

$Sp(p, \mathbb{R})$ の不連続部分群の cohomology について.

大阪府立大学 今野泰子 (Yasuko Konno)

§1. cohomology の消滅定理

G を、連結な半単純リー群で、center が有限、compact factor をもたないものとし、 Γ をその不連続部分群で、 $\Gamma \backslash G$ が compact なものとする。有限次元既約 G -module $(\mathfrak{g}, F)$ が与えられたとき、 Γ の F に係数をもつ cohomology $H^*(\Gamma, F)$ を問題にする。

よく知られているように、 $H^*(\Gamma, F)$ は G のリー環 $\mathfrak{g}$ の relative Lie algebra cohomology を用いて表わされる。 K を、 G の極大 compact 部分群とする。 G の unitary dual を $\hat{G}$ とし、 $\hat{G}$ の各元 (π, H_π) に対して、右正則表現 $(\pi_\Gamma, L^2(\Gamma \backslash G))$ における π の重複度を $m(\pi, \Gamma)$ とあらわす。このとき、一般化された松嶋-村上の式より

$$H^*(\Gamma, F) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi, \Gamma) H^*(\mathfrak{g}, K; H_\pi^0 \otimes F) \quad (1.1)$$

である ([1], VII)。ここで、 H_π^0 は H_π の K -finite vector の作る既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -module ((π, H_π) の Harish-Chandra module) をあらわし、右辺の和は、実際は有限和である。

この式によって $H^*(\Gamma, F)$ を調べようとすれば、次の二つが問題となる。

(I). ある F に対して、 $H^*(\mathfrak{g}, k; H_{\mathbb{C}}^0 \otimes F)$ キヨト となるような $\pi \in \hat{G}$ を特徴づけ、そのような π に対して $(\mathfrak{g}, k)$ -cohomology を決定すること。

(II). (I) の π に対して、 $m(\pi, \Gamma)$ を決定すること。

(I) は、 Γ に無関係な G のみに関する問題で、Parthasarathy, Enright, Kumaresan, Borel-Wallach などの研究をもとに Vogan-Zuckerman によって、ほぼ完全に解かれている。(II) については、discrete series に対して以外、一般に、具体的にはほとんどわかっていない。その点からも、(II) の問題についての情報を与える $H^*(\Gamma, F)$ を知ることは、興味がある。

さて、(I) の問題に関する結果から、次の消滅定理が得られている。以下、 G は単純であると仮定する。 θ を $\mathfrak{g}$ の Cartan involution とし、対応する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}$ とする。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{p}$ に対し、その nilradical を $\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$ と書く。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のすべての θ -stable ([2], p. 57 の意味で) な parabolic subalgebra $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ について、 $\dim(\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ の最小値を r_G とする。このとき、

定理 (Vogan-Zuckerman, [2]) $(\pi, H_{\mathbb{C}}) \in \hat{G}$ が trivial

表現でないとき、任意の $(\mathfrak{g}, F)$ に対して、

$$H^i(\mathfrak{g}, k; H_{\mathbb{C}}^0 \otimes F) = \{0\} \quad (i < \gamma_G).$$

従って、(1.1) より、任意の Γ に対して、

$$H^i(\Gamma, F) = H^i(\mathfrak{g}, k; F) \quad (i < \gamma_G).$$

特に、 $(\mathfrak{g}, F)$ が trivial 表現でないとき、

$$H^i(\Gamma, F) = \{0\} \quad (i < \gamma_G).$$

ところで、 γ_G は、一般に、 $\gamma_G \geq \text{rank}_{\mathbb{R}} G$ をみたし、個々の G について計算されている。実際、 $\gamma_G > \text{rank}_{\mathbb{R}} G$ となる G もあり、従って、この定理は、それ以前に知られていた $\text{rank}_{\mathbb{R}} G$ 未満の次数の消滅定理の精密化となっている。

