

衝撃力を受ける構造物の塑性変形

——剛塑性単純梁の曲げおよびせん断変形——

若 林 実・野中泰二郎・柴田道生

LARGE PLASTIC DEFORMATION OF STRUCTURES DUE TO IMPACT

——On the Bending and Shearing Deformation of a Rigid
Plastic Simply Supported Beam.——

Abstract

A theoretical study is made of the dynamic behavior and the permanent deformations of a rigid-perfectly plastic beam under impact loading. The beam is simply supported and the load is distributed along some portion of the beam axis. Bending and shearing deformations are analysed on the basis of a simplified interaction curve relating shearing force and bending moment for fully plastic action. The analysis shows that the shear effects are of considerable importance when the loading width is approximately less than one half of the whole span.

記 号

$$I \equiv \int_0^t \mu dt$$

$$\bar{I} \equiv \mu_0 \tau$$

$$I_f \equiv \int_0^{t_f} \mu dt$$

$$I_s \equiv \int_0^{t_s} \mu dt$$

$2l$: 梁の全長

m : 梁の単位長さ当り質量

M_0 : 純曲げにおける全塑性モーメント

P : 総荷重

P_b : 純曲げ崩壊荷重 (曲げ強さ)

P_s : 純せん断崩壊荷重 (せん断強さ)

q : 単位長さ当りの有効荷重

t : 時間

t_f : 運動終了時間

t_h : 塑性領域が中央の1点に収束する時間

t_s : せん断すべり運動の終了時間

y : 材軸に直角方向の変位

ϕy : 曲げ塑性領域の材軸に直角方向の変位

$\phi \delta_f$: 中央点の最終たわみ量

$\phi \delta_h$: $t = t_h$ での中央点たわみ量

$\phi \delta_s$: $t = t_s$ での中央点たわみ量

$s \delta_s$: せん断すべり運動に伴うたわみの不連続量

ηl : 中央点あるいは剛塑性境界から移動関節までの距離

θ : たわみ角

θ_f : 支点での最終たわみ角

$\phi \theta_f$: 中央点での最終たわみ角

θ_h : $t = t_h$ での支点たわみ角

θ_s : $t = t_s$ での支点たわみ角

$$\mu \equiv P/P_b$$

$$\mu_0 \equiv \mu|_{t=0}$$

$$\nu \equiv P_s/P_b$$

ξl : 支点から剛塑性境界までの距離

$\xi s \equiv \xi |_{t=t_s}$

τ : 荷重の作用時間

ω : 角速度

$\omega_s : t=t_s$ での支点たわみ角速度

xl : 左側支点からの座標

1. ま え が き

衝撃的な力を受ける構造物の塑性挙動に関して、既に幾多の問題が解かれているが、そのほとんどが曲げ変形のみを考慮したものであった。しかしながら、実際の構造物では、I形断面材や箱形断面材等、比較的せん断耐力の低い断面形の構成部材が多く、衝撃的な力を受ける場合、短時間ではあっても、構造物耐力の数10倍から数100倍にもおよぶ大きな力を受けることがあり、必ずしもせん断変形が無視できるとは限らない。

横方向衝撃力を受ける梁の、動的解析におけるせん断の影響について、Salvadori and Weidlinger は、剛塑性単純梁が時間とともに指数関数的に減小する荷重を、材長にわたって均等に受けた場合について調べ、せん断すべり運動 (shear slide) の概念を導入した^{1)*}。Karunes and Onat は、塑性力学の基本原則に基づいて、曲げとせん断に関する矩形塑性条件を用い、両端自由の剛塑性梁がその中央に等速度衝撃を受ける場合について考察し、せん断変形の影響は、矩形断面では非常に短い梁以外は無視し得るのに対し、I形材等では重要であることを指摘した²⁾。Nonaka and Symonds は、この矩形塑性条件を単純梁の問題に適用し、任意の単調減少荷重が材長にわたって一様に作用するときの、すべての可能な変形状態に対し解析的な解を得るのに成功した。これによれば、短時間に大きな荷重が作用したときや、材のせん断強さが曲げ強さとほぼ等しいかあるいはそれ以下のとき、せん断変形の影響が著しい³⁾。

本編は、Nonaka and Symonds の解析に従って、さらに一般的な荷重状態を論じようとするもので、剛塑性単純梁の中央に、任意の長さにわたって任意の単調減少荷重が作用する場合を考察する。荷重作用幅が非常に小さいときは集中荷重の場合に相当し、材長にわたる場合は Nonaka and Symonds の問題と一致する。

2. 仮 定

以下に用いる仮定のうち、主なものを次に列挙する。

- i) 材は充分靱性に富んでおり、完全剛塑性理論が適用できるものとする。これは、塑性変形に吸収されるエネルギーが、弾性変形によって梁に吸収され得る最大エネルギーに較べて充分大きいときは、材の弾性的挙動を無視して差支えないと考えられるからである⁴⁾。
- ii) 曲げモーメント M と、せん断力 Q を受ける材の塑性条件として、近似的に次のような、いわゆる 矩形塑性条件を用いる (Fig. 1)。

$$\left(\left| \frac{M}{M_0} \right| - 1 \right) \left(\left| \frac{Q}{Q_0} \right| - 1 \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 M_0 、 Q_0 はそれぞれ純曲げ、および純せん断を受けるときの全塑性モーメント、および降伏せん断力である。この仮定は一般に危険側の誤差を伴うが、I形材や箱形断面材等では、実質的に、曲げに対してはフランジが、せん断に対してはウェブが抵抗すると考えられるので、充分よい近似であろうと思われる。

仮定 i) および塑性流れ理論によれば、断面内の応力状態が (1) 式の領域内にあるとき、材はなんら変形を生じないが、曲げモーメントが全塑性モーメントに達したところでは曲げ変形が可能であり、せん断力が降伏せん断力に達したところでは、せん断変形すなわちせん断すべり運動 (shear slide) を生じ

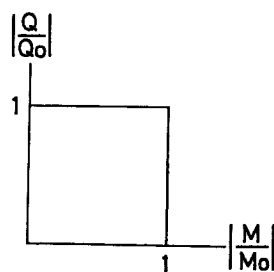


Fig. 1 Square Interaction Curve.

* 片括弧を伴う数字は、論文末の文献番号を意味する。

得る。

iii) 弾性変形を無視し大きな塑性変形のみを考えるが、それにもかかわらず、微小変形の仮定に基づき幾何学的な変化は無視するものとする。

iv) 応力波の影響や、不安定現象等についてはこれを無視する。

v) 荷重は時間とともに単調に減少するものとする (blast load)。この仮定は、解析を単純化するのに有効であり、いわゆる長方形パルスや、純衝撃荷重といったものも含まれる。

3. 解 析

3.1 概 要

ここでは、Fig. 2 に示すような、全長 $2l$ 、単位長さ当り質量 m 、全塑性モーメント M_0 、降伏せん断力 Q_0 なる一様な剛塑性単純梁が、合力 P を、その中央の $2\lambda l$ ($0 < \lambda \leq 1$) の幅にわたって、一様に受ける場合の変形挙動を考察する。

この単純梁の純曲げ崩壊荷重 P_b (以後曲げ強さと呼ぶ)、純せん断崩壊荷重 P_s (以後せん断強さと呼ぶ) はそれぞれ

$$P_b = \frac{4M_0}{(2-\lambda)l}, \quad P_s = 2Q_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

作用荷重 P と曲げ強さの比を μ 、せん断強さと曲げ強さの比を ν とすると、

$$\mu \equiv \frac{P}{P_b} = \frac{(2-\lambda)Pl}{4M_0}, \quad \nu \equiv \frac{P_s}{P_b} = \frac{(2-\lambda)Q_0l}{2M_0} \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、下側に引張を生ずるようなモーメントを正のモーメント、梁の要素に時計まわりのモーメントを与えるようなせん断力を正のせん断力とそれぞれ定義することにする。

3.2 変形モード

この梁が、衝撃力 P を受けて運動を開始するとき、前節の仮定を満足し、しかも塑性条件を犯さないような変形モードとしては、次の9種類がある。

A型運動：中央に塑性関節を生ずる。

B型運動：中央に曲げ塑性領域を生ずる。

A'型運動：中央に塑性関節を、その両側に移動塑性関節を生ずる。

B'型運動：中央に曲げ塑性領域を、その両側に移動塑性関節を生ずる。

C型運動：中央から λl の位置にせん断すべり運動を生ずる。

D型運動：中央に塑性関節を、中央から λl の位置にすべり運動を生ずる。

E型運動：中央に曲げ塑性領域を、中央から λl の位置にすべり運動を生ずる。

D'型運動：中央に塑性関節を、中央から λl の位置にすべり運動を、その外側に移動関節を生ずる。

E'型運動：中央に曲げ塑性領域を、中央から λl の位置にすべり運動を、その外側に移動関節を生ずる。

Fig. 3 はこれらを図示したもので、最上段は変形モード、第2段は慣性力を考慮したみかけの作用荷重の分布、第3段はそれに伴うせん断力の分布、最下段は曲げモーメントの分布を示している。

