

$\Gamma_\alpha(s, X)$ と特殊函数

学習院大 理 三井孝美

1972 年のシンポジウムで、「函数のある拡張」と題して、Siegel の積分の拡張でもある $\Gamma_\alpha(s, X)$ を定義し、2 次の場合の性質を述べた。今度は、3 次の場合の $\Gamma_\alpha(s, X)$ の性質を調べてみよう。ただし、話を簡単にするために、はじめは $6\alpha^{-1} \neq \text{integer}$ を仮定しておく。

$\Gamma_\alpha(s, X)$ は

$$\Gamma_\alpha(s, X) = \int_{Y>0} |Y|^{s-1} e^{-\sigma(Y^\alpha X)} dY, \quad \alpha > 0, \quad \Re s > 0$$

により定義されるのであった。ここで Y^α は、 Y を

$$Y = U' \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} U \quad (U \text{ は直交行列})$$

と表わして

$$Y^\alpha = U' \begin{pmatrix} \lambda^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \nu^\alpha \end{pmatrix} U$$

により定義される。このパラメータは3個で、具体的には Euler 角による回転の表現を利用する。このパラメータを Φ, Θ, Ψ として、

$$\Gamma_{\alpha}(s, X) = \frac{4}{3} \sum' \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta d\Theta \int_0^{\pi/2} d\Psi$$

$$\times \int_{0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu} (\nu-\lambda)(\nu-\mu)(\mu-\lambda)(\lambda\mu\nu)^{s-1} e^{-a\lambda^{\alpha}-b\mu^{\alpha}-c\nu^{\alpha}} d\lambda d\mu d\nu$$

となる。 $\sum'$ は、 a, b, c のすべての順列にわたる和であり、 a, b, c は、 X と Φ, Θ, Ψ のある函数である。

λ, μ, ν をさらに極座標に変換して、変形すれば、

$$\Gamma_{\alpha}(s, X) = \frac{4}{3\alpha} \sum' \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{3s+3}{\alpha} + n\right)$$

$$\times \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta d\Theta \int_0^{\pi/2} \alpha^n h_n(s) d\Psi$$

$$+ \frac{4}{3} \sum' \Gamma\left(\frac{3s+3}{\alpha} + N\right) \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^{\pi/2} \sin\Theta d\Theta \int_0^{\pi/2} \Psi_N(s) d\Psi$$

を得る。 $2 \geq 2$

$$h_n(s) = \int_0^1 \frac{(1-v) v^{2s+\alpha n}}{(bv^{\alpha}+c)^{n+3(s+1)/\alpha}} dv \int_0^1 (1-u)(1-vu) u^{s-1+\alpha n} du$$

$\Psi_N(s)$ は $\Re s > \max(-\alpha_N, -(\alpha_{N+1})/2)$ で正則な
 函数であり、一方 $\Gamma_N(s)$ は meromorphic であるから、
 $\Gamma_\alpha(s, X)$ も meromorphic であることがわかり、その pole
 の位置や residue などを調べることもできる。

例3)は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \Gamma_\alpha(-1+\varepsilon, X) = 2\pi^2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-1} \Gamma_\alpha(s, X) &= \frac{4}{\alpha} \sum' \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &\times \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{3} \log(bc(b+c)^2) - \frac{\alpha b}{3(b+c)(1-\alpha)} F(1, 1, 2-\frac{1}{\alpha}; \frac{b}{b+c}) \right. \\ &\left. + \frac{\alpha b}{3(b+c)(1+\alpha)} F(1, 1, 2+\frac{1}{\alpha}; \frac{b}{b+c}) - \gamma \right\} d\varphi \end{aligned}$$

${}_2F_2$ $F(a, b, c; z)$ は Gauss の超幾何級数であり、
 γ は Euler の常数である。

これらをさらに具体的に計算することは、非常に困難であ
 るが、特に $X=E$ (単位行列) の場合には計算が簡単にな
 る。さらにこのときは、 $\Gamma_\alpha(s, E)$ がある函数等式をみた
 すので、これを利用して、留数を次々に求めていくことも
 できる。実際計算してみると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} \Gamma_{\alpha}(s, E) &= \frac{\alpha^3}{2} \Gamma_{\alpha}(\alpha, E) + \frac{2\pi^2}{\alpha^2} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) (2^{-1/\alpha} - 2^{1/\alpha}) \\ &\quad + \frac{\pi^2}{\alpha} 2^{-3/\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_{s=-1/2} \Gamma_{\alpha}(s, E) = -\frac{2\pi^2}{\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{2\alpha}\right)$$

$$\operatorname{Res}_{s=-\frac{1+\alpha}{2}} \Gamma_{\alpha}(s, E) = \frac{2\pi^2}{\alpha(1-\alpha^2)} \Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$\operatorname{Res}_{s=-2} \Gamma_{\alpha}(s, E) = \frac{\alpha^3}{2} \Gamma_{\alpha}(\alpha-2, E)$$

