

SQUID 系における決定論的拡散現象 — 超伝導接合系を利用した量子カオスの研究 —

大阪市立大学 工学研究科 加藤 岳生¹, 谷本 健一, 中村 勝弘

1 はじめに

これまでに多くの現実的な系において量子カオスの兆候が議論されてきた。その代表として、原子核と量子ドットを挙げることができるであろう。いずれの系に対しても、量子古典対応やレベル統計、半古典理論などが活発に議論されてきた。また実験的な検証も精力的に行われてきている。ここでは、量子カオスの研究対象として、制御性の優れた物理系が存在することを紹介したい。それが超伝導接合デバイス (SQUID) である。

この系は、近年量子ビットの作成に関連して新たに注目されており [1]、量子コンピュータの実現に向けて活発な実験が行われてきている。散逸やノイズの少ない良質のサンプルが得られるようになっており、将来理想的な量子系が実現されることが期待されている。現在のところ、この系は量子ビットの実現が特に注目されており、理論実験ともに基底状態と第一励起状態の量子力学的な操作に議論が集中している。ここでは、この系でより高いエネルギー準位に注目すれば、量子古典対応を検証することができることを示したい。

散逸の小さい超伝導接合の場合には、対応する古典運動は Hamilton 系として記述される。その古典動力学にも特徴的な現象が現れることがわかっている。例えば異常拡散現象や通常拡散現象における拡散係数の特異なエネルギー依存性などがそうである [2]。表題にもなっているこの現象については、すでに物性研究の紙面上で紹介済みであるため、ここでは簡単に触れるのみとする。ここではより進んだ問題として、エネルギー準位統計を通して、この系の量子古典対応の問題を議論したい。

2 モデルの概観

超伝導接合系 (SQUID 系) は、微細加工技術によって作られるために、さまざまなバリエーションがある。SQUID には大きく分けて二種類のタイプがある; 大きなループを持つ SQUID と小さなループを持つ SQUID である。

¹E-mail: kato@a-phys.eng.osaka-cu.ac.jp

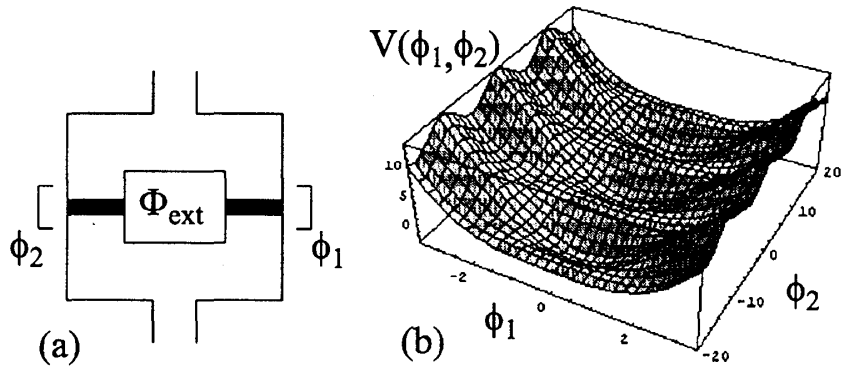


図 1: (a) 3 個の接合を持つ小さな SQUID 回路, (b) 位相に対するポテンシャルエネルギー

まず大きな超伝導ループをもつ SQUID を議論する。代表的な SQUID の回路を図 1(a) に示す。この系のハミルトニアンは、次のように与えられる。

$$H = 4E_{C,1}n_1^2 + E_{C,2}n_2^2 - E_{J,1} \cos \phi_1 - E_{J,2} \cos \phi_2 - E_L(\phi_1 - \phi_2 - 2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0)^2 \quad (1)$$