3.3 A型運動

まずせん断強さの大きい場合を考える。作用荷重が小さくて、 $\mu_0 \equiv \mu|_{t=0} < 1$ の場合、この梁は ν, λ の値によらず、どの断面においても塑性条件が満たされることがないので、なんら変形は生じない。 μ_0 が1を越えると中央点が曲げて降伏し、塑性関節を生じてA型運動を起こす。

運動方程式は、慣性力を考慮した支点に関する曲げモーメントの釣合より得られ、支点のたわみ角速度 ω は、

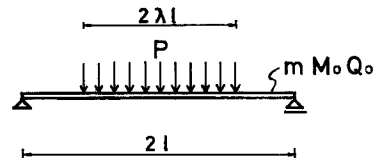


Fig. 2 Structure and Loading

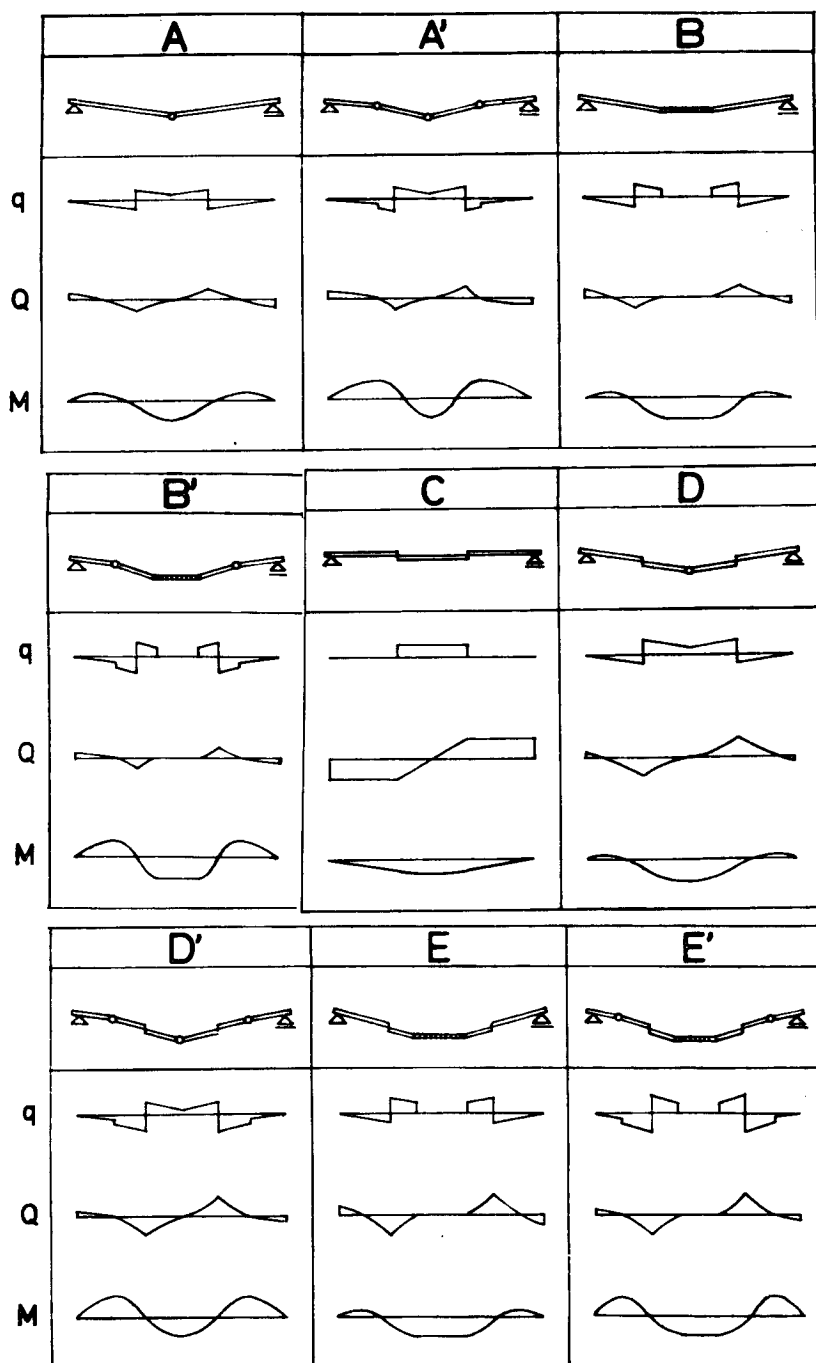


Fig. 3 Modes of Motion

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega = 3(\mu - 1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

より求められる。Fig. 4 はA型運動が起っているときの作用荷重と慣性力の分布を示し、ドットは時間に関する微分を表わしている。

$\omega = 0$ となると、塑性関節は消失して運動は終了する。その時間を t_f , $I \equiv \int_0^t \mu dt$, $I_f \equiv I|_{t=t_f}$ と定義すると、 t_f は、

$$0 = \frac{ml^3}{M_0} \omega|_{t=t_f} = 3(I_f - t_f) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$t_f = I_f \equiv \int_0^{t_f} \mu dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

を解いて得られる。

支点の最終たわみ角 θ_f , 中央点の最終たわみ量 $\delta\delta_f$ は

$$\frac{ml^3}{M_0} \theta_f = \frac{ml^2}{M_0} \delta\delta_f = 3 \left(\int_0^{t_f} I dt - \frac{1}{2} t_f^2 \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

から求められる。

この運動が起っている間、材の各点でのモーメント M , およびせん断力 Q の大きさはそれぞれ M_0 , Q_0 を越えてはならない。いま、左側支点からの座標を xl と表わせば、 $xl = (1-\lambda)l$ の位置でせん断力の絶対値は最大となるから、

$$Q_{max} = Q|_{x=1-\lambda} \leq Q_0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

中央点以外で正のモーメントが M_0 に達しないためには、中央点での単位長さ当り有効荷重 q が正でなければならない³⁾ので、

$$q|_{x=1} = P/(2\lambda l) - m\omega l \geq 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、負のモーメントの絶対値が M_0 を越えないためには、

$$M_{min} \geq -M_0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

一方、運動が成立するためには

$$\omega|_{t=0} > 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

でなければならない。これらより、

$$\mu_0 \leq \frac{4\nu - 3\lambda(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3} \quad \dots\dots\dots (12)$$

かつ、

$$1 < \mu_0 \leq \begin{cases} \frac{3\lambda(2-\lambda)}{-3\lambda^2 + 6\lambda - 2} & (\lambda \geq \frac{4}{9}) \\ \frac{9(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)} + \frac{3(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)^2} \sqrt{3(6-\lambda)(2-3\lambda)} & (\lambda \leq \frac{4}{9}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$1 < \mu_0 \leq \begin{cases} \frac{3\lambda(2-\lambda)}{-3\lambda^2 + 6\lambda - 2} & (\lambda \geq \frac{4}{9}) \\ \frac{9(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)} + \frac{3(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)^2} \sqrt{3(6-\lambda)(2-3\lambda)} & (\lambda \leq \frac{4}{9}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (14)$$

3.4 B型運動

A型運動を想定した場合、 $\lambda \geq \frac{4}{9}$ で $\mu_0 > 3\lambda(2-\lambda)/(-3\lambda^2 +$

$6\lambda - 2)$ となれば、もはや曲げに対する塑性条件は犯され、B型運動を生ずる。このとき、曲げモーメントの大きさは、中央の $2(1-\xi)l$ の長さにわたって全塑性モーメントに達し、いわゆる塑性領域 (plastic zone) を形成する。

仮定 v) より塑性領域は時間とともに収縮することが予想されるので、まず $\xi \geq 0$ と仮定すると運動量の原理および剛塑性境界での速度連続条件より (Fig. 5),

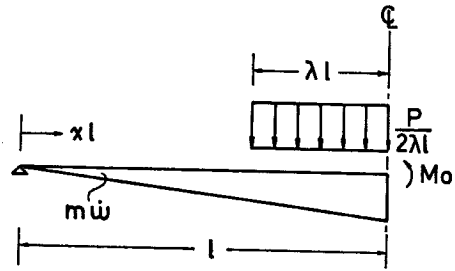


Fig. 4 Type A Motion

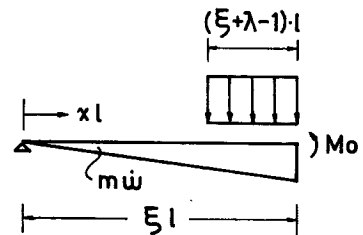


Fig. 5 Type B Motion

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega \xi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \xi^2 \right) + t = I \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega \xi = \frac{2I}{\lambda(2-\lambda)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\therefore \begin{cases} \xi^2 = 3(1-\lambda)^2 + \frac{3\lambda(2-\lambda)}{I} t \quad \dots\dots\dots (17) \\ \left(\frac{ml^3}{M_0} \omega \right)^2 = \frac{4I^3}{3\lambda^2(2-\lambda)^2 \{ (1-\lambda)^2 I + \lambda(2-\lambda)t \}} \quad \dots\dots\dots (18) \end{cases}$$