§2. $Sp(p, \mathfrak{g})$ に対する非消滅の結果

上記の消滅定理は、最良のものだろうか。Kaghdan と Shimura は、独立に、 $G = SU(p, 1)$ ($\gamma_G = \text{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$) に対して、 $H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \neq \{0\}$ となる Γ の存在を示した。その方法を一般化して、Borel-Wallach は、 $G = SU(p, \mathfrak{g})$ ($p \geq \mathfrak{g} \geq 1$, $\gamma_G = \text{rank}_{\mathbb{R}} G = \mathfrak{g}$) の場合に、 $H^{\mathfrak{g}}(\Gamma, F) \neq \{0\}$ となる F (trivial 表現でないもの) と Γ の存在を示している。

ここでは、 $G = Sp(p, \mathfrak{g})$ ($p \geq \mathfrak{g} \geq 1$) の場合をとりあげる。この場合、 $\gamma_G = 2\mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} G = \mathfrak{g}$ であり、それ故、消

減定理が最良かどうか、興味深い。

得られた結果をのべよう。以下、 $G = Sp(p, q)$ とし、 $p+q = n$ とおく。 G は次のように、 $GL(2n, \mathbb{C})$ の中に実現される。

$$G = \{ g \in Sp(n, \mathbb{C}) \mid {}^t g \cdot K_{p,q} \cdot g = K_{p,q} \} \quad (2.1)$$

$$\text{但し、} K_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 & & \\ & 0 & -1_q & \\ & & & \\ 0 & & 1_p & 0 \\ & & & 0 & -1_q \end{pmatrix}$$

又、 $K = G \cap U(2n)$ とする。 $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$ に対して、 G の $\mathbb{C}^{2n}$ 上の standard 表現の l 次対称積表現を (ρ_l, F_l) 、その反傾表現を (ρ_l^*, F_l^*) とする。このとき、次の二つの定理を得た。

定理 1 $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$ に対して、 $H^{2q}(G, K; H_{\mathbb{C}}^0 \otimes F_l^*) \neq \{0\}$ となる trivial でない $(\pi, H_{\pi}) \in \hat{G}$ が存在する。

定理 2 $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$ に対して、 $H^{2q}(\Gamma, F_l^*) \neq \{0\}$ となる Γ が存在する。

定理 1, 2 において、 π , Γ は勿論 l に依存する。 $l=0$ の場合、すなわち、 (ρ_l^*, F_l^*) が trivial 表現の場合、 $Sp(p, 1)$ に対しては、定理 1 は、Collingwood と Silva の結果の中に含まれている。又、 $Sp(p, q)$ ($q \geq 1$) に対して、同様に $l=0$ の場合に

Millson - Raghunathan は、48 次 cohomology について
定理 1, 2 と同様の π, Γ の存在を示している。

以下の節で、定理 1, 2 の証明の概略をのべよう。方法は
Borel - Wallach が、 $SU(p, q)$ に対して用いたと同じ方法で、
又、その結果も大いに使う。

§ 3. 定理 1 の表現の構成.

どのような表現をみつけられようかについて、次の命題が
指針を与える。一般に、§ 1 の記号の下で、 $\mathfrak{g}$ の Casimir 要
素を Ω とすれば、 $\pi(\Omega), \rho(\Omega)$ はそれぞれ scalar 作用素となる。
 $\pi(\Omega) = C_\pi \cdot \text{id.}, \rho(\Omega) = C_\rho \cdot \text{id.}$ ($C_\pi, C_\rho \in \mathbb{C}$) とすれば、

命題 ([1], II) すべての $i \in \mathbb{Z}, i \geq 0$ に対して、

(1). $C_\pi \neq C_\rho$ ならば、 $H^i(\mathfrak{g}, K; H_\pi^0 \otimes F) = \{0\}$.

