

# 偶数次直交群の有限型多重旗多様体

龍谷大学 文学部 松木 敏彦

Toshihiko Matsuki

Faculty of Letters, Ryukoku University

## Abstract

標数  $\neq 2$  の無限体  $\mathbb{F}$  上の偶数次 split 直交群  $G$  の有限型多重旗多様体の分類を行なう。ただし、多重旗多様体  $\mathcal{M} = G/P_1 \times \cdots \times G/P_k$  上の  $G$  の対角作用による軌道が有限個のとき、 $\mathcal{M}$  は有限型であるという。

$\mathbb{F}$  は標数  $\neq 2$  の可換無限体とする。 $\mathbb{F}^{2n}$  上の対称双線形形式  $(\ , \ )$  を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i, 2n+1-j}$$

で定義する。ただし、 $e_1, \dots, e_{2n}$  は  $\mathbb{F}^{2n}$  の標準基底とする。split 直交群を

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^{2n}\}$$

で定義する。本稿では便宜的に  $G = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{F})$  と表わそう。split 特殊直交群

$$G_0 = \{g \in G \mid \det g = 1\} (= \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{F}))$$

も定義でき、 $G = G_0 \sqcup \mathrm{diag}(I_{n-1}, J_2, I_{n-1})G_0$  である。ただし、 $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とする。

正整数の列  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$  ( $a_1 + \cdots + a_p \leq n$ ) に対し、 $G$  の旗多様体  $M_{\mathbf{a}}$  が

$$M_{\mathbf{a}} = \{V_1 \subset \cdots \subset V_p \mid V_j \text{ は } \mathbb{F}^{2n} \text{ の部分空間,} \\ \dim V_j = a_1 + \cdots + a_j, (V_p, V_p) = \{0\}\}$$

で定義される。

多重旗多様体  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k} = M_{\mathbf{a}_1} \times \cdots \times M_{\mathbf{a}_k}$  に  $G$  の対角作用

$$g(m_1, \dots, m_k) = (gm_1, \dots, gm_k) \quad (g \in G, m_j \in M_{\mathbf{a}_j})$$

が定義される。

問題  $|G \backslash \mathcal{M}| < \infty$  となるための  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  の条件を求めよ。 ( $|G \backslash \mathcal{M}| < \infty$  となる多重旗多様体  $\mathcal{M}$  は有限型であるという。)

注意 1 (i) 奇数次の split 直交群について、この問題は [M15] で解かれた。

(ii) Magyar, Weyman and Zelevinsky [MWZ99] は一般線形群についてこの問題を解決した。

(iii) [MWZ00] はシンプレクティック群についてこの問題を解決した。ただし、 $\mathbb{F}$  は代数的閉体とする。

本稿では、この問題の解決について報告する。詳細は [M18] に発表予定である。まず、次のことが成り立つ。

**命題 2**  $n \geq 2$ ,  $k \geq 4$  のとき、 $|G \backslash \mathcal{M}| = \infty$

従って、以下では 3 重旗多様体  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} = M_{\mathbf{a}} \times M_{\mathbf{b}} \times M_{\mathbf{c}}$  を考察すればよい。ただし

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$$

とする。(注:  $k = 2$  のとき、 $G \backslash \mathcal{M}$  は  $G$  の Bruhat 分解に帰着する。)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の順番を入れ替えることにより、

$$p \leq q \leq r$$

と仮定してよい。

**命題 3**  $n \geq 3$ ,  $|G \backslash \mathcal{T}| < \infty$  のとき、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  のうちのどれかは (1) または  $(n)$  である。

従って

$$\mathbf{a} = (1) \text{ or } (n), \quad q \leq r. \quad (1)$$

と仮定してよい。

**命題 4**  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{a} = (1)$ ,  $q \geq 2$ ,  $|G \backslash \mathcal{T}| < \infty$  のとき、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のどちらかは  $(k, n-k)$  with some  $k$  である。

従って、必要に応じて  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  を入れ替えることにより、

$$\mathbf{a} = (1) \text{ and } q \geq 2 \implies \mathbf{b} = (k, n-k) \quad (2)$$

と仮定してよい。

**命題 5**  $n \geq 4$ ,  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $q \geq 2$ ,  $|G \backslash \mathcal{T}| < \infty$  のとき、 $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のどちらかは

$$(1, 1), \quad (1, n-1) \quad \text{または} \quad (n-1, 1)$$

である。

従って、必要に応じて  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  を入れ替えることにより、

$$\mathbf{a} = (n) \text{ and } q \geq 2 \implies \mathbf{b} = (1, 1), (1, n-1) \text{ or } (n-1, 1) \quad (3)$$

と仮定してよい。

次の命題は体  $\mathbb{F}$  の性質による条件を与える。

**命題 6**  $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$  のとき、次の 3 つの場合について  $|G \backslash \mathcal{T}| = \infty$  である。

(i)  $\max(a_1, b_1, c_1) < n$  (Proposition 1.4 in [M15]).

