，代数に対する Nil-invariance [Goo85] によって，

$$\mathrm{HP}_i(\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})) \simeq \mathrm{HP}_i(\mathrm{Perf}_{\mathrm{dg}}(A/\mathfrak{m}A))$$

が得られる．ここから非可換環に対する種々の結果を用いることで，定理 3.2 のような計算を得る．

定理 3.3 の証明では，periodic cyclic homology の代わりに，位相的 K 群を用いる．位相的 K 群に対しても Nil-invariance が成り立つ [Kon21] ため，上記と同様の議論が適用できる．ファイバーの次元が小さいという仮定は，Atiyah–Hirzebruch のスペクトル系列の退化に関する議論で必要になる．

注意 3.13. ここで，主結果の証明に至るまでの経緯について述べたい．数学の解説からは逸脱してしまうが，適切に attribution を行うためということでご理解いただきたい．コロナ禍の間，3 次元におけるいくつかの予想を解決するために，萌芽期の McKay 対応や，3 次元標準特異点の極小モデルに関する論文を色々読んで勉強していた．その中で， G -Hilbert スキームの奇数次の特異コホモロジーが消滅している事実を不思議に思った．また，Caibär の博士論文 [Cai99] を読む中で，3 次元標準特異点を考えたとき，その極小モデルの第 3Betti 数ならびに Euler 数を決定することは難しい問題であることを知った．後述する Dao の結果 (定理 3.14) から 3.2.1 節のような例を作れることはすでに知ってい

たので、そこから考察を広げ、定理 3.2 を大雑把な形ではあるが予想した。Wemyss に話したところ、この予想を気に入ってくれて、実際に解いてみることになった。

しかし、証明には時間がかかり、多くの方の助言を仰ぐこととなった。初期段階では、定理の主張は 3 次元のクレパント解消に限定されるもので、主張 2.4 によるモジュライ空間としての表示から従うのだらうと考えていた。しかし、Craw を含む簾表現の専門家との議論の中では、証明の道筋は見えなかった。しばらくして、Wemyss が Oberwolfach に滞在した際、Van den Bergh から periodic cyclic homology を使うように助言を受けた。Wemyss が Glasgow に帰った後に、そのことを教わり、初めてこの概念を知った。ここから暫く Weibel や Keller の仕事についての勉強期間を経て、定理の主張を現在の形で定式化するに至った。この段階では、導来ファイバーを取る方法が上手くいくとは考えておらず、代わりにファイバーに付随する形式スキームを経由する証明の概略を思い浮かべていた。しかし、形式スキームを使う方法は、

- (1) 完備局所環上の dg 圏の理論を、通常のテンソル積を完備テンソル積に置き換える形で整備する必要がある
- (2) 形式スキームの準接続層の導来圏は、あまり良い対象ではない

など、基礎的な部分に様々な困難があった。この方法で最後まで上手くいくのかは現在も分かっていない。これに困って、不変量の専門家である金城氏を訪問し相談したところ、自分では見つけられなかった Konovalov のプレプリントを紹介していただき、一気に解決に向かうこととなった。

このように、まず証明したい主張があり、そこに向けて、多くの数学者のアドバイスを受けつつ、アイディアや道具立てを揃えていくという、自分としては少し珍しいプロセスを辿った研究となった。私の話を辛抱強く聞いてくださり、アドバイスをいただいた、Van den Bergh 氏と金城氏をはじめとする数学者のみなさま、ありがとうございました。

3.4 他の非存在定理

この節では、NCCR や傾斜対象に対する、他の非存在定理を紹介する。まず、孤立超曲面特異点に対しては、以下のような NCCR の非存在定理が知られている。

定理 3.14 ([Dao10, ŠVdB17]). 無限体 $\mathbb{k}$ を考える。正規局所 $\mathbb{k}$ -整域 R が以下の三条件を満たすと仮定する。

- (1) 環 R は孤立特異点を持つ。
- (2) ある等標数正則局所環 S と正則元 $f \in S$ が存在して、 $\hat{R} \simeq S/(f)$ が成り立つ。
- (3) 以下のいずれかが成り立つ。
 - (a) 次元に関して $\dim R = 3$ で、かつ R は $\mathbb{Q}$ -分解的。
 - (b) 次元に関して $\dim R \geq 4$ である。

