

ヤコビ曲面上のハイト関数と Birch-Swinnerton-Dyer 予想

吉富 賢太郎

1. 序

任意の代数体 K に対し, Σ_K^∞ で K の無限素点全体, Σ_K^0 で K の有限素点全体を表す. $\Sigma_K = \Sigma_K^\infty \cup \Sigma_K^0$ とおく. K_v を K の v における完備化とし, 有限素点 $v \in \Sigma_K^0$ に対して, π_v を v における素元, O_v を v -整数環, $k_v = O_v/\pi_v O_v$ を剰余体, q_v を k_v の位数, p_v を剰余標数とする. 絶対値 $|a|_v$, $a \in K, v \in \Sigma_K$ を

$$|a|_v = \begin{cases} |a| & v \text{ が実素点のとき,} \\ |a|^2 & v \text{ が複素素点のとき,} \\ q_v^{-\text{ord}_{\pi_v}(a)} & v \text{ が有限素点のとき,} \end{cases}$$

で定義する. C 上の因子 $a \in \text{Div}(C)$ に対して, a の support を $\text{supp}(a)$ で表す. また, 因子 a, a' に対して, $a \sim a'$ で線型同値を表す. 複素数もしくは複素ベクトル x に対し, $\bar{x}$ で複素共役を表す. $z \in \mathbb{C}^r$ と $\mathbb{C}^r$ の格子 Λ に対し, $\bar{z}$ で $\mathbb{C}^r/\Lambda$ における像を表す.

以下, K を代数体とし, $A = A_K$ を K 上定義されたアーベル多様体とする. 一般に A の symmetric ample divisor D に対して, mD を very ample として mD に対応する射影空間への埋め込みを ϕ_{mD} , 射影空間上の logarithmic height を h とするとき, A 上の height h_D が $h_D = \frac{1}{m} h \circ \phi_{mD}$ で定義される. また, canonical height $\hat{h} = \hat{h}_D$ が $\hat{h}_D(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_D(nz)/n^2$ で定義される. $\hat{h}$ は以下の性質を持つ.

$$\hat{h}(P) \geq 0,$$

$$\hat{h}(P) = 0 \Leftrightarrow P \text{ は有限位数,}$$

$$\text{任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して, } \hat{h}(nP) = n^2 \hat{h}(P).$$

定義 1.1. 各素点 v に対して, $A(\bar{K}) \setminus D$ 上の canonical local height $\hat{\lambda}_v$ とは, 以下の条件を満たすものである.

- (1) $\hat{\lambda}_v$ は D に対応する Weil local height function.
- (2) ϕ を $\Psi_2^* D = 4D + \text{div}(\phi)$ を満たす有理函数とすると

$$\hat{\lambda}_v(2z) = 4\hat{\lambda}_v(z) + v(\phi(z)).$$

ただし, Ψ_m は m 倍写像を表す.

Canonical local height は ϕ の取り方により定数を除いて定まることを注意しておく. また, $K = \mathbb{Q}$ とし, $P \in A(L) \setminus D$ のとき, (global) canonical height の local height への分解:

$$\hat{h}(P) = \sum_{v \in \Sigma_L} \frac{1}{[L_v : \mathbb{Q}_{p_v}]} \hat{\lambda}_v(P)$$

がなりたつ. 詳しくは S.Lang [7] を参照されたい.

1 次元のアーベル多様体つまり楕円曲線の場合は, canonical height は上の分解を使って計算される. すなわち, 無限素点での canonical local height は Tate 級数と呼ばれる収束の速い級数で近似計算され, 有限素点での canonical local height は基本的には具体的な Weierstrass equation の座標関数を使った表示式を持ち, 容易に計算される.

一方, 任意の与えられた種数 2 の超楕円曲線 C のヤコビ多様体の上の (テータ因子に対する) ハイト関数を計算する方法は, 今まで具体的に与えられていなかったが, これを Néron's formula を使って与えることができた. 以下では, その概略を説明する.