(2). $C_\pi = C_\rho$ ならば、 $H^i(\mathfrak{g}, K; H_\pi^0 \otimes F) = \text{Hom}_K(\wedge^i \mathfrak{p}, H_\pi^0 \otimes F)$.

従って、定理 1 を示すには、与えられた $l \in \mathbb{Z}, l \geq 0$ に対し

$$C_\pi = C_{\rho_l^*} = \frac{1}{4(n+1)} l(l+2n) \quad (3.1)$$

$$\text{Hom}_K(\wedge^{2l} \mathfrak{p}, H_\pi^0 \otimes F_l^*) \neq \{0\} \quad (3.2)$$

をみたす $\pi \in \hat{G}$ をみつけられよう。

既約ユニタリ表現を具体的に与える一つの方法として、

G を $Sp(m, \mathbb{R})$ に埋めこむことによって、Weil 表現の制限から得る方法がある。 G は、次のようにして $Sp(2n, \mathbb{R})$ に埋めこまれる。まず (2.1) より、 G は、 $K_{p,q}$ によって与えられる $\mathbb{C}^{2n}$ 上の signature $(2p, 2q)$ の hermitian form h_0 を不変にし、従って自然に、埋めこみ $\phi: G \longrightarrow SU(2p, 2q)$ がある。更に h_0 を $\mathbb{R}^{4n}$ 上の bilinear form とみるとき、 $SU(2p, 2q)$ は、 $GL(4n, \mathbb{R})$ の部分群として、 h_0 の虚数部分である alternating bilinear form を不変にする。すなわち、埋めこみ $\psi: SU(2p, 2q) \longrightarrow Sp(2n, \mathbb{R})$ がある。このようにして、埋めこみ $\psi \circ \phi: G \longrightarrow Sp(2n, \mathbb{R})$ が得られる。以後、 $SU(2p, 2q)$ を G' と書き、 $K' = G' \cap U(2n)$ とする。明らかに、 $\phi(K) \subset K'$ である。

$Sp(2n, \mathbb{R})$ の二重の covering group (metaplectic group) を $M_p(2n, \mathbb{R})$ とし、 $M_p(2n, \mathbb{R})$ の Weil 表現を $(W, L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ とする。[1], VIII, §2 より、 ψ は $M_p(2n, \mathbb{R})$ への準同型 $\tilde{\psi}: G' \longrightarrow M_p(2n, \mathbb{R})$ に持ちあげられる。そこで、 $U = W \circ \tilde{\psi} \circ \phi$, $V = W \circ \tilde{\psi}$ と定義すれば、それぞれ G, G' のユニタリ表現 $(U, L^2(\mathbb{R}^{2n}))$, $(V, L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ が得られる。この表現を既約分解しよう。今、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1_{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{2q} \\ 1_{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{2q} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{ap}(2n, \mathbb{R})$$

をとり、exponential mapping $\text{Exp}: \mathfrak{ap}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow M_p(2n, \mathbb{R})$

によって, one-parameter subgroup $\{ \exp tM \mid t \in \mathbb{R} \}$ を考えれば, $W(\exp tX)$ ($t \in \mathbb{R}$) は, $U(G), V(G')$ のすべての元と可換である。そこで, $\{ W(\exp tX) \mid t \in \mathbb{R} \}$ に関する分解を考えればよい。
 $r \in \mathbb{Z}$ に対して, $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ の閉部分空間 H_r を,

$$H_r = \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n}) \mid W(\exp tM) \varphi = e^{-\sqrt{-1}(P-Q+r)t} \varphi \}$$

と定義すれば, $L^2(\mathbb{R}^{2n}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} H_r$ (unitary direct sum) となっている。 H_r は $U(G)$ -不変, $V(G')$ -不変だから,

$$U_r(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})|_{H_r} \quad (\mathfrak{g} \in G), \quad V_r(\mathfrak{g}') = V(\mathfrak{g}')|_{H_r} \quad (\mathfrak{g}' \in G')$$