ここで超伝導系を記述する変数は超伝導位相 ϕ_1 と ϕ_2 である。また n_1 と n_2 は ϕ_1 と ϕ_2 に共役な変数であり、接合に蓄えられた電荷を $2e$ で割った量に対応する。(簡単のため、プランク定数 $\hbar$ を 1 とした。) このハミルトニアンの詳しい導出法については、例えば文献 [3] を参考にされたい。ここではハミルトニアン中のエネルギーパラメータ $E_{C,i}$, $E_{J,i}$, E_L などの諸量が接合の面積や厚さによって制御できること、ポテンシャルエネルギー中の Φ_{ext} はループを貫く外部磁場によりコントロールできることのみを強調しておきたい。この系のポテンシャルエネルギーを $\Phi = 0.5\Phi_0 = \hbar/4e$ の場合について書いたのが図 1(b) である。系は一方向に周期的なポテンシャルを持つが、二つの位相の結合によりそのポテンシャル構造が複雑になる。そのため、あるエネルギー領域においてはカオスが発生する。周期的な方向に対して決定論的拡散現象を注目すると、異常拡散や通常拡散領域での拡散係数の異常なエネルギー依存性が観測される [2]。

量子現象を考えるには、大きな SQUID 系より次に述べる小さな SQUID 系の方がノイズを小さく抑えることができるので、理想的である。小さなループを持つ SQUID 系は、 E_L が非常に大きいため、ループを一周するときの位相差の合計に対して拘束条件を与えるようになる。よって 2 次元ポテンシャルで記述される系を得るためには、接合を 3 つ用意してやる必要があるが、それは図 2(a) のようにすれば簡単に実現できる。この系のハミルトニアンは、以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} H &= 4E_{C,1}(n_1 - n_1^*)^2 + 4E_{C,2}(n_2 - n_2^*)^2 \\ &\quad - E_{J,1} \cos \phi_1 - E_{J,2} \cos \phi_2 - E_{J,3} \cos(\phi_1 - \phi_2 - 2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0) \end{aligned} \quad (2)$$

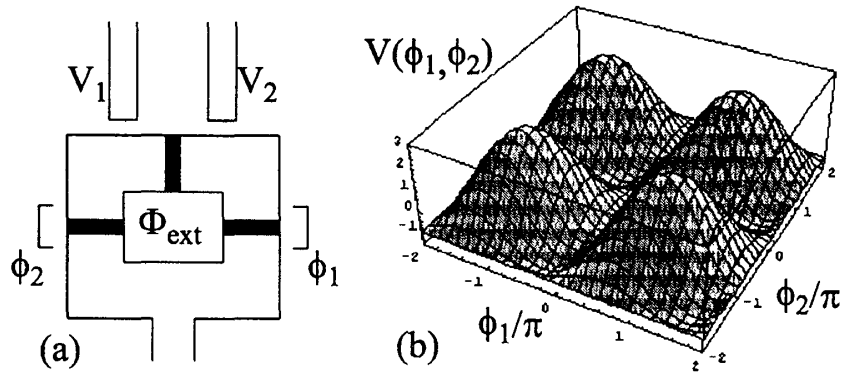


図 2: (a) 3 個の接合を持つ小さな SQUID 回路, (b) 位相に対するポテンシャルエネルギー

先ほどのハミルトニアンで現れたパラメータに加え、この系では超伝導体につけられたゲートの電圧 V_1, V_2 によって、 n_1^* と n_2^* もコントロールできる。この系のポテンシャルエネルギーをやはり $\Phi_{\text{ext}} = 0.5\Phi_0$ の場合について図 2 (b) に示す。この場合には完全に 2 次元周期ポテンシャルが実現されている。位相 ϕ が 2π で折り返して定義されており、かつゲート電圧が一種のゲージ場を表していることにより、この系を量子化するとゲート電圧によって選ばれ固定されたブロッホ波数におけるバンド構造が現れる [4]。

以下では小さなループを持つ SQUID 系に注目し、その古典運動とエネルギー準位統計について議論を行う。

3 古典運動とエネルギー準位統計

古典運動は、ハミルトニアン (2) から運動方程式を導き、それを解くことによって得られる。ここでは $E_{J,1} = E_{J,2} = E_{J,3} \equiv E_J$, $E_{C,1} = E_{C,2} = 0.002E_J$, $\Phi_{\text{ext}} = 0.5\Phi_0$ の値を採用した。エネルギーの原点をポテンシャルの最小値に合わせたとき、ポテンシャルの鞍点は $E = 0.5$ に、ポテンシャルの最大値は $E = 4.5$ となる。ここでは古典量子対応を考えたいので、古典的に位相が自由に拡散運動を起こすような領域、すなわち $E > 0.5$ の場合を考察する。