このとき、任意の有限生成 R -加群 M であって $\text{End}_R(M)$ が極大 Cohen–Macaulay R -加群であるものは、自由加群に限る。特に、 R が正則でないならば、 R は NCCR を持たない。

例 3.15. 例 3.6 の $k \equiv 1 \pmod{6}$ の場合、例 3.7 の $k \equiv 1 \pmod{3}$ の場合、および例 3.8 の特異点は、分解的である (cf. [Cai99, Cai05]). よって、定理 3.14 から NCCR の非存在が得られる。

傾斜対象の非存在は、ファイバー上の接続層の Grothendieck 群の非有限生成性からも導かれること

がある。しかし、一般にこの性質を確認することは難しいと思う*8。

注意 3.16 (連接層の Grothendieck 群). 以下のような状況と記号を考える。

- 完備局所環 R に対して, $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R$ を射影射とし, ファイバーを $Z = f^{-1}(\mathfrak{m}_R)_{\text{red}}$ とおく。
- 非可換環 A を, ある R -代数であって, かつ R -加群として有限生成なものとする。
- 圏同値 $D_Z^b(\operatorname{coh} X) \simeq D_{\mathfrak{h}}^b(A)$ が成り立つと仮定する。ここで, $D_Z^b(\operatorname{coh} X)$ は集合 Z に台を持つ複体のなす部分圏, $D_{\mathfrak{h}}^b(A)$ は任意のコホモロジーが有限の長さを持つような複体のなす部分圏である。

このとき, Grothendieck 群を考えることにより, 群の同型 $K_0(Z) \simeq K_0(\operatorname{mod}_{\mathfrak{h}} A)$ が得られる。ここで, $\operatorname{mod}_{\mathfrak{h}} A$ は有限の長さを持つ右 A -加群の圏である。 A は semiperfect なので, 単純 A 加群の同型類の数は高々有限である。よって, $K_0(\operatorname{mod}_{\mathfrak{h}} A) \simeq K_0(Z)$ は有限生成になる。

一方で, 射影スキーム Z の Grothendieck 群 $K_0(Z)$ が有限生成になる状況は非常に稀である。もし, Grothendieck 群 $K_0(Z)$ が有限生成ではないのであれば, 系として上記のような条件を満たす代数 A が存在しないことが分かる。

注意 3.17. 次元が 4 以上になると, クレパント解消の存在と NCCR の存在は一般に無関係になる。

たとえば, 環 $R = \mathbb{C}[x, y, z, u, v]/(x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^5)$ を考えると, これは孤立特異点のみを持ち, よって定理 3.14 から, 環 R は NCCR を持たない。一方で, 多様体 $\operatorname{Spec} R$ はクレパント解消 $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} R$ を持つ (cf. [Lin02])。

一方で, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ -型の有限商特異点を考えると, これは $\mathbb{Q}$ -分解的末端特異点なので, クレパント解消を持たない。しかし, 主張 2.18 によって, NCCR は存在する。

4 その他の話題

最後に, まだ触れていない, いくつかの関連する話題について述べる。

4.1 特異点の非可換 $\mathbb{Q}$ -分解末端化

標準特異点のみを持つ正規代数多様体に対して, その $\mathbb{Q}$ -分解末端化 (極小モデルとも呼ばれる) を考えることができる。 $\mathbb{Q}$ -分解末端化は全てフロップの列で繋がる。特に, 主張 1.11 により, Gorenstein 標準特異点のみを持つアフィン多様体 $\operatorname{Spec} R$ の $\mathbb{Q}$ -分解末端化は, すべて導来同値である。

また, $\mathbb{Q}$ -分解末端化は, クレパント爆発の中で極大なものである。クレパント特異点解消は, 滑らかな $\mathbb{Q}$ -分解末端化である。この事実を踏まえ, $\mathbb{Q}$ -分解末端化の「非可換環類似」を考えることができる。