と定義すれば, G, G' の unitary 表現 $(U_r, H_r), (V_r, H_r)$ が得られる。

ところで, G' の表現 (V_r, H_r) については, Borel-Wallach が, 既約となることを示しており, その Harish-Chandra module H_r^0 についても詳しく調べている。勿論, G の表現 (U_r, H_r) に関して, H_r^0 は $(\mathfrak{g}, k)$ -module ともなるが, その $(\mathfrak{g}, k)$ -module としての構造を具体的に調べることができる。今, 通常のように, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ として, 対角行列からなるものを取り, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ の通常の基底とすれば, k の dual $\hat{k}$ は,

$$\left\{ \lambda = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \begin{array}{l} a_1 \geq \dots \geq a_p \geq 0 \\ a_{p+1} \geq \dots \geq a_n \geq 0 \end{array} \right\}$$

と 1 対 1 に対応している。highest weight λ の既約 k -module

を $(\bar{E}_\lambda, E_\lambda)$ と書くとき、 H_r^0 の K -type は次のようになる。

命題 1 各 $r \in \mathbb{Z}$ に対し、 K -module として、

$$H_r^0 = \bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ s \geq 0, -r}} E_{(r+s)\lambda_1 + s\lambda_{p+1}}.$$

更に、 H_r^0 上の $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の作用を、 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の基底の一つ一つのエについて具体的に調べることによって、次の二つの命題が得られる。

命題 2 各 $r \in \mathbb{Z}$ について、 G の表現 (U_r, H_r) は既約であり、その Harish-Chandra module は、 G' の表現 (V_r, H_r) の Harish-Chandra module H_r^0 と一致する。

命題 3 各 $r \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$U_r(\Omega) = \frac{1}{4(n+1)} (r+2p)(r-2q) \cdot \text{id}.$$

さて、これらの命題から、定理 1 の表現を、上で得られた一連の表現 $\{(U_r, H_r) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ の中からみつけることができる。与えられた $l \in \mathbb{Z}$ ($l \geq 0$) に対して、 $r = l + 2q$ に対応する表現 (U_{l+2q}, H_{l+2q}) をとれば、これが、(3.1), (3.2) をみたすことは、容易に示される。

§ 4. (U_r, H_r) の $L^2(\frac{G}{\Gamma})$ への埋めこみ.

定理 2 の証明についてのべよう。定理 2 は、次の命題を示すことにより、定理 1 と (1.1) から得られる。

命題 4 各 $r \in \mathbb{Z}$ に対して、 $m(U_r, \Gamma) \neq 0$ となるような G の *cocompact* 不連続部分群 Γ が存在する。

そこで、以下、命題 4 の証明についてのべる。実は、Borel - Wallach が、 G' とその表現 (V_r, H_r) に関して同様の結果、 $m(V_r, \Gamma') \neq 0$ となる G' の *cocompact* な不連続部分群 Γ' の存在を示している。我々の群 G の表現 (U_r, H_r) は、埋めこみ $\psi: G \rightarrow G'$ を通じて、 (V_r, H_r) から得られており、 V_r に対する Γ' の存在から、 U_r に対する Γ の存在を導びくことが期待される。実際、 (U_r, H_r) と (V_r, H_r) の Harish-Chandra module が一致することを使って、次の補題が示される。

補題 Γ, Γ' は、それぞれ、 G, G' の *cocompact* 不連続部分群で、 $\psi(\Gamma) \subset \Gamma'$ であるとする。このとき、

$$\text{Hom}_G(H_r, L^2(\frac{G}{\Gamma})) \neq \{0\} \quad \text{ならば} \quad \text{Hom}_{G'}(H_r, L^2(\frac{G'}{\Gamma'})) \neq \{0\}.$$