まず, Néron's local symbol を以下のように定義する.

各素点 $v \in \Sigma_K$ に対して, $\text{Div}_0(C)_{/K_v}$ を $\text{Div}_0(C)$ の K_v -rational subgroup とし, $Z_0(C)_{/K_v}$ を support の各点が K_v -rational な subgroup とする. このとき:

命題 1.2 ([6], p. 328). 互いに素な因子 $a \in Z_0(C)_{/K_v}$ と $b \in \text{Div}_0(C)_{/K_v}$ に対して実数値をとる一意的に定まる pairing $\langle a, b \rangle_v$ が存在して以下の条件を満たす.

- (i) $\langle a, b \rangle_v + \langle a, c \rangle_v = \langle a, b + c \rangle_v$.
- (ii) 任意の $b \in Z_0(C)_{/K_v}$ に対し $\langle a, b \rangle_v = \langle b, a \rangle_v$.
- (iii) $\langle a, \text{div}(g) \rangle_v = \log |g(a)|_v$.

(iv) 与えられた b と $x_0 \in C(K_v) \setminus \text{supp}(b)$ に対し, 写像

$$C(K_v) \setminus \text{supp}(b) \ni x \rightarrow \langle x - x_0, b \rangle_v \in \mathbb{R}$$

は連続.

一方, $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) \neq \emptyset$ のときは以下のように補正する.

$$\langle a, b \rangle_v = \log |g[a]|_v + \langle a, b' \rangle_v,$$

ただし, $b = b' + \text{div}(g)$ かつ $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b') = \emptyset$. また, f の x における修正値 (modified value) $f[x]$ を以下のように定義する. x における tangent vector $\frac{\partial}{\partial t}$ をとり, x のまわりの一意化元 z を $\frac{\partial z}{\partial t} = 1$ を満すようにとり, $f[x] := \frac{f}{z^m} \Big|_{z=0}$ とする. ただし, m は f の x における位数である. 任意の因子 $a = \sum a_x x$ に対して $f[a] := \prod f[x]^{a_x}$ と定義する. この場合には Néron's local pairing は定数を除けば一意化元の取り方に依らず定まる.

また, (global) height pairing $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ を

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \hat{h}(\bar{a} + \bar{b}) - \hat{h}(\bar{a}) - \hat{h}(\bar{b})$$

で定義すると次の Néron's formula が成り立つ.

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{v \in \Sigma_K} \langle a, b \rangle_v.$$

上記の補正により, $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) \neq \emptyset$ のときも右辺が well-defined となり, Néron's formula が成り立つ. 詳しくは [6] または [9] を参照されたい.

有限素点における Néron's local paring は交点理論で計算することができる. 一方, 無限素点における Néron's local pairing は Green 関数を使って表示することができるが, これを計算するのに, 主結果である canonical local height との比較定理を使って, canonical local height の計算に帰着することができる. 楕円曲線の場合は canonical local height と Néron's local paring の適当な正規化のもと,

$$\langle (P) - (O), (P) - (O) \rangle_v = 2(\lambda_v(\bar{z}_P) + \frac{1}{12} \log |\Delta(\Lambda)|),$$

なる関係式が成り立つことがわかる. ただし, 正規化は以下のようにする. すなわち, $E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ とするとき, canonical local height については $\lambda_v(z) = -\log |k(z)|$ (k は Klein 関数) とし, Néron's local pairing については一意化元として

O においては $\frac{y}{2x^2}$ を, P においてはその translation をとる. 主定理はこれを種数 2 の超楕円曲線のヤコビ多様体に対して拡張したものである (cf. §3).

無限素点における canonical local height は Silverman によって一般化された Tate 級数 (cf. §4.1) によって非常に良い近似計算をすることができるが, これを具体的に計算するのに必要な parameter は, $L(3\Theta)$ による P^8 への埋め込みによるモデルで計算される (cf. §4.2). このモデルは hyperelliptic p 関数によって具体的に表される. また, 主定理の証明にも hyperelliptic p 関数を用いる.