定義 4.1 ([IW14a]). R を正規 Gorenstein 整域とし, $M \in \operatorname{ref}(R)$ を反射加群とする。

- (1) M が **maximal modifying (MM)** であるとは, $\operatorname{End}_R(M) \in \operatorname{CM}(R)$ かつ

$$\{N \in \operatorname{ref}(R) \mid \operatorname{End}_R(M \oplus N) \in \operatorname{CM}(R)\} = \{N \in \operatorname{ref}(R) \mid N \text{ はある } c \text{ に対して } M^{\oplus c} \text{ の直和因子}\}$$

が成り立つことである。

- (2) R -代数 A が **maximal modification algebra (MMA)** であるとは, ある MM R -加群 M に対して $A \simeq \operatorname{End}_R(M)$ となることである。

*8 簡単な判定法をご存知の方は教えてください！

加群 N が、ある c に対して $M^{\oplus c}$ の直和因子だとすると、森田理論により Abel 圏の同値

$$\text{mod End}_R(M) \simeq \text{mod End}_R(M \oplus N)$$

が成り立つ。すなわち、二つの非可換環 $\text{End}_R(M)$ と $\text{End}_R(M \oplus N)$ は本質的に同じものであると考えて問題ない。

ここで、NCCR の定義において、 $\text{End}_R(M) \in \text{CM}(R)$ という条件はクレパント性に対応していたことを思い出そう。これによって、MM 加群の定義は「End 環が“非可換なクレパント爆発”の中で極大である」という条件を直接表している、とすることができる。

例 4.2. 定理 3.14 の条件を満たす環 R を考える。このとき、定理の主張により、環 R 自身を R -加群と見なしたものは MM 加群であり、よって $R \simeq \text{End}_R(R)$ は自身の MMA である。

以下の定理は、MMA が $\mathbb{Q}$ -分解末端化に近い性質を持つことを示している。

定理 4.3 ([IW14a, IW14b]). 以下の主張が成り立つ。

- (1) 正規 Gorenstein 整域 R が 3 次元かつ等余次元ならば、環 R のすべての MMA は導来同値である。
- (2) 等余次元 d 次元正規 Gorenstein 整域 R の NCCR は MMA である。
- (3) 3 次元 Gorenstein 代数多様体の間の射影的雙有理射 $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ を考え、多様体 X が孤立超曲面特異点のみを持つとする。さらに、ある R -代数 A が存在して、導来圏の同値 $D^b(\text{coh } X) \simeq D^b(\text{mod } A)$ が成り立つと仮定する。このとき、以下の (a) と (b) は同値である。
 - (a) 射 f はクレパント射であり、かつ X は $\mathbb{Q}$ -分解的である。
 - (b) 非可換 R -代数 A は R の MMA である。

このことから特に、 $\mathbb{Q}$ -分解末端化と導来同値になる非可換環は、MMA である。

以上のことを踏まえると、MMA の理論は $\mathbb{Q}$ -分解末端化の非可換環類似として非常に上手くいっているように見える。よって、さらなる類似として以下のことを期待したくなる。

予想 4.4 ([IW14a, IW14b]). 環 R を有理特異点のみを持つ等余次元の 3 次元正規 Gorenstein 整域とする。このとき、以下のことが期待される。

- (1) 環 R の MMA は存在するであろう。
- (2) スキーム $\text{Spec } R$ の $\mathbb{Q}$ -分解末端化と、環 R の MMA は、すべて導来同値であろう。
- (3) 環 R の任意の MMA A は孤立特異点のみを持つであろう。

(3) の孤立特異点とは、極大ではない任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して、局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ が有限大域次元を持つこととして定義される。(3) の主張は、3 次元の末端特異点が孤立特異点であることの非可換類似である。

上記の予想の主張はいずれもリーズナブルであるように見える。しかし、例 4.2 および 3.2.1 節の結果より、以下のことが分かる。

系 4.5. 予想 4.4 (2) は成り立たない。

予想 4.4 (2) が正しくないにも関わらず（すなわち主張 1.11 とは無関係に！）定理 4.3 (1) のような主張が成立していることは非常に不思議で、まだ我々に見えていない新しい幾何学が存在を予感させる。