(17) 式を時間で微分すれば仮定 v) のもとでは必ず $\xi \geq 0$ となるので最初の仮定が正しかったことがわかる。すなわち、塑性領域は時間とともに収縮し遂に中央の1点に収束する。この時間を t_h とすると (16), (17) 式で $\xi|_{t=t_h}=1$ と置いて

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega_h \equiv \frac{ml^3}{M_0} \omega|_{t=t_h} = \frac{2I_h}{\lambda(2-\lambda)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$t_h = \frac{-3\lambda^2 + 6\lambda - 2}{3\lambda(2-\lambda)} I_h \quad \dots\dots\dots (20)$$

このときの支点たわみ角 θ_h , 中央点のたわみ $e\delta_h$ は,

$$\frac{ml^3}{M_0} \theta_h = \int_0^{t_h} \frac{2I}{\lambda(2-\lambda)} \sqrt{\frac{I}{3\{(1-\lambda)^2 I + \lambda(2-\lambda)t\}}} dt \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{ml^2}{M_0} e\delta_h = \frac{ml^2}{M_0} \int_0^{t_h} \int_0^t \frac{P dt}{2m\lambda I} dt = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_h} I dt \quad \dots\dots\dots (22)$$

これ以後、運動はA型運動に移行し、運動方程式は(4)式で表わされる。中央の塑性関節が消失し、運動が終了する時間 t_f は

$$t_f = I_f \quad \dots\dots\dots (23)$$

から求められる。最終変形量は

$$\frac{ml^3}{M_0} \theta_f = \int_0^{t_h} \frac{2I}{\lambda(2-\lambda)} \sqrt{\frac{I}{3\{(1-\lambda)^2 I + \lambda(2-\lambda)t\}}} dt + 3 \int_{t_h}^{t_f} I dt - \frac{3}{2} (t_f^2 - t_h^2) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{ml^2}{M_0} e\delta_f = \frac{ml^2}{M_0} e\delta_h + \frac{ml^3}{M_0} e\theta_f = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_h} I dt + 3 \int_{t_h}^{t_f} I dt - \frac{3}{2} (t_f^2 - t_h^2) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $e\theta_f$ は中央点における最終たわみ角で

$$\frac{ml^3}{M_0} e\theta_f = \frac{ml^3}{M_0} \theta_f - \frac{ml^3}{M_0} \theta_h = 3 \int_{t_h}^{t_f} I dt - \frac{3}{2} (t_f^2 - t_h^2) \quad \dots\dots\dots (26)$$

B型運動が塑性条件を犯さずに成立するためには、

$$0 < \xi^2 \leq 1 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$Q_{max} = Q|_{\xi=1-\lambda} \leq Q_0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$M_{min} \geq -M_0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

でなければならないので、

$$\lambda \geq 4/9 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{3\lambda(2-\lambda)}{-3\lambda^2 + 6\lambda - 2} < \mu_0 \leq \frac{25\lambda(2-\lambda)}{2(1-\lambda)^2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

かつ、

$$\nu \geq \frac{4(1-\lambda)^2 \mu_0 + 3\lambda(2-\lambda)}{2\lambda \sqrt{3\{(1-\lambda)^2 + \lambda(2-\lambda)/\mu_0\}}} \quad \dots\dots\dots (32)$$

3.5 A'型運動

A型運動を想定した場合、 $\lambda < 4/9$ で、かつ

$$\mu_0 > \frac{9(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)} + \frac{3(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)^2} \times \sqrt{3(6-\lambda)(2-3\lambda)} \quad \cdots (33)$$

となると、中央の塑性関節と支点との間で曲げ塑性条件が犯され、中央と支点の間にも塑性関節をもった A' 型運動となる。この塑性関節は一般の単調減少荷重のもとでは、時間とともにその位置が変わるので、これを移動塑性関節（あるいは移動関節 (moving hinge)）と呼ぶことにする。

中央から移動関節までの距離を ηl 、移動関節の内側の部分の加速度を $\ddot{y}$ とすれば、運動方程式より (Fig. 6),

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y} + \frac{1}{2} \frac{ml^3}{M_0} \omega_1 \eta = \frac{2\mu}{(2-\lambda)\eta} \quad \cdots (34)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_0 = \frac{3}{(1-\eta)^3} \quad \cdots (35)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 = \frac{12}{\eta^3} \left\{ \frac{(\eta-\lambda)}{2-\lambda} \mu - 2 \right\} \quad \cdots (36)$$

移動塑性関節での速度連続条件を時間で微分すると

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y} = \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_0 (1-\eta) - \frac{ml^3}{M_0} \omega_0 \dot{\eta} \quad \cdots (37)$$

(34)~(37) 式より

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega_0 \dot{\eta} = \frac{(2\eta-3\lambda)}{\eta^2} \left\{ \frac{2\mu}{2-\lambda} - \frac{3(2-\eta)(2-3\eta)}{(2\eta-3\lambda)(1-\eta)^2} \right\} \quad \cdots (38)$$

一般に、 $\dot{\eta} \neq 0$ であるから、(38)、(35) 式より η を解析的に求めることは困難であるが、仮に η が時間に関して一定であると仮定すれば、 η は

$$\mu = \frac{3(2-\eta)(2-3\eta)(2-\lambda)}{2(2\eta-3\lambda)(1-\eta)^2} \quad \cdots (39)$$

を解いて求まる。このとき、 μ もまた時間に関して一定となるので、この η は荷重が長方形パルスであるときの解に相当する。

荷重の大きさが $\mu = \mu_0$ であるような長方形パルスを受けた場合を考えると、 $\mu_0 > 0$ より

$$\frac{3}{2} \lambda < \eta_0 < \frac{2}{3} \quad \cdots (40)$$

一方、中央で塑性条件を犯さないためには、 $q|_{x=l} \geq 0$ でなければならないので

$$3\eta_0^3 - 4(2+\lambda)\eta_0^2 + (-3\lambda^2 + 16\lambda + 4)\eta_0 - 8\lambda \geq 0 \quad \cdots (41)$$

除荷後の運動方程式は、パルスの形には無関係であり、Symonds の問題に一致する。これによれば、載荷終了時間を τ とすると、

$$\ddot{\eta} \left[\frac{1}{(1-\eta)^2} - \frac{4}{\eta^2} \right] - \frac{\dot{\eta}^2}{(1-\eta)^3} = 0 \quad \cdots (44)$$

$$\text{より } \dot{\eta} = c \frac{(2-\eta)(2-3\eta)^{\frac{1}{2}}}{(1-\eta)} \quad \cdots (45)$$

$$\text{ここに } c = \frac{3(2-3\eta)|_{t=\tau}^{\frac{2}{3}}}{\frac{ml^3}{M_0} [\omega_0 - \omega_1] |_{t=\tau} \{ \eta^2 (1-\eta) \} |_{t=\tau}} \quad \cdots (46)$$

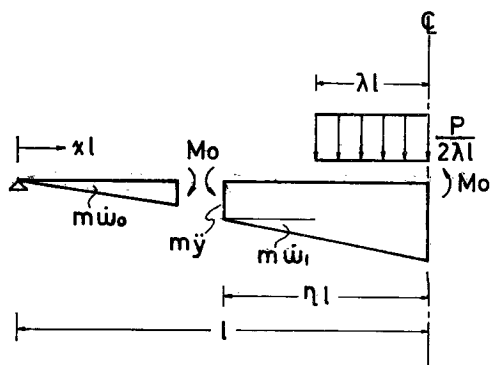


Fig. 6 Type A' Motion

$$\therefore \begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow \frac{2}{3}} \dot{\eta} = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{ml^3}{M_0} (\omega_0 - \omega_1) = \lim_{\eta \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{3(3\eta-2)^{\frac{1}{2}}}{c\eta^2(1-\eta)} = 0 \end{cases}$$

となるので、 $\eta = \frac{2}{3}$ に達すると移動関節は消失し、これ以後A型運動に移行することがわかる。⁵⁾

(45) 式をさらに積分して、各変形量を求めることは困難である。

3.6 B'型運動

作用荷重がさらに大きくなると、中央に曲げ塑性領域、その両側に移動関節を生ずる。

運動方程式より (Fig. 7),

$$\frac{ml^3}{M_0} \ddot{\omega}_0 = \frac{3}{(\xi - \eta)^3} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \ddot{\omega}_1 = \frac{12}{\eta^3} \left\{ \frac{\mu}{\lambda(2-\lambda)} (\xi + \lambda - 1)(\eta - \xi - \lambda + 1) - 2 \right\} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y} = \frac{2}{\eta^2} \left\{ \frac{\mu}{\lambda(2-\lambda)} (\xi + \lambda - 1)(3\xi - 2\eta + 3\lambda - 3) + 6 \right\} \quad \dots\dots\dots (51)$$

剛塑性境界および移動関節における速度連続条件は、仮定

v) より

$$\dot{y} + \omega_1 \dot{\eta} l + \omega_1 \eta l = \frac{P}{2m\lambda l} \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\dot{y} = \omega_0 (\xi - \eta) l + \omega_0 (\xi - \eta) \quad \dots\dots\dots (53)$$

これらより一般的解析解を得ることは困難である。純衝撃的な荷重を考えると、除荷後の運動方程式より

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega_1 \dot{\eta} = \frac{12}{\eta^2} \quad \dots\dots\dots (54)$$