2. ヤコビ多様体

超楕円曲線 C を

$$y^2 = f(x) := x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = \prod_{i=1}^5 (x - \beta_i)$$

で定義される非特異射影曲線とする. ∞ で無限遠点を表す. $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ $B_i = (\beta_i, 0)$, $(i = 1, \dots, 5)$ とする. $B \cup \{\infty\}$ は分岐点全体である. $P = (x, y)$ のとき, Hyperelliptic involution を $P' = (x, -y)$ で表す.

C のホモロジー群 $H_1(C, \mathbb{Z})$ の基底 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$ を交点数が $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \gamma'_1 \cdot \gamma'_2 = 0$, $\gamma_i \cdot \gamma'_j = \delta_{ij}$ (Kronecker's δ) となるようにとり, また, 第 1 種微分の基底を $\mu_1 = \frac{dx}{2y}$, $\mu_2 = \frac{x dx}{2y}$ ととり, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ と書く. 周期 (period) は

$$\omega_{ij} = \int_{\gamma_j} \mu_i, \quad \omega'_{ij} = \int_{\gamma'_j} \mu_i, \quad (i, j = 1, 2).$$

で定義される. よく知られているように, $\tau = \omega^{-1}\omega'$ は次数 2 の Siegel 上半空間 $\mathfrak{h}_2$ の元である. period lattice Λ を $\Lambda = \omega\mathbb{Z}^2 \oplus \omega'\mathbb{Z}^2$ と定義すると $J = \mathbb{C}^2/\Lambda$ が C のヤコビ多様体 (ヤコビ曲面) である.

超楕円積分 $u^{P, P_0} = \int_{P_0}^P \mu \in \mathbb{C}^2$ と $u^P = u^{P, \infty}$ は $\text{mod } \Lambda$ で定まる. 各 因子 $b = \sum_P m_P P$ に対し, 対応する積分 $\sum_P m_P u^P$ を z_b で表す.

一方, C のヤコビ多様体 (ヤコビ曲面) J は代数的には $J = \text{Jac}(C) = \text{Pic}^0(C)$ で定義される. J の点は $\overline{P_1 + P_2 - 2\infty}$ ($P_1 \neq \infty, P_2 \neq \infty, P_1 \neq P_2'$) または $\overline{P - \infty}$ の

形に一意的に書け, 後者の全体が テータ因子 Θ である. $\text{Div}^0(C) \ni a \mapsto \tilde{z}_a$ は同型 $\text{Pic}^0(C) \simeq \mathbb{C}^2/\Lambda$ を誘導する.

次に 第2種 微分 ζ_1, ζ_2 を

$$\zeta_1 = \frac{(3x^3 + 2a_1x^2 + a_2x)dx}{2y}, \quad \zeta_2 = \frac{x^2dx}{2y},$$

とし, その周期 $\eta = (\eta_{ij}), \eta' = (\eta'_{ij})$ を

$$\eta_{ij} = \int_{\gamma_j} \zeta_i, \quad \eta'_{ij} = \int_{\gamma'_j} \zeta_i, \quad (i, j = 1, 2)$$

とおく. $\mathbb{R}$ -線型写像 $\tilde{\eta}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$\tilde{\eta}(u) = \eta r + \eta' r', \quad \text{ただし, } u = \omega r + \omega' r', r, r' \in \mathbb{R}^2$$

で定義する. これらの周期の間には次の関係式が成り立つ.

$$\eta' = \eta \tau + 2\pi i {}^t \omega^{-1}.$$

また,

$$\eta \omega^{-1} \text{ は symmetric } (\Leftrightarrow \eta {}^t \eta' = \eta' {}^t \eta.)$$

が成り立つ.