論文 [HW] では、予想 4.4 (3) の特別な場合として以下の主張を示している。

定理 4.6. 3次元 Gorenstein 整域 R に対して、 R -加群としての R 自身が MM 加群であるならば、 $\text{MMA } R \simeq \text{End}_R(R)$ は孤立特異点のみを持つ。

そもそも予想 4.4 (3) は、予想 4.4 (2) の帰結として期待されていた主張である。予想 4.4 (2) が一般的に正しくないにも関わらず、もし予想 4.4 (3) が正しかったとすれば、それはそれで不思議である。

4.2 Craw–Ishii 型問題

主張 2.4 は NCCR の理論の有効性を示す、重要な主張であった。これを拡張して、以下のような問題を考えることができる。

問題 4.7. 3次元正規 Gorenstein $\mathbb{C}$ -整域 R を考える。非可換環 A を R の NCCR とした上で、主張 2.4 と同じ記号を用いる。このとき、任意の（射影的）クレパント解消 $f: X \rightarrow \text{Spec } R$ に対して、ある一般的な安定性条件 $\theta \in \mathbb{Z}^{n+1}$ が存在して、モジュライ $\mathcal{M}_{\theta,d}(A)$ の既約成分と X は R -スキームとして同型になるか？

この問題は最初、[CI04] で有限 Abel 部分群 $G \subset \text{SL}(3, \mathbb{C})$ に対する斜群環に対して研究されたため、Craw–Ishii 型問題と呼ばれる。（あるいは、肯定的な結論を期待した上で、Craw–Ishii 予想とも呼ばれる。）現在、Craw–Ishii 型問題は以下の環 R と NCCR A の組 (R, A) の例に対して、肯定的に解決されている。

- (1) 一般の有限部分 $G \subset \text{SL}(3, \mathbb{C})$ に対する商特異点 $\mathbb{C}[x, y, z]^G$ と、斜群環 $\mathbb{C}[x, y, z] \sharp G$ [Yam25].
- (2) クレパント解消を持つ cDV 特異点の完備局所環 R と、Van den Bergh が構成した NCCR A [Wem18].
- (3) Dimer 模型に付随して決まる 3次元 Gorenstein トーリック環と、その NCCR [IU16, 石 13].

特に、(1) は最近の McKay 対応における代表的な大きな成果である。(2) は Wemyss によるホモロジカル極小モデル理論 (HomMMP) の一部である。

Craw–Ishii 型問題が正しければ、 $\text{Spec } R$ の（射影的）クレパント解消は、ひとつの NCCR A のモジュライ理論を用いて完全に分類できることになる。しかし、我々は既に 3.2.1 節で、クレパント解消を持つ 3次元特異点が、NCCR も持つとは限らないことを見た。そのような特異点に対しては、そもそも Craw–Ishii 型問題を通したクレパント解消の分類を考えることができない。

問題 4.8. クレパント解消を持ち、NCCR を持たないような 3次元 Gorenstein 標準特異点に対して、なにか別の代数的な対象を考え、その“表現”のモジュライ理論を用いてクレパント解消を分類することができるか？

NCCR を MMA に、クレパント解消を $\mathbb{Q}$ -分解末端化に置き換えた上で、Craw–Ishii 型問題を考えることも可能である。実際、一般の cDV 特異点に対して、Van den Bergh の結果から MMA の存在が従い、その MMA に対して Craw–Ishii 型問題を肯定的に解くことができる [Wem18].

しかし、系 4.5 の事実を踏まえると、一般の場合には良い結論が得られないことが分かる。

4.3 さらなる話題

4.3.1 正標数の NCCR

本稿では $\mathbb{C}$ 上の Gorenstein 環に限定して, McKay 対応や NCCR の理論を解説してきた. 一方で, 正標数における McKay 対応については, 近年いくつかの進展が見られるものの, その多くはモチーフ論的側面に焦点を当てたものであり, NCCR に直接関わる研究は依然として非常に限られている. そのような状況の中で, 正標数体上の NCCR を扱った研究としては, 例えば [LY24] が挙げられる.