(ii)  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $q, r \geq 2$  and  $\max(b_1 + b_2, c_1 + c_2) < n$ .

(iii)  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $\mathbf{b} = (b)$  with  $3 \leq b \leq n - 2$ ,  $r \geq 4$  and  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 < n$ .

従って、次の 3 条件を仮定してよい。

$$\max(a_1, b_1, c_1) < n \implies |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty. \quad (4)$$

$$\mathbf{a} = (n), q, r \geq 2 \text{ and } \max(b_1 + b_2, c_1 + c_2) < n \implies |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty. \quad (5)$$

$$\mathbf{a} = (n), \mathbf{b} = (b) \text{ with } 3 \leq b \leq n - 2, r \geq 4, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 < n \\ \implies |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty. \quad (6)$$

偶数次直交群の有限型 3 重旗多様体は次のように分類される。<sup>\*1</sup>

**定理 7** (1), ..., (6) を仮定する。このとき、 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$  が有限型であるための必要十分条件は  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  が次の 7 つの条件のどれかを満たすことである。

(I-1)  $\mathbf{a} = (1)$  and  $q = 1$ .

(I-2)  $\mathbf{a} = (1)$  and  $\mathbf{b} = (k, n - k)$ .

(II)  $\mathbf{a} = (n)$  and  $\mathbf{b} = (1), (2), (3), (n - 1), (n), (1, 1), (1, n - 1)$  or  $(n - 1, 1)$ .

(III-1)  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $\mathbf{b} = (b)$  with  $4 \leq b \leq n - 2$  and  $r = 1$ .

(III-2)  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $\mathbf{b} = (b)$  with  $4 \leq b \leq n - 2$  and  $r = 2$ .

(III-3)  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $\mathbf{b} = (b)$  with  $4 \leq b \leq n - 2$  and  $\mathbf{c}$  is one of

$$(1, k, n - k - 1), (k, 1, n - k - 1), (k, n - k - 1, 1), \\ (1, 1, k), (1, k, 1) \text{ or } (k, 1, 1).$$

(III-4)  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $\mathbf{b} = (b)$  with  $4 \leq b \leq n - 2$  and  $\mathbf{c}$  is one of

$$(1, 1, 1, n - 3), (1, 1, n - 3, 1), (1, n - 3, 1, 1), (n - 3, 1, 1, 1) \text{ or } (1, 1, 1, 1).$$

**注意 8** (i)  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  のとき、 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  が定理 7 の (I-1), (I-2), (II) のどれかを満たすとする。このとき、[S03] によって、2 重旗多様体  $\mathcal{D} = M_{\mathbf{a}} \times M_{\mathbf{b}}$  は開  $B$ -軌道を持つ。ただし、 $B$  は  $G$  のボレル部分群とする。Brion および Vinberg の定理 ([B86], [V86]) により、 $\mathcal{D}$  は有

<sup>\*1</sup> 6 月の講演では、命題 6 の (iii) と定理 7 の (III-4) が欠落していた。お詫びして訂正する。

限個の  $B$ -軌道を持つ。従って、このとき 3 重旗多様体  $\mathcal{T}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, (1^n)}$  は有限型である。(注意:  $\mathbb{C}$  は代数的閉体であるので、 $(\mathbb{C}^\times)^2 = \mathbb{C}^\times$ )

(ii)  $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$  となる体  $\mathbb{F}$  も存在する (例えば  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ )。

証明 ([M18]) は大きく 2 つの部分に分かれる。前半では命題 2,  $\dots$ , 6 を示し、さらに  $\mathbf{a} = (n)$ ,  $\mathbf{b} = (b)$  with  $4 \leq b \leq n-2$  の場合も詳しく調べて、定理 7 の 7 条件が有限型であるために必要であることを証明する。2 年前の講演 ([M16]) で紹介した  $O_6(\mathbb{F})$ ,  $O_8(\mathbb{F})$ ,  $O_{12}(\mathbb{F})$  の無限型 3 重旗多様体が中心的な役割を果たす。

後半では 7 つのすべての場合について case-by-case に有限性を証明する。ただし、(III-1) と (III-2) については [M15] の方法によりすぐわかる。用いる道具は初等的線形代数のみ ([H04], [M13], [M15]) であるが、大がかりである。

## 参考文献

- [B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.
- [H04] T. Hashimoto,  *$B_{n-1}$ -orbits on the flag variety  $GL_n/B_n$* , Geom. Dedicata **105** (2004), 13–27.
- [MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.
- [MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.
- [M13] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.
- [M15] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I : odd degree case*, J. Alg. **425** (2015), 450–523.
- [M16] T. Matsuki, 直交群の多重旗多様体, 数理解析研究所講究録 **2031** (2017), 33–38.
- [M18] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type II : even degree case*, in preparation.
- [S03] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.
- [V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.