これを時間で微分すると

$$\ddot{\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$\therefore \eta = Ct + D \quad \dots\dots\dots (56)$$

ここに、

$$C = \dot{\eta}|_{t=t_0} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$D = \eta|_{t=t_0} \quad \dots\dots\dots (58)$$

3.7 C型運動

材のせん断強さが、曲げ強さよりも小さい場合には、中央から λl のところにせん断すべり運動のみを生ずるような、C型運動となる。

運動方程式より (Fig. 8),

$$\frac{ml^3}{M_0} \ddot{y} = \frac{2(I - \nu t)}{\lambda(2-\lambda)} \quad \dots\dots\dots (59)$$

すべり運動が終ると運動も終了する。その時間を t_s とすれば、 $y|_{t=t_s} = 0$ より

$$t_s = I_s / \nu \quad \dots\dots\dots (60)$$

中央部の最終たわみ量は

$$\frac{ml^2}{M_0} \sigma \delta r = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \left\{ \int_0^{t_s} I dt - \frac{\nu}{2} t_s^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (61)$$

C型運動が成立するための条件は、

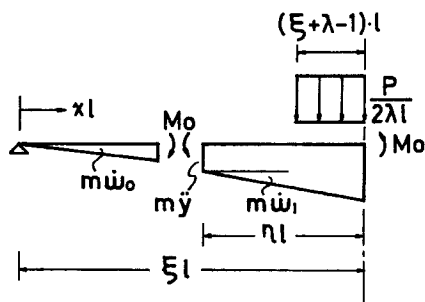


Fig. 7 Type B' Motion

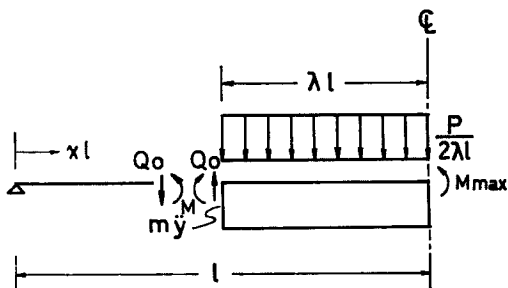


Fig. 8 Type C Motion

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}|_{t=0} > 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{max} = M_{x=1} \leq M_0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (63)$$

$$\text{より} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu < \mu_0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \leq 1 \end{array} \right. \dots\dots\dots (65)$$

3.8 D型運動

A型運動とC型運動が混合し、中央に塑性関節を、中央から λl のところにすべり運動を生ずる。
運動方程式より (Fig. 9),

$$\frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega} = \frac{12(\nu-1)}{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3} \dots\dots\dots (66)$$

$$\frac{ml^2}{M_0} \dot{y} = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \left[\mu - \frac{4\nu-3\lambda(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3} \right] \dots\dots\dots (67)$$

すべり運動が終了する時間 t_s は、 $\dot{y}|_{t=t_s} = 0$ より

$$t_s = \frac{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3}{4\nu - 3\lambda(2-\lambda)^2} I_s \dots\dots\dots (68)$$

このときの支点たわみ角速度 ω_s , 支点たわみ角 θ_s は、

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega_s = 3(I_s - t_s) \dots\dots\dots (69)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \theta_s = \frac{6(\nu-1)t_s^2}{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3} \dots\dots\dots (70)$$

すべり運動によるたわみの不連続量 $s\delta_s$ は、

$$\frac{ml^2}{M_0} s\delta_s = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_s} I dt - \frac{4\nu-3\lambda(2-\lambda)^2}{\lambda(2-\lambda)\{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3\}} t_s^2 \dots\dots\dots (71)$$

これ以後、A型運動に移行するので、(4) 式より

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega = \frac{ml^3}{M_0} \omega_s + \int_{t_s}^t 3(\mu-1) dt = 3(I-t) \dots\dots\dots (72)$$

中央の塑性関節が消失して運動は終了する。その時間 t_f は、

$$t_f = I_f \dots\dots\dots (73)$$

より求める。最終変形量は、

$$\frac{ml^3}{M_0} \theta_f = \frac{6(\nu-1)t_s^2}{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3} + 3 \int_{t_s}^{t_f} I dt - \frac{3}{2}(t_f^2 - t_s^2) \dots\dots\dots (74)$$

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{M_0} c\delta_f = \frac{ml^2}{M_0} s\delta_s + \frac{ml^3}{M_0} \theta_f = & \frac{2(-3\lambda^2+6\lambda-2)\nu-3\lambda^2(2-\lambda)}{\lambda(2-\lambda)\{4(1-\lambda)^3 + \lambda^3\}} t_s^2 \\ & + \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_s} I dt + 3 \int_{t_s}^{t_f} I dt - \frac{3}{2}(t_f^2 - t_s^2) \dots\dots\dots (75) \end{aligned}$$

D型運動が起り得る条件は、

$$\dot{\omega}|_{t=0} > 0 \dots\dots\dots (76)$$

$$\dot{y}|_{t=0} > 0 \dots\dots\dots (77)$$

$$q|x=1 \geq 0 \dots\dots\dots (78)$$

$$M_{min} \geq -M_0 \dots\dots\dots (79)$$

より、

$$\nu > 1 \dots\dots\dots (80)$$

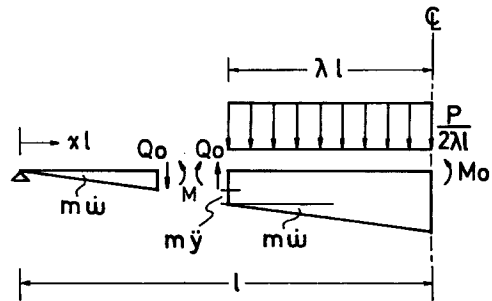


Fig. 9 Type D Motion

$$\begin{cases} \nu \leq \frac{3\lambda^2(2-\lambda)}{2(-3\lambda^2+6\lambda-2)} & \left(\lambda \geq \frac{4}{9}\right) \dots\dots\dots(80) \\ \frac{4\{(2-3\lambda)\nu-3(2-\lambda)(1-\lambda)^2\}^3}{27\{4(1-\lambda)^3+\lambda^3\}(2-\lambda)^3(\nu-1)} \leq 1 & \left(\lambda \leq \frac{4}{9}\right) \dots\dots\dots(81) \end{cases}$$

$$\mu_0 \geq \frac{4\nu-3\lambda(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)^3+\lambda^3} \dots\dots\dots(32)$$

3.9 E型運動

B型運動とC型運動が混合した変形モードで、中央に曲げ塑性領域を、中央から λl の位置にすべり運動を生ずる。

運動量の原理より (Fig. 10),

$$\frac{2I}{(2-\lambda)\lambda} - \frac{ml^2}{M_0} \dot{y} - \frac{\xi-\lambda+1}{2} \frac{ml^3}{M_0} \omega = \frac{2\nu t}{(2-\lambda)(\xi+\lambda-1)} \dots\dots\dots(83)$$

角運動量の原理より

$$\begin{aligned} & \frac{2I}{(2-\lambda)\lambda} - \frac{ml^2}{M_0} \dot{y} \\ & - \frac{2\xi^3}{3\{\xi^2-(1-\lambda)^2\}} \frac{ml^3}{M_0} \omega \\ & = \frac{2t}{\xi^2-(1-\lambda)^2} \dots\dots\dots(84) \end{aligned}$$

剛塑性境界での速度連続条件より,

$$\frac{2I}{(2-\lambda)\lambda} - \frac{ml^2}{M_0} \dot{y} - \xi \frac{ml^3}{M_0} \omega = 0 \dots\dots\dots(85)$$

(83)~(85) 式より

$$F(\xi) \equiv 2\nu\xi^3 - 3(2-\lambda)\xi^2 - 6(1-\lambda)\{(1-\lambda)\nu - (2-\lambda)\}\xi - 3(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \dots\dots\dots(86)$$

(86) 式の根を $\xi = \xi_s$ とすると, ξ_s は ν と λ のみによって定まり, 時間には無関係であるので, ξ_s はE型運動が継続中ずっと一定である。 $F(\xi) = 0$ は $(1-\lambda) < \xi_s \leq 1$ なる根を持たねばならないが, $F(1-\lambda) = -4\nu(1-\lambda)^3 < 0$ であるから,

$$F(1) = 2\nu(-3\lambda^2+6\lambda-2) - 3\lambda^2(2-\lambda) \geq 0 \dots\dots\dots(87)$$

右辺第1項は正でなければならないので

$$\lambda > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.423 \dots\dots\dots(88)$$

しかも

$$\nu \geq \frac{3\lambda^2(2-\lambda)}{2(-3\lambda^2+6\lambda-2)} \dots\dots\dots(89)$$

一方,

$$\frac{ml^2}{M_0} \dot{y} = \frac{2}{2-\lambda} \left\{ \frac{I}{\lambda} - \frac{2\nu\xi_s t}{(\xi_s+\lambda-1)^2} \right\} \dots\dots\dots(90)$$