正標数の NCCR の理論を構築する上では, やはりまず, 2 次元 RPD の場合により深い理解を得ることが重要になるだろう. 正標数の RDP は, 標数 0 の場合と異なり Dynkin 型のみで分類することができないし, 有限商特異点とも限らない. 正標数における各 RDP の NCCR が, どのような簇の道代数で表すことができるか調べることは, 面白い問題だと思う. (標数 0 では, NCCR は対応する拡大 Dynkin 図形の preprojective 代数と同型になる.)

正標数の NCCR に関しては, [SVdB08, Section 5] の例も興味深い.

4.3.2 Gorenstein ではない特異点の非可換特異点解消

本稿では NCCR を Gorenstein 整域に対して定義したが, これを拡張して, Cohen–Macaulay 整域上で NCCR を考えることもできる (cf. [IW14a, DITW20]).

これと関連して, Gorenstein とは限らない有限商特異点に対して Craw–Ishii 型問題を考える研究がある [Ish20]. 特に 2 次元の場合に, Wemyss による HomMMP を拡張して, 非可換代数の言葉で Craw–Ishii 型問題を捉えることができそうであるが, まだそういった研究は存在していないようだ.

Gorenstein 特異点とは限らない商特異点や, reflection を含むような $GL(n, \mathbb{C})$ の有限部分群に対して McKay 対応を考える研究は, Wunram の研究 [Wun88] に端を発する形で他にも様々ある. これらを全て挙げることはしないが, 非可換代数に関連するものとして特に [IW10, Cra11, Wem11] や, 少し異なる問題設定のものとして [BFI20] などがある. 導来圏に関わるものとしては, [IU15, Kaw18] も見よ.

4.3.3 触れることができなかった話題

捩れ (twisted) NCCR の理論, NCCR の変異 (mutation) の理論 [IW14a] や NCCR 自体の分類理論, Bridgeland 安定性や導来圏の自己同値群の研究に対する NCCR の理論の応用, 団傾理論等の表現論的側面, および物理学的側面については, 一切触れることができなかった.

謝辞

本稿の執筆にあたり, 城崎代数幾何学シンポジウム 2025 において講演の機会をお与えくださった世話人の皆様に, 心より感謝申し上げます. また, 著者が博士課程在籍中にベルギー・Hasselt に受け入れてくださり, NCCR に関する多くの話題についてご指導いただいた Michel Van den Bergh 氏, ならびに著者をポスドク研究員としてイギリス・Glasgow に受け入れてくださり, 共同研究を進めてくださった Michael Wemyss 氏に深く感謝いたします. さらに, 本稿で扱った内容に関して, 長期間にわたり有益な議論を重ねてくださった Alexey Bondal 氏, Alastair Craw 氏, Will Donovan 氏, Michał Kapustka 氏, Marco Rampazzo 氏, 阿部知行氏, 伊藤由佳理氏, 伊山修氏, 大内元気氏, 金光秋博氏, 金城翼氏, 小関直紀氏, 戸田幸伸氏, 朝永龍氏, 埴原紀宏氏, 平野雄貴氏, 堀健太郎氏, 山岸亮氏, そして著者の博士課程指導教員の永井保成氏にも, この場を借りて厚く御礼申し上げます.