テータ関数 θ を Riemann テータ関数とし, $\mathbb{C}^2$ 上の関数 σ を次のように定義する.

定義 2.1. $u \in \mathbb{C}^2$ に対して,

$$\sigma(u) := \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u \eta \omega^{-1} u\right) \theta[\delta](\omega^{-1} u).$$

ここで, δ は theta characteristic $\delta = \begin{pmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{pmatrix}$, $\delta' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\delta'' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である. σ は Θ の $\mathbb{C}^2$ への引き戻しでのみ 1 位の零点を持つ.

定義 2.2. $i, j, \dots, k = 1, 2$ と $u \in \mathbb{C}^2$ に対し,

$$\zeta_i(u) := \frac{\partial}{\partial u_i} \log \sigma(u), \quad \text{及び} \quad p_{ij..k}(u) := -\frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \cdots \frac{\partial}{\partial u_k} \sigma(u)$$

と定義し, さらに, $p(u) = p_{11}(u)p_{22}(u) - p_{12}^2(u)$ とおく. また, $u, v \in \mathbb{C}^2$ に対し,

$$q(u, v) = -c^2 \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}$$

とおく.

このとき, $u, v \in C^2$ に対し, 次が成り立つ ([1], p. 100).

$$q(u, v) = p_{11}(u) - p_{11}(v) + p_{12}(u) p_{22}(v) - p_{12}(v) p_{22}(u),$$

$$-c^3 \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)} = p_{111}(u) - p_{12}(u) p_{122}(u) + p_{22}(u) p_{112}(u).$$

また, $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ とするとき, $p_{ij\dots k}(u^{P_1} + u^{P_2})$ は, x_i, y_i の有理対称式で具体的に表される. $p_{11}, p_{12}, p_{22}, p_{111}, p_{112}, p_{122}, p_{222}$, および p は いずれも $L(3\Theta)$ の元で, これらを使って $L(3\Theta)$ の基底を与えることができる. また, p_{ij}, p_{ijk} の間の関係式 $f_1, \dots, f_{14}$ (cf. [5]) が P^8 における J の定義方程式を与える (生成元は $f_2, \dots, f_8$). さらに, 加法公式, 倍公式を上記の $q(u, v)$ の表示式を使って導くことができる. これらについての詳細は [5], [15] を参照されたい.

3. 比較定理

$\phi = -c^3 \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)}$ とおくと $\Psi_2^* \Theta = 4\Theta + \text{Div}(\phi)$ が成り立つ. この ϕ に対して, J 上の canonical local height $\hat{\lambda}_v$ を定める. (cf. 定義 1.1)

Main Theorem. $P_i(x_i, y_i) \in C(K)$, ($i = 1, 2$) に対し, $b = P_1 - P_2$ とおく. ただし, $\bar{b} \notin \Theta$ とする. P_i における接空間の基底として, $2y_i \frac{\partial}{\partial x} = f'(x_i) \frac{\partial}{\partial y}$ をとる. この時, P_i における一意化元として, $\frac{x - x_i}{2y_i}$ ($P_i \notin B$ のとき), $\frac{y - y_i}{f'(x_i)}$ ($P_i \in B$ のとき) をとることができる. このとき, いずれの場合も 無限素点 v に対して,

$$\langle b, b \rangle_v = 2 \hat{\lambda}_v(\bar{z}_b)$$

が成り立つ.

また, 因子 $b \in Z_0(C)_K$ に対して, $b' \sim b$, $\text{supp}(b) \cap \text{supp}(b') = \emptyset$ をみたす因子 $b' \in \text{Div}_0(C)_K$ を $b' = P_5 + P_6 - P_3 - P_4$ の形にとることができて, 以下の等式が成り立つ.