だから, すべり運動が終了する時間 t_s は,

$$t_s = \frac{(\xi_s+\lambda-1)^2}{2\lambda\nu\xi_s} I_s \dots\dots\dots(91)$$

そのときの支点たわみ角 θ_s , および支点たわみ角速度 ω_s は,

$$\frac{ml^3}{M_0} \theta_s = \frac{(\xi_s+\lambda-1)^2}{2\lambda^2(2-\lambda)\nu\xi_s^2} I_s^2 \dots\dots\dots(92)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \omega_s = \frac{I_s}{\lambda(2-\lambda)\xi_s} \dots\dots\dots(93)$$

すべり運動によるたわみの不連続量 $s\delta_s$ は,

$$\frac{ml^2}{M_0} s\delta_s = \frac{ml^2}{M_0} \int_0^{t_s} \dot{y} dt = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_s} I dt - \frac{2\nu\xi_s t_s^2}{(2-\lambda)(\xi_s+\lambda-1)^2} \dots\dots\dots(94)$$

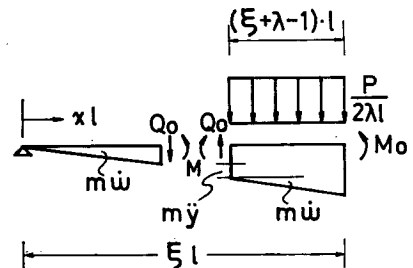


Fig. 10 Type E Motion

中央点のたわみ $c\delta_s$ は

$$\frac{ml^2}{M_0} c\delta_s = \frac{ml^3}{M_0} \theta_s \xi_s + \frac{ml^2}{M_0} s\delta_s = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_s} I dt \quad (95)$$

これ以後、運動はB型運動に移行するが、塑性領域の加速度 $c\ddot{y}$ はすべり運動の有無にかかわらず

$$c\ddot{y} = P/(2m\eta l) \quad (96)$$

であるから、 $t > t_s$ では (17), (20) 式をそのまま用いることができ、

$$\xi^2 = 3(1-\lambda)^2 + \frac{3\lambda(2-\lambda)}{I} t \quad (97)$$

塑性領域が中央の1点に収束する時間 t_h は、

$$t_h = \frac{-3\lambda^2 + 6\lambda - 2}{3\lambda(2-\lambda)} I_h \quad (98)$$

そのときの支点たわみ角、中央点たわみはそれぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{ml^3}{M_0} \theta_h &= \frac{ml^3}{M_0} \theta_s + \int_{t_s}^{t_h} \frac{2I dt}{\xi \lambda(2-\lambda)} \\ &= \frac{2\nu t_s^2}{(2-\lambda)(\xi_s + \lambda - 1)^2} + \int_{t_s}^{t_h} \frac{2I}{\lambda(2-\lambda)} \sqrt{\frac{I}{3\{(1-\lambda)^2 I + \lambda(2-\lambda)t\}}} dt \quad (99) \end{aligned}$$

$$\frac{ml^2}{M_0} c\delta_h = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_h} I dt \quad (100)$$

これ以後、運動はA型運動に移行し、中央の塑性関節が消失すると運動は終了する。その時間 t_f は、

$$t_f = I_f \quad (101)$$

から求める。最終変形量は、

$$\begin{aligned} \frac{ml^3}{M_0} \theta_f &= \frac{2\nu t_s^2}{(2-\lambda)(\xi_s + \lambda - 1)^2} + \int_{t_s}^{t_h} \frac{2I}{\lambda(2-\lambda)} \sqrt{\frac{I}{3\{(1-\lambda)^2 I + \lambda(2-\lambda)t\}}} dt \\ &\quad + 3 \int_{t_h}^{t_f} I dt - \frac{3}{2} (t_f^2 - t_h^2) \quad (102) \end{aligned}$$

$$\frac{ml^2}{M_0} c\delta_f = \frac{ml^2}{M_0} c\delta_h + \frac{ml^3}{M_0} c\theta_f = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_h} I dt + 3 \int_{t_h}^{t_f} I dt - \frac{3}{2} (t_f^2 - t_h^2) \quad (103)$$

ここに、

$$\frac{ml^3}{M_0} c\theta_f = \frac{ml^3}{M_0} \theta_f - \frac{ml^3}{M_0} \theta_h = 3 \int_{t_h}^{t_f} I dt - \frac{3}{2} (t_f^2 - t_h^2) \quad (104)$$

E型運動が起り得る条件は、(89) 式および

$$M_{min} > -M_0 \quad (105)$$

$$\text{より, } \frac{3\lambda^2(2-\lambda)}{2(-3\lambda^2 + 6\lambda - 2)} \leq \nu \leq \frac{3(\xi_s + \lambda - 1)^2(2-\lambda)}{4\sqrt{\{2(1-\lambda)\xi_s - \xi_s^2\}^3}} \quad (106)$$

3.10 D'型運動

A'型運動とC型運動とが混合した変形モードで、すべり運動と、中央塑性関節および移動関節を生ずる。運動方程式および速度連続条件より (Fig. 11),

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0 \eta + \frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_1 \lambda + \frac{1}{2} \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \eta^2 = \frac{2\mu}{2-\lambda} \quad (107)$$

$$\frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_0 = \frac{3}{(1-\eta)^3} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_1 \frac{\lambda(\eta-\lambda)}{2} + \frac{1}{12} \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \eta^3 + 2 \\ = \frac{\mu(\eta-\lambda)}{2-\lambda} \quad (109) \end{aligned}$$

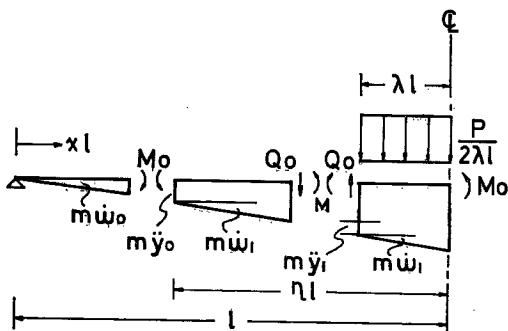


Fig. 11 Type D' Motion

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0(\eta-\lambda) + \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \frac{(\eta-\lambda)^2}{2} = \frac{2\nu}{2-\lambda} \quad \text{.....(110)}$$

$$\dot{y}_0 = (1-\eta)\dot{\omega}_0 l - \omega_0 \dot{\eta} l \quad \text{.....(111)}$$

これらより

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0 = \frac{12(\eta-\lambda)}{\eta(\eta^2-3\lambda\eta+3\lambda^2)} - \frac{2\nu\eta(2\eta-3\lambda)}{(2-\lambda)(\eta-\lambda)(\eta^2-3\lambda\eta+3\lambda^2)} \quad \text{.....(112)}$$

$$\therefore \frac{ml^2}{M_0} \omega_0 \dot{\eta} = \frac{2\nu\eta(2\eta-3\lambda)}{(2-\lambda)(\eta-\lambda)(\eta^2-3\lambda\eta+3\lambda^2)} - \frac{12(\eta-\lambda)}{(\eta^2-3\lambda\eta+3\lambda^2)\eta} + \frac{3}{(1-\eta)^2} \quad \text{.....(113)}$$

いま $\dot{\eta}=0$ すなわち $\eta=\text{const.}$ と仮定すると、 ν もまた $\nu=\text{const.}$ となって条件を満足するのでこの仮定は正しいと考えられる。すなわち、 η は (113) 式の左辺を 0 とおいたものを解いて得られる。この解を η_0 とすれば、 $\ddot{y}_0$ は

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0 = \frac{3}{(1-\eta_0)^2} \quad \text{.....(114)}$$

とも表わすことができるので、すべり運動に伴うたわみの不連続量 $s\delta$ は (107), (109), (114) 式より

$$\frac{ml^2}{M_0} s\delta \equiv \frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_1 = \frac{2\nu}{\lambda(2-\lambda)} - \frac{3(3\eta_0-2)(\eta_0-2)}{(1-\eta_0)^2(2\eta_0-3\lambda)\lambda} \quad \text{.....(115)}$$

これを時間で積分し、すべり運動の終了時間を t_s とすると、

$$\frac{ml^2}{M_0} s\delta \equiv \frac{ml^2}{M_0} s\delta|_{t=t_s} = \frac{2}{\lambda(2-\lambda)} \int_0^{t_s} Idt - \frac{3(3\eta_0-2)(\eta_0-2)}{2(1-\eta_0)^2(2\eta_0-3\lambda)\lambda} t_s^2 \quad \text{.....(116)}$$

ここに t_s は次式より求まる。

$$t_s = \frac{2(1-\eta_0)^2(2\eta_0-3\lambda)I_s}{3(2-\lambda)(3\eta_0-2)(\eta_0-2)} \quad \text{.....(117)}$$

これ以後、運動は A' 型運動に移行し、(45), (46) 式が適用できる。

3.11 E' 型運動

B' 型運動と C 型運動が混合した変形モードで、すべり運動と中央曲げ塑性領域および移動関節を生ずる。

運動方程式より (Fig. 12),

$$\frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_0 = \frac{3}{(\xi-\eta)^3} \quad \text{.....(118)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0(\eta-\xi-\lambda+1) \\ & + \frac{1}{2} \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1(\eta-\xi-\lambda+1)^2 = \frac{2\nu}{2-\lambda} \quad \text{.....(119)} \end{aligned}$$