従って、Borel - Wallach の構成した Γ' に対し、 $\psi(\Gamma) \subset \Gamma'$ と

なる Γ を与えればよい。これらの部分群は arithmetic に構成される。今 m を奇素数とし $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $k' = k(\sqrt{-1})$ とする。 $k/\mathbb{Q}$ の Galois 群を $\{1, \sigma\}$ とする。 $(k')^{2n}$ 上の alternating bilinear form b , hermitian form h を次の行列で与えられるものとする。

$$b: \begin{pmatrix} & & 1_p & 0 \\ & 0 & & \\ -1_p & & 0 & \sqrt{m}1_p \\ & \sqrt{m}1_p & & 0 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} 1_p & 0 & & \\ 0 & \sqrt{m}1_p & & \\ & & 1_p & 0 \\ 0 & & 0 & \sqrt{m}1_p \end{pmatrix}$$

ここで h は signature $(2p, 2q)$, h の σ による共役 ${}^{\sigma}h$ は正定値となつてゐる。 h, b に対して $GL(4n, \mathbb{C})$ 内の k 上定義された代数群 G, G' で

$$G(k) = \left\{ g \in SL(2n, k') \mid \begin{array}{l} h(g \cdot z, g \cdot w) = h(z, w) \\ b(g \cdot z, g \cdot w) = b(z, w) \end{array} \quad z, w \in (k')^{2n} \right\}$$

$$G'(k) = \left\{ g \in SL(2n, k') \mid h(g \cdot z, g \cdot w) = h(z, w) \quad z, w \in (k')^{2n} \right\}$$

と与えられるものが構成される。このとき、自然に k 上定義された埋めこみ $\phi: G \rightarrow G'$ があり、 $G(\mathbb{R}) = Sp(p, q) = G$, $G'(\mathbb{R}) = SU(2p, 2q) = G'$ となつてゐる。更に $(k')^{2n} = (k)^{4n}$ とみて、 h の虚数部分である $(k)^{4n}$ 上の alternating bilinear form β によつて k 上定義される代数群 Sp_{2n} を考えれば、自然に k 上定義された埋めこみ $\phi': G' \rightarrow Sp_{2n}$ がある。

このようにして、 $\mathbb{R}$ 上定義された代数群と埋めこみの列

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\phi} & G' & \xrightarrow{\phi'} & Sp_{2n} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & Sp(2n, \mathbb{R}) \end{array}$$

がえられる。この G, G' の $Sp(2n, \mathbb{R})$ への埋めこみは、 $\mathbb{R}$ 上の *conjugation* を除いて、与えられたものと一致している。

ここで、体を $\mathbb{Q}$ に restrict する functor $Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ を用いてすべてを $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群と埋めこみという設定に移そう。 $\mathcal{G} = Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} G$, $\mathcal{G}' = Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} G'$, $\Psi = Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \phi$, $\Psi' = Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \phi'$ とすれば、 $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群と埋めこみの列

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}' \xrightarrow{\Psi'} Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} Sp_{2n}$$

が得られる。更に、 $\mathbb{Q}^{8n}$ 上の alternating bilinear form $\beta_{\mathbb{Q}} = Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \beta$ によって定義される $\mathbb{Q}$ 上の代数群 Sp_{4n} を考えれば、 $Res_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} Sp_{2n}$ は、自然に Sp_{4n} の部分群であり、埋めこみの列は、

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{G}' & \xrightarrow{\Psi'} & Sp_{4n} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathcal{G}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{G}'(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Sp_{4n}(\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathcal{G}(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathcal{G}'(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & Sp_{4n}(\mathbb{Q}) \end{array}$$

と考えられる。ところで、 $\mathbb{R}$ 上では、次の同型がなりたつ。

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\cong G \times {}^{\sigma}G, & \mathcal{G}' &\cong G' \times {}^{\sigma}G', \\ \mathcal{G}(\mathbb{R}) &\cong G \times Sp(n), & \mathcal{G}'(\mathbb{R}) &\cong G' \times SU(2n). \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma_G, \sigma_{G'}$ は、それぞれ G, G' の σ による conjugation である。しかも、この同型の下で、 $\Phi = \phi \times \sigma \phi$ となっている。この同型による $\mathfrak{g}(R), \mathfrak{g}'(R)$ の G, G' への projection を、それぞれ、 $p: \mathfrak{g}(R) \rightarrow G, p': \mathfrak{g}'(R) \rightarrow G'$ とする。