ゲート電圧 $(n_1^*, n_2^*) = (0, 0)$ における古典運動のポアンカレ断面をエネルギーを変えてプロットしたものが図 3(a) と (b) である。エネルギーがそれほど高くない場合 (E が 5 以下程度) は、ポアンカレ断面においてカオスの領域が優勢であることがわかる。これらの特徴はゲート電圧を変えても、また $E_{J,i}$ や $E_{C,i}$ などを変えても基本的に同じである。

次にこのカオスの兆候が系の量子力学にどのような影響を与えるかを調べるためにレベル統計を議論する。同じ物理パラメータを用いて、ハミルトニアン (2) を量子力学で取り扱い、エネルギー準位を求める。ゲート電圧から決まるパラメータ (n_1^*, n_2^*) のうち、 n_2^* は

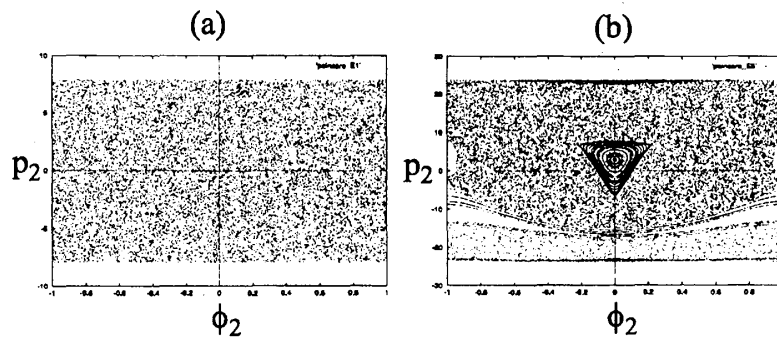


図 3: $\phi_1 = 0$ におけるポアンカレ断面: (a) $E = 1$, (b) $E = 5$.

0 に固定し、ゲート電圧 n_1^* を変化させた場合に得られるバンド構造を示したのが図 4(a) である。この図でははっきりしないが、 Γ 点、すなわち $(n_1^*, n_2^*) = (0, 0)$ にあたる部分とそこからはなれた部分では、レベルの分布が異なっている。この系における $0.5 < E < 4.5$ におけるレベル統計を、 $(n_1^*, n_2^*) = (0, 0)$ および $(n_1^*, n_2^*) = (0.25, 0)$ の二点についてプロットしたものが図 4(b), (c) である。 Γ 点においては、レベル統計は Poisson 分布に従っているのに対し、 Γ 点から離れた点においては、系のレベル統計は Wigner 分布に従っていることがわかる。また、ここには示していないが、ゲート電圧間を Γ 点から徐々に離していった場合には、レベル統計は Poisson 分布から Wigner 分布に滑らかに移行することも確認できる。

この系の古典運動はカオス的であることから、この系のレベル統計は基本的には Wigner 分布となることが予想される。しかしながら Γ 点においては系がパリティ反転対称性を持つため、異なるパリティのエネルギーレベルに相関がなくなり、レベル統計が見かけ上 Poisson 分布となったと考えられる。この系ではゲート電圧は精度よく制御できることから、パリティ対称性に起因するレベル統計の変化を、容易に制御できる系であるということができよう。

4 まとめと今後の課題

ここでは超伝導接合系において、古典論におけるカオス的振る舞いが、量子力学のレベル統計に与える影響を考察した。古典論では、この系はカオスの兆候を強く示すことを示し、系のレベル統計が基本的には Wigner 分布に従うことを確認した。またパリティ対称性によって、 Γ 点においてはレベル統計は Poisson 分布に従うことを示し、またゲート電圧によってレベル統計がこの二つの分布の間を滑らかに移行することを述べた。