参考文献

- [Aus62] Maurice Auslander, *On the purity of the branch locus*, Amer. J. Math. **84** (1962), 116–125.
- [Bar03] Vladimir Baranovsky, *Orbifold cohomology as periodic cyclic homology*, Internat. J. Math. **14** (2003), no. 8, 791–812.
- [Bat99] Victor V. Batyrev, *Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), no. 1, 5–33.
- [BCHM10] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon, and James McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.
- [BFI20] Ragnar-Olaf Buchweitz, Eleonore Faber, and Colin Ingalls, *A McKay correspondence for reflection groups*, Duke Math. J. **169** (2020), no. 4, 599–669.
- [BKR01] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535–554.
- [Blu11] Mark Blume, *Construction of G -Hilbert schemes*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 8-9, 953–959.
- [BMR08] Roman Bezrukavnikov, Ivan Mirković, and Dmitriy Rumynin, *Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 945–991, With an appendix by Bezrukavnikov and Simon Riche.
- [BO95] A. Bondal and D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, 1995, preprint.
- [Bri02] Tom Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147** (2002), no. 3, 613–632.
- [Bri13] Michel Brion, *Invariant Hilbert schemes*, Handbook of moduli. Vol. I, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 24, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 64–117.
- [Bro12] Nathan Broomhead, *Dimer models and Calabi-Yau algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **215** (2012), no. 1011, viii+86.
- [Cai99] Mirel Caiabăr, *Minimal models of canonical singularities and their cohomology*, 1999, Univ. of Warwick Ph.D. thesis, Feb 1999, 79 + vii pp.
- [Cai05] ———, *Minimal models of canonical 3-fold singularities and their Betti numbers*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 26, 1563–1581.
- [Che02] Jiun-Cheng Chen, *Flops and equivalences of derived categories for threefolds with only terminal Gorenstein singularities*, J. Differential Geom. **61** (2002), no. 2, 227–261.
- [CI04] Alastair Craw and Akira Ishii, *Flops of G -Hilb and equivalences of derived categories by variation of GIT quotient*, Duke Math. J. **124** (2004), no. 2, 259–307.
- [Cra05] Alastair Craw, *An explicit construction of the McKay correspondence for A -Hilb $\mathbb{C}^3$* , J. Algebra **285** (2005), no. 2, 682–705.
- [Cra11] ———, *The special McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, Q. J. Math. **62** (2011), no. 3, 573–591.
- [Dao10] Hailong Dao, *Remarks on non-commutative crepant resolutions of complete intersections*, Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 1021–1030.
- [DHKR25] Will Donovan, Wahei Hara, Michał Kapustka, and Marco Rampazzo, *Window categories for a simple 9-fold flop of Grassmannian type*, 2025, preprint.
- [DITW20] Hailong Dao, Osamu Iyama, Ryo Takahashi, and Michael Wemyss, *Gorenstein modifications and $\mathbb{Q}$ -Gorenstein rings*, J. Algebraic Geom. **29** (2020), no. 4, 729–751.
- [Dri04] Vladimir Drinfeld, *DG quotients of DG categories*, J. Algebra **272** (2004), no. 2, 643–691.
- [FMS19] Eleonore Faber, Greg Muller, and Karen E. Smith, *Non-commutative resolutions of toric varieties*, Adv. Math. **351** (2019), 236–274.
- [Goo85] Thomas G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loop space*, Topology **24** (1985), no. 2, 187–215.
- [Han25] Norihiro Hanihara, *Non-commutative resolutions for Segre products and Cohen-Macaulay rings of hereditary representation type*, Trans. Amer. Math. Soc. **378** (2025), no. 4, 2429–2475.
- [Har17] Wahei Hara, *Non-commutative crepant resolution of minimal nilpotent orbit closures of type A and Mukai flops*, Adv. Math. **318** (2017), 355–410.
- [Har21] ———, *On the Abuaf-Ueda flop via non-commutative crepant resolutions*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **17** (2021), Paper No. 044, 22.
- [Har22] ———, *On derived equivalence for Abuaf flop: mutation of non-commutative crepant resolutions and spherical twists*, Matematiche (Catania) **77** (2022), no. 2, 329–371.
- [Har24] ———, *Derived equivalence for the simple flop of type G_2^1 via tilting bundles*, 2024, preprint.
- [Har25] ———, *Derived equivalence for the simple flop of type D_4 via tilting bundles*, 2025, preprint.
- [HH24] Wahei Hara and Yuki Hirano, *Mutations of noncommutative crepant resolutions in geometric invariant theory*, Selecta Math. (N.S.) **30** (2024), no. 4, Paper No. 70, 61.
- [HM22] Akihiro Higashitani and Koji Matsushita, *Conic divisorial ideals and non-commutative crepant resolu-*