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0 \eta + \frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_1(\xi+\lambda-1) + \frac{1}{2} \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \eta^2 = \frac{2(\xi+\lambda-1)\mu}{\lambda(2-\lambda)} \quad \text{.....(120)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_1(\xi+\lambda-1)(\eta-\xi-\lambda+1) + \frac{1}{12} \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \eta^3 + 2 = \frac{(\xi+\lambda-1)(\eta-\xi-\lambda+1)\mu}{\lambda(2-\lambda)} \quad \text{.....(121)}$$

剛塑性境界および移動関節での速度連続条件より、

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0 + \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \eta + \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \dot{\eta} = \frac{2\mu}{\lambda(2-\lambda)} \quad \text{.....(122)}$$

$$\frac{ml^2}{M_0} \ddot{y}_0 = \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_0(\xi-\eta) + \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_0(\xi-\dot{\eta}) \quad \text{.....(123)}$$

すべり運動が生じている間は、 ξ, η は一定と考えられるので、

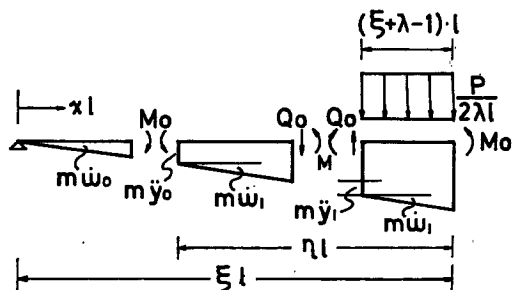


Fig. 12 Type E' Motion

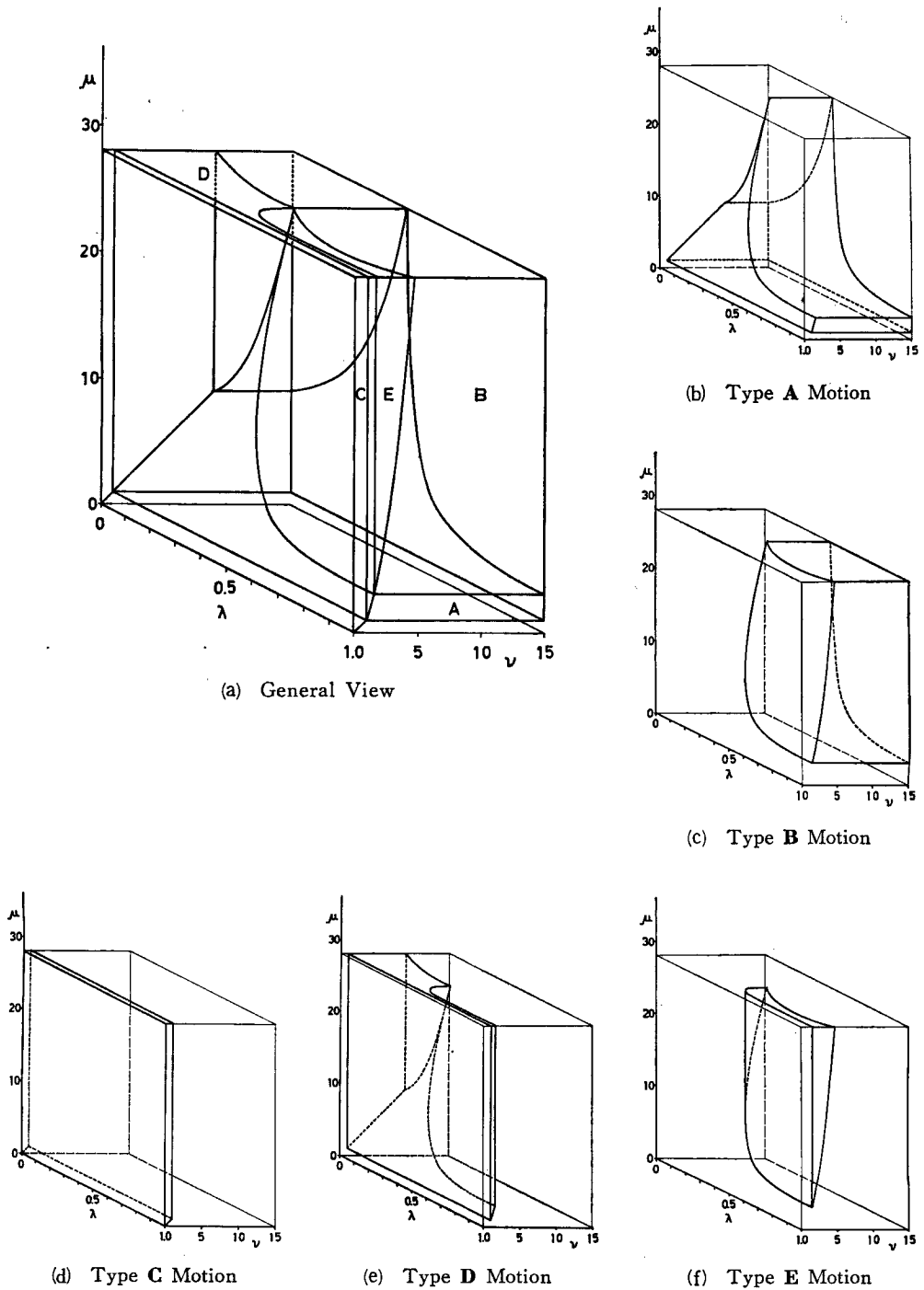


Fig. 13 Validities for Modes of Motion

$$\begin{cases} 0 = \frac{ml^3}{M_0} \omega_1 \xi = \frac{2\mu}{(2-\lambda)\lambda} - \frac{ml^2}{M_0} \dot{y}_0 - \eta \frac{ml^3}{M_0} \dot{\omega}_1 \dots\dots\dots (124) \\ 0 = \frac{ml^3}{M_0} \omega_0 (\xi - \eta) = \frac{ml^2}{M_0} \dot{y}_0 - \frac{ml^3}{M_0} (\xi - \eta) \dot{\omega}_0 \dots\dots\dots (125) \end{cases}$$

より,
$$\begin{cases} \frac{\nu}{3(\xi+\lambda-1)^2} = \frac{3(\nu\eta-4+2\lambda)}{\{\eta^2-3(\xi+\lambda-1)\eta+3(\xi+\lambda-1)^2\}\eta} \dots\dots\dots (126) \\ \frac{2\nu(\eta-\xi-\lambda+1)}{(2-\lambda)(\xi+\lambda-1)} - \frac{6\nu(\xi+\lambda-1)}{(2-\lambda)(\eta-\xi-\lambda+1)} + \frac{9(\xi+\lambda-1)}{(\xi-\eta)^2} = 0 \dots\dots\dots (127) \end{cases}$$

を解いて求める。その解を ξ_0, η_0 とすると、すべり運動に伴うたわみの不連続量 $s\delta$ は

$$\frac{ml^2}{M_0} s\delta = \frac{ml^2}{M_0} \dot{y}_1 = \frac{2\mu}{\lambda(2-\lambda)} + \frac{3\eta_0^4}{(\xi_0+\lambda-1)(2\eta_0-3\xi_0-3\lambda+3)(\xi_0-\eta_0)^2} \dots\dots\dots (128)$$

より得られ、すべり運動が終了する時間 t_s は $s\delta|_{t=t_s}=0$ より、

$$t_s = \frac{2(3\xi_0-2\eta_0+3\lambda-3)(\xi_0+\lambda-1)(\xi_0-\eta_0)^2 I_s}{3\eta_0^2 \lambda (2-\lambda)} \dots\dots\dots (129)$$

3.12 運動型成立条件

こうして移動関節を生ずることのない、A, B, C, D, E型運動で始まる変形モードに対して解析的な解を得ることができた。Fig. 13 はこれらの変形モードが μ, ν, λ の如何なる条件のもとに成立するかを図示したもので、わかりやすくするため、 $0 < \mu \leq 28$, $0 < \nu \leq 15$ の範囲だけを示した。Fig. 14 (a), (b) は Fig. 13 (a) の立体のそれぞれ $\mu = \infty, \nu = \infty$ での断面を示す。(Fig. 14 (b) の1点鎖線は荷重を長方形パルスと仮定したときの、A'型とB'型運動の境界を示す。(41)式参照。) 一般に μ が大きくなれば、移動関節を生ずる可能性が大きくなるが、たとえ $\mu = \infty$ となっても、 $\nu < 6$ であれば移動関節を生ずることはないので、解析的な解が得られる。