最後に、この系の特徴をまとめてみよう。この系は、高エネルギー領域におけるバンド構造を調べるのに適した系であるということが出来る。バンド構造にみられるカオスの兆候は、例えば固体のバンド計算 [5] やフォトニックバンド計算 [6] において議論されているが、高エネルギーでのレベル統計の振る舞いを観測するのは容易ではないことが

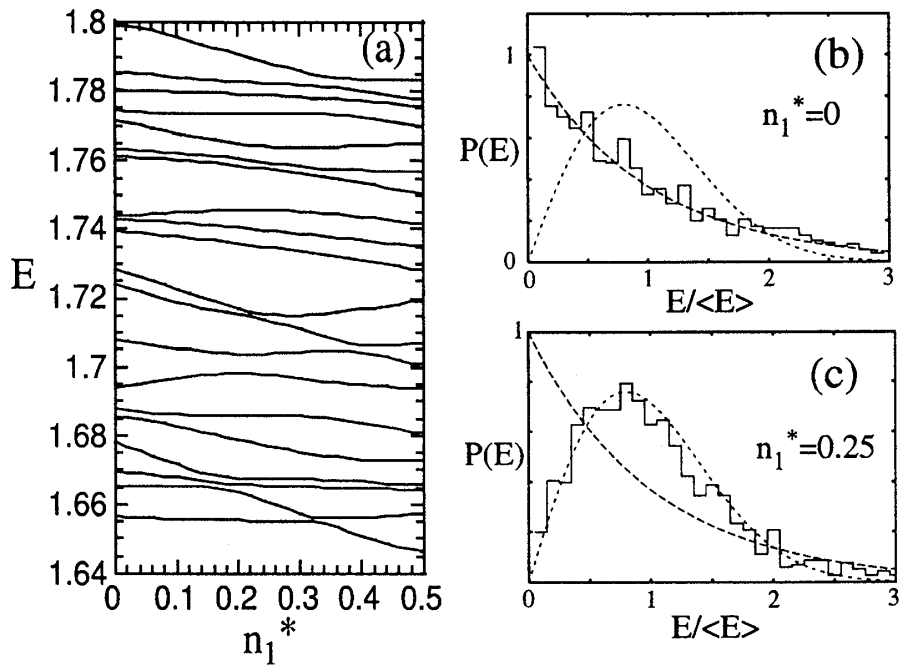


図 4: (a) $n_2^* = 0$ の時の $E = 1.7$ 付近におけるバンド構造, (b) $(n_1^*, n_2^*) = (0, 0)$ でのレベル統計, (c) $(n_1^*, n_2^*) = (0.25, 0)$ でのレベル統計,

予想される。よって SQUID 系は、バンド構造におけるレベル統計を具体的に検証することにより適した系ではないかと考えている。もう一つの特徴として、量子コンピュータへの応用が考えられていることからわかるように、この系は他の系に比べて量子ダイナミクスを議論することが容易である。ここではレベル統計のみを考察したが、カオスの兆候が量子ダイナミクスや応答関数などに与える影響を議論していくことができるのではないかと期待している。この点に関して詳しい理論な評価を行っていくことが、今後の課題である。

参考文献

- [1] Yu. Makhlin, S. Schön, and A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 357.
- [2] K. Tanimoto, T. Kato, and K. Nakamura, Phys. Rev. B 66, 012507 (2002).
- [3] 栗原進編「トンネル効果」(丸善, 1993 年)
- [4] T. P. Orland, J. E. Mooij, L. Tian, C. H. van der Wal, L. S. Levitov, S. Lloyd, and J. J. Mazo, Phys. Rev. B 60, 15398 (1999).
- [5] E.R. Mucciolo, R.B. Capaz, B.L. Altshuler, and J.D. Joannopoulos, Phys. Rev. B 50, 8245 (1994).
- [6] L. N. Gumen, J. Arriagab, and A. A. Krokhinb, Physica E 13 (2002) 459.