$\mathbb{Q}$ 上の代数群の arithmetic subgroup に関するよく知られた議論によって、 $\mathfrak{g}(\mathbb{Q}), \mathfrak{g}'(\mathbb{Q})$ の arithmetic subgroup は、それぞれ、 $\mathfrak{g}(R), \mathfrak{g}'(R)$ の cocompact 不連続部分群となり、それらを p, p' によって G, G' へ移すことにより、 G, G' の cocompact 不連続部分群が得られる。Borel-Wallach の議論に従って、今、次のように $\mathfrak{g}(\mathbb{Q}), \mathfrak{g}'(\mathbb{Q})$ の arithmetic subgroup をとる。 Sp_{4n} を定義する $\beta_{\mathbb{Q}}$ が通常 of 形となるような $\mathbb{Q}^{8n}$ の基底をとり、この基底に関して Sp_{4n} を $GL(8n, \mathbb{Q})$ の中に実現しておく。従って、 $Sp_{4n}(R) = Sp(4n, R)$ である。このとき、

$$\mathfrak{g}(\mathbb{Z}) := \{ g \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q}) \mid \Phi \circ \Phi(g) \in Sp(4n, \mathbb{Z}) \}$$

$$\mathfrak{g}'(\mathbb{Z}) := \{ g \in \mathfrak{g}'(\mathbb{Q}) \mid \Phi'(g) \in Sp(4n, \mathbb{Z}) \}.$$

と定義し、 $\Gamma_0 = p(\mathfrak{g}(\mathbb{Z})), \Gamma'_0 = p'(\mathfrak{g}'(\mathbb{Z}))$ とおれば、 Γ_0, Γ'_0 は G, G' の cocompact 不連続部分群である。 $\mathfrak{g}(\mathbb{Z}), \mathfrak{g}'(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Δ, Δ' に対し、 Γ_0, Γ'_0 の有限指数をもつ部分群 $\Gamma = p(\Delta), \Gamma' = p'(\Delta')$ を、 Γ_0, Γ'_0 の合同部分群とよぶことにする。Borel-Wallach は、 $Sp(4n, \mathbb{Z})$ の合同部分群に関する議論と、"theta distribution" を使った議論によって、次の結果を示した。

定理 (Borel-Wallach, [1], VIII) 各 $r \in \mathbb{Z}$ に対して, Γ_0 の合同部分群 Γ' で, $\text{Hom}_{G'}(H_r, L^2(\frac{G'}{\Gamma'})) \neq \{0\}$ となるものがある.

そこで, 我々の群 G に対しては, 次のように Γ を構成すればよい。上の定理において, $\Gamma' = P'(\Delta')$ (Δ' は $G'(\mathbb{Z})$ の合同部分群) とする。埋めこみ $\varpi: G \rightarrow G'$ は $\mathbb{Q}$ 上定義されているから, ある $G(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Δ で $\varpi(\Delta) \subset \Delta'$ となるものが存在する。このとき, $\Gamma = P(\Delta)$ とすれば, Γ は G の cocompact 不連続部分群で, $\varphi(\Gamma) \subset \Gamma'$ をみたしている。従って, 補題より, 命題 4 が導かれる。

—— 引用文献 ——

- [1]. A. Borel, N. Wallach : Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups.
Ann. Math. Studies, No 94, Princeton Univ. Press, 1980.
- [2]. D.A. Vogan, Jr, G.J. Zuckerman : Unitary representations with non-zero cohomology, Comp. Math. 53 (1984), 51-90.