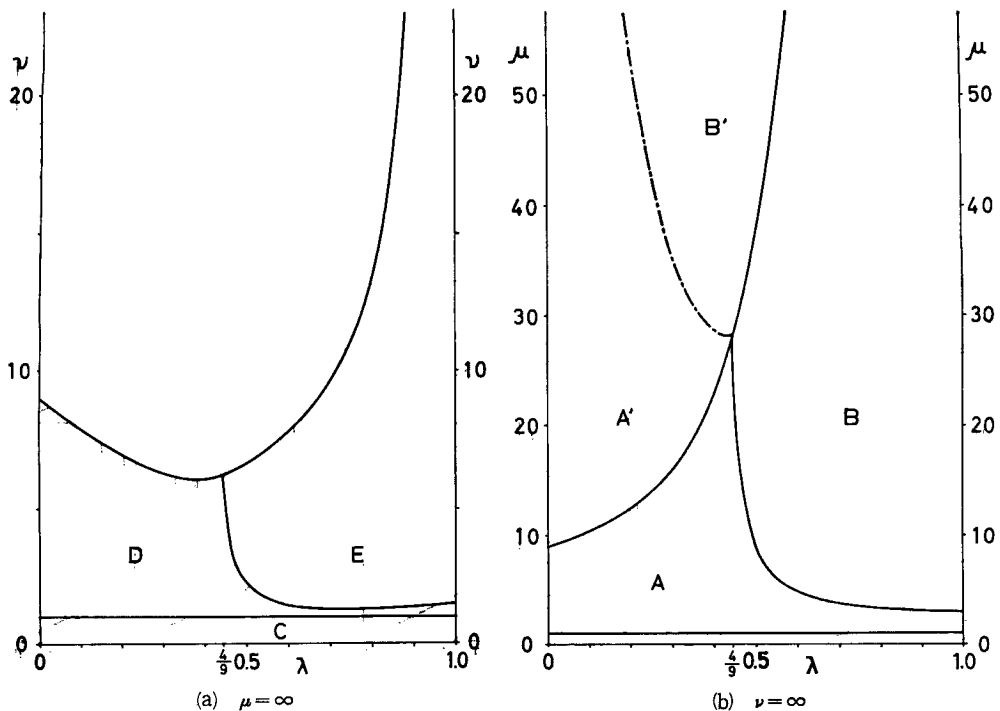


Fig. 14 Validities for Modes of Motion

4. 例 題

以上の結果に基づき、例題として Fig. 15 に示すような長方形パルスを受けたときの中央点の最終たわみ量を求める。矩形塑性条件が有効な近似となるような I 形材や箱形断面材では、そのほとんどが $\nu < 6$ の範囲にあるが、この範囲では μ_0, λ の如何によらず移動関節を生ずることがないので、通常おこり得る全ての場合に対して解析的な解が得られる。

i) A型運動

(12)～(14) 式より

$$1 \leq \mu_0 \leq \begin{cases} \frac{-3\lambda(2-\lambda)}{-3\lambda^2+6\lambda-2} & \left(\lambda \geq \frac{4}{9}\right) \\ \frac{9(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)} + \frac{3(2-\lambda)}{2(2-3\lambda)^2} \sqrt{3(6-\lambda)(2-3\lambda)} & \left(\lambda \leq \frac{4}{9}\right) \end{cases}$$

$$\text{かつ, } \mu_0 \leq \frac{4\nu-3\lambda(2-\lambda)^2}{\{4(1-\lambda)^3+\lambda^3\}}$$

のとき A 型運動を生じ、中央点最終たわみは

$$\frac{mI^2}{M_0\bar{I}^2} \sigma \delta_T = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_0}\right) \dots\dots\dots (130)$$

ii) B型運動および E 型運動

(30), (31), (106) 式より

$$\lambda \geq \frac{4}{9}$$

$$\mu_0 \geq \frac{3\lambda(2-\lambda)}{-3\lambda^2+6\lambda-2}$$

$$\text{かつ } \nu \geq \frac{3\lambda^2(2-\lambda)}{2(-3\lambda^2+6\lambda-2)}$$

であって、しかも次の 2 式のうちどちらかを満足するようなとき、B 型運動か、あるいは E 型運動を生ずる。

$$\mu_0 \leq \frac{25\lambda(2-\lambda)}{2(1-\lambda)^2}$$

$$\nu \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{(\xi_s + \lambda - 1)^2(2-\lambda)}{\{2(1-\lambda)\xi_s - \xi_s^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad (\xi_s \text{ は (86) 式の解})$$

いずれの場合も中央点の最終たわみは次式で表わされる。

$$\frac{mI^2}{M_0\bar{I}^2} \sigma \delta_T = \frac{2(-3\lambda^2+6\lambda-1)}{3\lambda^2(2-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda(2-\lambda)\mu_0} \dots\dots\dots (131)$$

iii) C型運動

(64), (65) 式より $\nu \leq \mu_0$ かつ $\nu \leq 1$ のとき C 型運動を生じ、最終たわみ量は、

$$\frac{mI^2}{M_0\bar{I}^2} \sigma \delta_T = \frac{1}{\lambda(2-\lambda)} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu_0}\right) \dots\dots\dots (132)$$

iv) D型運動

(80)～(82) 式より $\nu > 1$ であって、かつ

$$\nu < \frac{3\lambda^2(2-\lambda)2}{(-3\lambda^2+6\lambda-2)} \quad \left(\lambda \geq \frac{4}{9}\right)$$

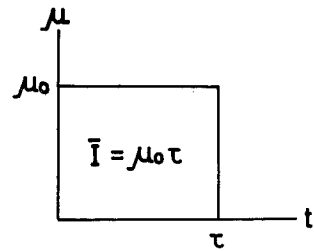


Fig. 15 Rectangular Pulse Loading

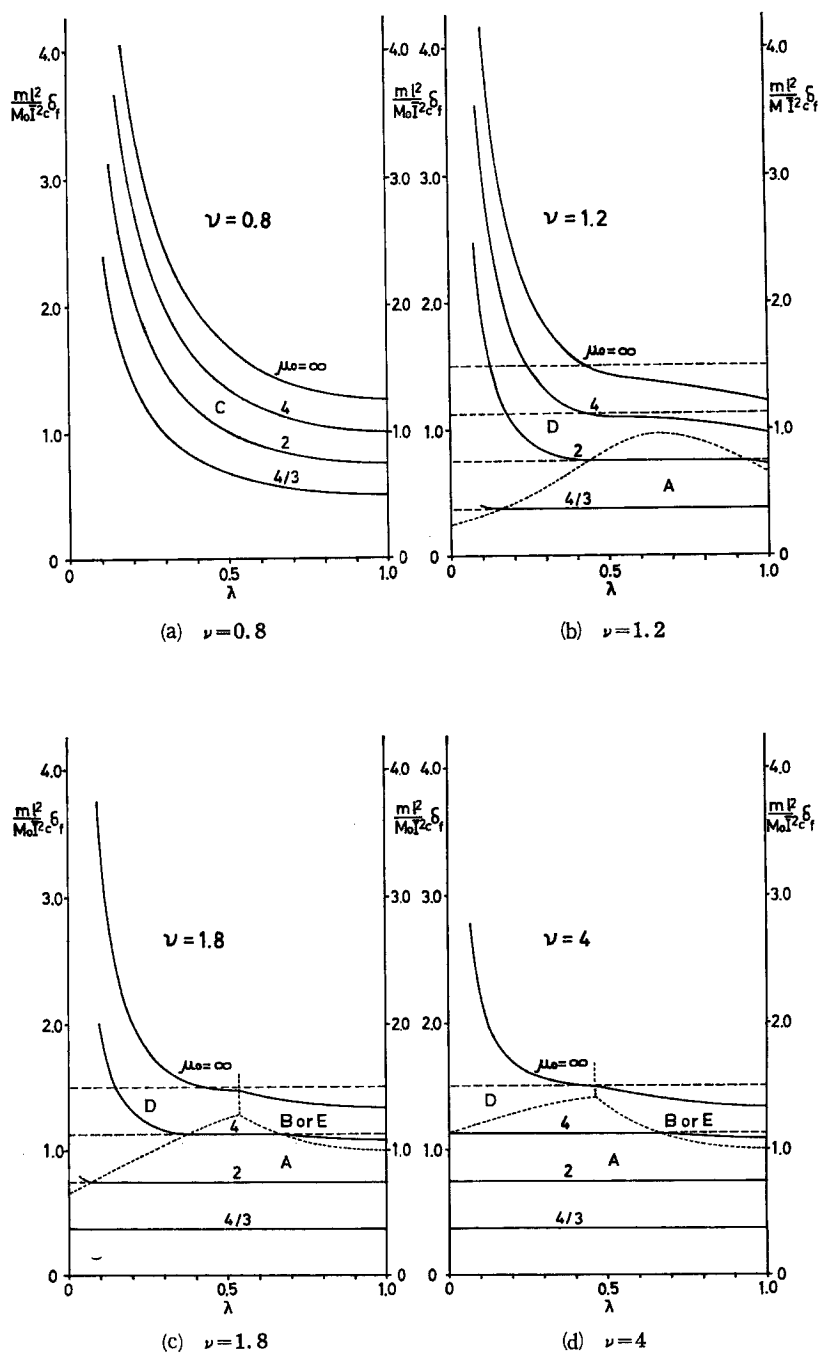


Fig. 16 Final Displacement of Midpoint

または

$$\frac{4\{(2-3\lambda)\nu-3(2-\lambda)(1-\lambda)^2\}^3}{27\{4(1-\lambda)^3+\lambda^3\}(2-\lambda)^3(\nu-1)} \leq 1 \quad \left(\lambda \leq \frac{4}{9}\right)$$