- tions of edge rings of complete multipartite graphs, *J. Algebra* **594** (2022), 685–711.
- [HN19] Akihiro Higashitani and Yusuke Nakajima, *Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions*, *Selecta Math. (N.S.)* **25** (2019), no. 5, Paper No. 78, 25.
- [Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [HVdB07] Lutz Hille and Michel Van den Bergh, *Fourier-Mukai transforms*, Handbook of tilting theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 332, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 147–177.
- [HW] Wahei Hara and Michael Wemyss, *Topological obstructions to tilting*, in preparation.
- [IN96] Yukari Ito and Iku Nakamura, *McKay correspondence and Hilbert schemes*, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), no. 7, 135–138.
- [IN99] Y. Ito and I. Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 151–233.
- [IR96] Yukari Ito and Miles Reid, *The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3, \mathbb{C})$* , Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 221–240.
- [IR08] Osamu Iyama and Idun Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 4, 1087–1149.
- [Ish20] Akira Ishii, *G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity*, *Hiroshima Math. J.* **50** (2020), no. 3, 375–398.
- [Ito96] Yukari Ito, *Resolution of Gorenstein quotient singularities*, no. 934, 1996, Geometry of toric varieties and convex polytopes (Japanese) (Kyoto, 1995), pp. 167–178.
- [Ito20] ———, *The McKay correspondence*, 代数幾何学シンポジウム記録, 京都大学数理解析研究所, 2020, pp. 96–105.
- [IU15] Akira Ishii and Kazushi Ueda, *The special McKay correspondence and exceptional collections*, *Tohoku Math. J. (2)* **67** (2015), no. 4, 585–609.
- [IU16] ———, *Dimer models and crepant resolutions*, *Hokkaido Math. J.* **45** (2016), no. 1, 1–42.
- [IW10] Osamu Iyama and Michael Wemyss, *The classification of special Cohen-Macaulay modules*, *Math. Z.* **265** (2010), no. 1, 41–83.
- [IW13] ———, *On the noncommutative Bondal-Orlov conjecture*, *J. Reine Angew. Math.* **683** (2013), 119–128.
- [IW14a] ———, *Maximal modifications and Auslander-Reiten duality for non-isolated singularities*, *Invent. Math.* **197** (2014), no. 3, 521–586.
- [IW14b] ———, *Singular derived categories of $\mathbb{Q}$ -factorial terminalizations and maximal modification algebras*, *Adv. Math.* **261** (2014), 85–121.
- [Kal08] Dmitry Kaledin, *Derived equivalences by quantization*, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), no. 6, 1968–2004.
- [Kan22] Akihiro Kanemitsu, *Mukai pairs and simple K-equivalence*, *Math. Z.* **302** (2022), no. 4, 2037–2057.
- [Kaw02a] Yujiro Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence*, *J. Differential Geom.* **61** (2002), no. 1, 147–171.
- [Kaw02b] ———, *Francia’s flip and derived categories*, Algebraic geometry, de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 197–215.
- [Kaw08] ———, *Flops connect minimal models*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), no. 2, 419–423.
- [Kaw18] ———, *Derived McKay correspondence for $GL(3, \mathbb{C})$* , *Adv. Math.* **328** (2018), 1199–1216.
- [Kel98] Bernhard Keller, *On the cyclic homology of ringed spaces and schemes*, *Doc. Math.* **3** (1998), 231–259.
- [Kon21] Andrey Konovalov, *Nilpotent invariance of semi-topological K-theory of dg-algebras and the lattice conjecture*, 2021, preprint.
- [Kuz08] Alexander Kuznetsov, *Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities*, *Selecta Math. (N.S.)* **13** (2008), no. 4, 661–696.
- [Leu12] Graham J. Leuschke, *Non-commutative crepant resolutions: scenes from categorical geometry*, Progress in commutative algebra 1, de Gruyter, Berlin, 2012, pp. 293–361.
- [Lin02] Hui-Wen Lin, *On crepant resolution of some hypersurface singularities and a criterion for UFD*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no. 5, 1861–1868.
- [Lip69] Joseph Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), no. 36, 195–279.
- [LY24] Christian Liedtke and Takehiko Yasuda, *Non-commutative resolutions of linearly reductive quotient singularities*, *Q. J. Math.* **75** (2024), no. 3, 969–985.
- [Mat25] Koji Matsushita, *Conic divisorial ideals of toric rings and applications to Hibi rings and stable set rings*, 2025, preprint.
- [Nak01] Iku Nakamura, *Hilbert schemes of abelian group orbits*, *J. Algebraic Geom.* **10** (2001), no. 4, 757–779.
- [Nak19] Yusuke Nakajima, *Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class group*, *J. Pure Appl. Algebra* **223** (2019), no. 8, 3461–3484.
- [NdC23] Álvaro Nolla de Celis, *On Reid’s recipe for non-abelian groups, McKay correspondence, mutation and related topics*, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 88, Math. Soc. Japan, Tokyo, [2023] ©2023, pp. 95–118.
- [Rei96] Miles Reid, *McKay correspondence*, 代数幾何学シンポジウム記録, 京都大学数理解析研究所, 1996, pp. 14–41.