$$+ \frac{2^{1+1/\alpha} \pi^2}{\alpha^2} (2^{1/\alpha} - 1) \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(-\frac{2}{\alpha}\right) + \frac{\pi^2}{\alpha} 2^{3/\alpha} \Gamma\left(-\frac{3}{\alpha}\right)$$

$$\operatorname{Res}_{s=-1-\alpha/2} \Gamma_{\alpha}(s, E) = \frac{2^5 \pi^{2+1/2}}{\alpha(4-\alpha^2)}$$

$$\operatorname{Res}_{s=-3/2} \Gamma_{\alpha}(s, E) = -\frac{2\pi^2}{\alpha} \Gamma\left(-\frac{3}{2\alpha}\right)$$

$$\operatorname{Res}_{s=-\frac{3+\alpha}{2}} \Gamma_{\alpha}(s, E) = \frac{2^3 \pi^2}{\alpha(1-\alpha^2)} \Gamma\left(-\frac{3+\alpha}{2\alpha}\right)$$

§ 12

$$\operatorname{Res}_{s=-\alpha n} \Gamma_{\alpha}(s, E) = \frac{\alpha^2}{n(1-\alpha n)(2-\alpha n)} \operatorname{Res}_{s=-\alpha(n-1)} \Gamma_{\alpha}(s, E) +$$

$$+ \frac{(-1)^n \pi^2 2^{1+2n-3/\alpha}}{\alpha(1-\alpha n)(2-\alpha n)n!} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha} - 2n\right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

などが得られる。

$s = -1$ は order が 2 の pole であり、 $z = z^*$ は

$$\operatorname{Res}_{s=-1} \Gamma_\alpha(s, E) = \frac{2\pi^2}{\alpha} \left\{ 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha n}{\alpha^2 n^2 - 1} - 2 \log 2 - 3\gamma \right\}$$

これと、函数等式から得られる $\operatorname{Res}_{s=-1}$ を比較して

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha(\alpha-1, E) &= \frac{2\pi^3}{\alpha^4} (2^{1/\alpha} - 2^{-1/\alpha}) \frac{1}{\sin \pi/\alpha} \\ &+ \frac{2\pi^2}{\alpha^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha n}{\alpha^2 n^2 - 1} \end{aligned}$$

を得る。

以上のほか、特に $\Gamma_\alpha(1, E)$ の値は、分割問題に関係するものであって、それをお求めみると、

$$\Gamma_2(1, E) = \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{16} \pi^2,$$

$$\Gamma_3(1, E) = \frac{4\pi^2}{9} \left\{ \log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} (2^{2/3} - 2^{1/3}) \left(\tan^{-1} \frac{2^{1/3} - 1}{\sqrt{3}} + \frac{3\pi}{4} \right) \right\}$$

などが得られる。

今度は α の仮定を変えて, $\alpha^{-1} = m = \text{integer}$ の場合を考えると, 次の結果が得られる:

X の固有値の基本対称式を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とし ($\sigma_1 = \sigma(X)$, $\sigma_3 = |X|$ である),

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1}{3 \sigma_3^{1/3}}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma_2}{3 \sigma_3^{2/3}}$$

とおくとき,

$$\Gamma_{\frac{1}{m}}(s, X) = \pi^2 \frac{m^3}{2^{2ms}} \Gamma(2ms) \Gamma(ms+1) |X|^{-ms-m}$$

$$\times \sum_{i+2j \leq 3m-3} P_{ij}^{(m)}(s) \delta_1^i \delta_2^j$$

ここで $P_{ij}^{(m)}$ は s の多項式で, 次数は $3m-3$ を越えない, 例をあげれば

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(s, X) = 2^{1-4s} \pi^2 \Gamma(2s) \Gamma(4s+3)$$

$$\times \left\{ 2(9\delta_1\delta_2 - 1)s^5 + 3(6\delta_1\delta_2 - 1) \right\} |X|^{-2s-2}$$

$$\Gamma_{\frac{1}{3}}(s, X) = 2^{-2-6s} 3^4 \pi^2 \Gamma(3s) \Gamma(6s+3)$$

$$\times (3s+2) \left\{ 3^5 \left(3s^3 + \frac{17}{2}s^2 + \frac{15}{2}s + 2 \right) \delta_1^2 \delta_2^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -3^5 \left(s^3 + 3s^2 + \frac{11}{4}s + \frac{3}{4} \right) \delta_1^3 \\
& -3^3 \left(3^2 s^3 + 3^3 s^2 + 26s + 8 \right) \delta_2^3 \\
& -3^2 (12s^2 + 5s - 3) \delta_1 \delta_2 - 1 \quad \Bigg\}
\end{aligned}$$

n 以上 いくつかの結果 n 外にも, $\Gamma_\alpha(s, X)$ の問題として,
 例えば、留数和の問題, Mellin 変換に対応するような変換
 の問題, $\Gamma_\alpha(s, X)$ の s を多変数に拡張する問題などが考えら
 れるか, いづれもまだ発端だけであって, はっきりした線ま
 で到達してはいない。そこですべて省略し, またの機会
 をまつことにしたい。