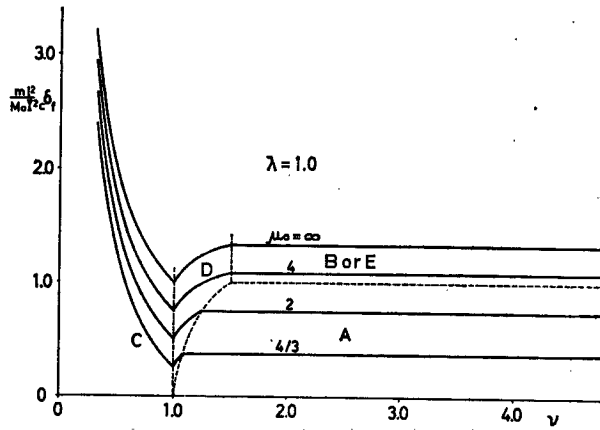
$$\text{しかも } \mu_0 \geq \frac{4\nu-3\lambda(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)^3+\lambda^3}$$

のとき、D型運動を生じ、最終たわみ量は

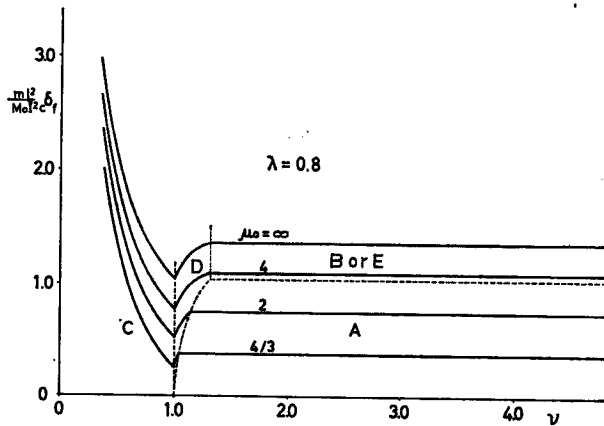
$$\frac{ml^2}{M_0 \bar{I}^2} \sigma \delta_f = \frac{3}{2} - \frac{\{4(1-\lambda)^3+\lambda^3\}(-3\lambda^2+6\lambda-2)}{2\lambda(2-\lambda)\{4\nu-3\lambda(2-\lambda)^2\}} - \frac{1}{\lambda(2-\lambda)\mu_0} \dots\dots\dots(133)$$

v) 結果

Figs. 16, 17 に中央点の最終たわみ量 $\sigma \delta_f$ と、作用幅係数 λ およびせん断強さ係数 ν の関係を、 μ_0 を助変数として示した。縦軸は $\bar{I}^2$ でわってあるので、 $\bar{I} = \mu_0 \tau$ を一定とし、パルスの形を変化させて比較していることになる。図中、英字 A, B, C, D, E とあるのは、最初どのような変形モードで運動が始まるかを



(a) $\lambda = 1.0$



(b) $\lambda = 0.8$

Fig. 17 Final Displacement of Midpoint

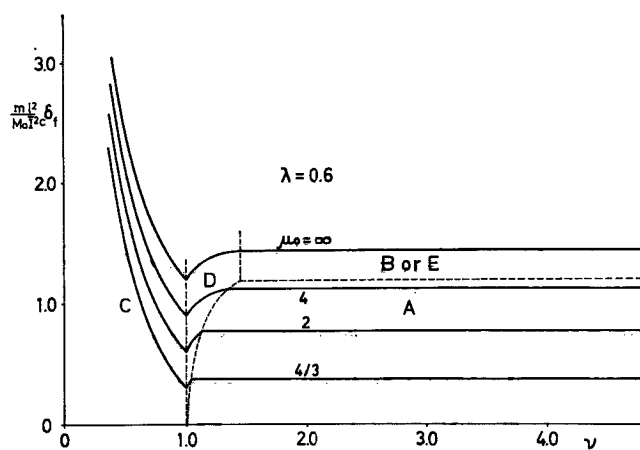
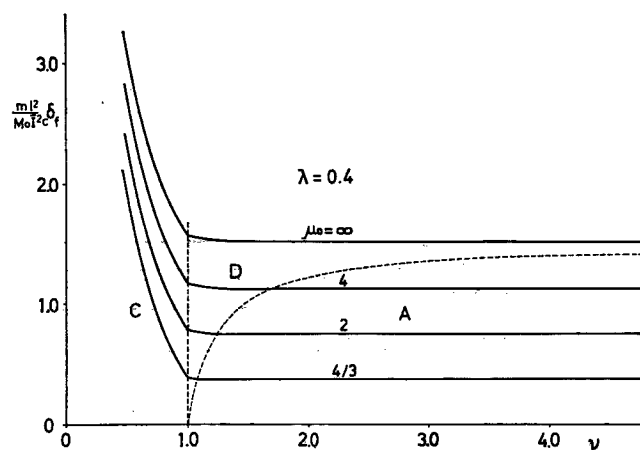
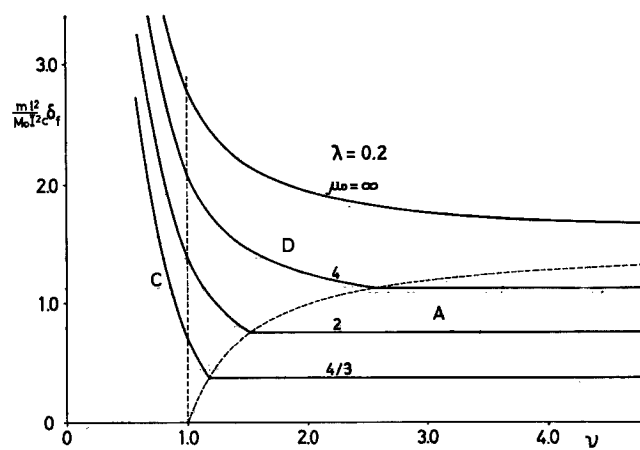
(c) $\lambda = 0.6$ (d) $\lambda = 0.4$ (e) $\lambda = 0.2$

Fig. 17 Final Displacement of Midpoint

示し、点線はその境界を表わしている。Fig. 16 (b), (c), (d) の水平破線は、B, D, E型が起るような場合でも、塑性条件が犯されることを無視してA型運動を想定し、(130) 式を適用した解で、A型運動の領域では正解であり、B, E型運動領域、および $\lambda > 0.4$ でのD型運動領域においても充分よい近似解である。この破線と実線は常に $\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.423$ で交わり、 $\lambda < 0.423$ では点線より実線が著しく上まわるのに対し、 $\lambda > 0.423$ ではむしろ下まわる。塑性領域を生ずるような運動領域では、中央点のたわみはせん断の影響を受けない。 λ が小さくなって集中荷重の状態に近づくとき、よほど μ_0 が小さくない限り、せん断の影響は著しく、変形量も増大する。一般に μ_0 が大きくなって、純衝撃に近づく程、変形量は増大するが、 μ_0 が10を越えれば λ, ν の値にかかわらず、パルスの形の相異による影響は少なくなって、純衝撃 ($\mu_0 = \infty$) と仮定してもそれ程誤差はない。

5. 結 語

i) 矩形塑性条件を有効な近似とみなせるような、I 形材や箱形断面材等では、通常 $\nu < 6$ の範囲で用いられることが多いが、この範囲では、たとえ μ が大きく純衝撃に近いような場合でも、移動関節を生ずるような変形モードでは運動しないから、本編で得られた解析解を適用することができる。一方、矩形断面材のように ν が10のオーダーであって、移動関節を生ずるような変形モードになったとしても、本編で得られた解析解で代用して、充分よい近似であろうと思われる。

ii) 荷重の作用巾が小さくなると最大たわみ量は増大し、せん断の影響も大きくなる。 $\lambda > 0.4$ の場合は、A型運動の解で充分近似させることができるが、 $\lambda < 0.4$ では、正確にせん断の影響を考慮する必要がある。集中荷重の場合、すべり運動を伴うような変形モードに対しては最終変形量は無限大となる。 $\lambda = 1$ のときはA, B, C, D, E型の運動のみが可能で、それらの結果は Nonaka and Symonds の結果と一致する。

参 考 文 献

- 1) M.G. Salvadori and P. Weidlinger "On the Dynamic Strength of Rigid-Plastic Beams under Blast Loads", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 83, No. EM4, October, 1957.
- 2) B. Karunes and E. T. Onat, "On the Effect of Shear on Plastic Deformation of Beams under Transverse Impact Loading", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 27, 1960, pp. 107—110.
- 3) T. Nonaka and P. S. Symonds, "Effects of Shear on a Rigid-Plastic Beam under Blast-type Loading", to be published.
- 4) E. H. Lee and P. S. Symonds, "Large Plastic Deformations of Beams under Transverse Impact", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME Vol. 19, 1952 pp. 308—314.
- 5) P. S. Symonds, "Large Plastic Deformations of Beams under Blast Type Loading", Proceedings of the 2nd U. S. National Congress of Applied Mechanics, 1954, pp. 505—515.