- [Seg16] Ed Segal, *A new 5-fold flop and derived equivalence*, Bull. Lond. Math. Soc. **48** (2016), no. 3, 533–538.
- [SVdB08] J. T. Stafford and M. Van den Bergh, *Noncommutative resolutions and rational singularities*, vol. 57, 2008, Special volume in honor of Melvin Hochster, pp. 659–674.
- [ŠVdB17] Špela Špenko and Michel Van den Bergh, *Non-commutative resolutions of quotient singularities for reductive groups*, Invent. Math. **210** (2017), no. 1, 3–67.
- [ŠVdB20a] ———, *Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities I*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2020), no. 21, 8120–8138.
- [ŠVdB20b] ———, *Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities. II*, J. Noncommut. Geom. **14** (2020), no. 1, 73–103.
- [ŠVdB21] ———, *Tilting bundles on hypertoric varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2021), no. 2, 1034–1042.
- [Ter14] R. Terpereau, *Invariant Hilbert schemes and desingularizations of quotients by classical groups*, Transform. Groups **19** (2014), no. 1, 247–281.
- [Tom25a] Ryu Tomonaga, *Non-commutative crepant resolutions of toric singularities with divisor class group of rank one*, 2025, preprint.
- [Tom25b] ———, *Weak del pezzo surfaces yield 2-hereditary algebras and 3-Calabi-Yau algebras*, 2025, preprint.
- [TU10] Yukinobu Toda and Hokuto Uehara, *Tilting generators via ample line bundles*, Adv. Math. **223** (2010), no. 1, 1–29.
- [VdB04a] Michel Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, pp. 749–770.
- [VdB04b] ———, *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J. **122** (2004), no. 3, 423–455.
- [VdB23] ———, *Noncommutative crepant resolutions, an overview*, ICM—International Congress of Mathematicians. Vol. 2. Plenary lectures, EMS Press, Berlin, [2023] ©2023, pp. 1354–1391.
- [Wei97] Charles Weibel, *The Hodge filtration and cyclic homology*, K-Theory **12** (1997), no. 2, 145–164.
- [Wem11] Michael Wemyss, *The $GL(2, \mathbb{C})$ McKay correspondence*, Math. Ann. **350** (2011), no. 3, 631–659.
- [Wem16] ———, *Noncommutative resolutions*, Noncommutative algebraic geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 64, Cambridge Univ. Press, New York, 2016, pp. 239–306.
- [Wem18] ———, *Flops and clusters in the homological minimal model programme*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 435–521.
- [Wun88] Jürgen Wunram, *Reflexive modules on quotient surface singularities*, Math. Ann. **279** (1988), no. 4, 583–598.
- [Yam25] Ryo Yamagishi, *Moduli of G -constellations and crepant resolutions II: The Craw-Ishii conjecture*, Duke Math. J. **174** (2025), no. 2, 229–285.
- [戸 16] 戸田 幸伸, *連接層の導来圏に関わる諸問題*, 問題・予想・原理の数学, vol. 1, 数学書房, 2016.
- [向 08] 向井 茂, *モジュライ論 I*, 岩波書店, 2008.
- [石 13] 石井 亮, *ダイマー模型と非可換クレパント解消*, 代数幾何学シンポジウム記録, 京都大学数理解析研究所, 2013, pp. 53–69.
- [川 14] 川又 雄二郎, *高次元代数多様体論*, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2014.
- [中 01] 中村 郁, *マッケイ対応とヒルベルト・スキーム*, 代数幾何学シンポジウム記録, 京都大学数理解析研究所, 2001, pp. 1–17.