系 3.1. $b = P_1 - P_2 \in Z_0(C)_{K_v}$, $b' = P_5 + P_6 - P_3 - P_4 \in \text{Div}_0(C)_{K_v}$ を上の通りとし, $u^i = u^{P_i}$ とする. このとき,

$$\langle b, b \rangle_v = \langle b, b' \rangle_v + \log |q(u^1 - u^2, u^3 + u^4 - u^2)|_v.$$

この系により, $\langle b, b' \rangle_v$ を無限素点 v に対して次節の Tate 級数を使って計算することができ, $\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle$ より, $\bar{b}$ の canonical height を計算することができる.

主結果とその系の証明は煩雑であるので省略する. 楕円曲線の場合の自然な拡張として種数 2 の “Klein” 関数を使って無限素点における Néron's local pairing が表されることを注意しておく. (cf. 著者 [15]).

4. TATE 級数

4.1. 一般論. まず, 無限素点における canonical local height を数値計算するのに用いる Tate(の) 級数について復習する. 詳細は [2] を参照されたい.

一般に V を非特異射影代数多様体とし, morphism $\Psi : V \rightarrow V$ と因子 $\Theta \in \text{Div}(V) \otimes \mathbb{R}$ があって $\Psi^* \Theta = \alpha \Theta + \text{div}(\phi)$ がある実数 $\alpha > 1$ と V 上の有理関数 ϕ に対して成り立つとする. さらに, $D_i \in \text{Div}(V) \otimes \mathbb{R}$ を $\bigcap \text{supp}(D_i) = \emptyset$ であって, $D_i \sim \Theta$ なるものとし, $t_1, \dots, t_r, t_i \in K(V) \otimes \mathbb{R}$ を $\text{div}(t_i) = \Theta - D_i$ を満たすものとする. 各 $i = 1, \dots, r$ に対して, w_i, z_i を $w_i = \phi \cdot t_i^\alpha$, $z_i = \frac{\phi \cdot t_i^\alpha}{t_i \circ \Psi}$, と定め, 各 $i, j = 1, \dots, r$ に対し, $s_{ij} = \frac{z_j w_i}{w_j}$. と定義する. また, 任意の豊富な因子 D に対して, 距離関数 λ_D を [2], pp. 191–192 のように定義する (D と V の点との距離を測るものと思えばよい). このとき, 次が成り立つ.

定理 4.1 ([2]). 与えられた $P \in V(\overline{K_v}) \setminus \text{supp}(\Theta)$ に対して, 整数列 $i_0, i_1, \dots, i_n, \dots$, を

$$\lambda_{\text{supp}(D_{i_n})}(\Psi^n P) = \min_{1 \leq i \leq r} \lambda_{\text{supp}(D_i)}(\Psi^n P).$$

が成り立つようにとる. 複数の i が条件を満たすときは最小のものをとることにする. さらに 実数列 c_n を

$$c_n = -v(s_{i_n i_{n+1}}(\Psi^n P)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

で定義すると, これは n, P によらず有界で,

$$\hat{\lambda}_\Theta(P) = v(t_{i_0}(P)) + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^{-n-1} c_n + O(\alpha^{-N})$$

が成り立つ. さらに, $O(\alpha^{-N})$ の定数は P と N によらない.

4.2. ヤコビ曲面の場合. 次に, 我々の場合に Tate 級数に必要な t_i, D_i を求める. 以下, $V = J$, Θ をテータ因子, $\Psi = \Psi_2 : 2$ 倍写像 とする. $\alpha = 4$ である.

$P \in J$ に対して T_P は $T_P : J \rightarrow J, D \mapsto D + P$ を表す.

補題 4.2. $D_1 = T_{B_1}^* \Theta$, $D_2 = T_{B_2}^* \Theta$, $D_3 = T_{B_{13}}^* \Theta$ とおくと, D_i は既約で, $\bigcap D_i = \emptyset$. が成り立つ.

この D_i は $2D_i \sim 2\Theta$ を満し, さらに t_i として, 以下のものがとれる.

補題 4.3.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t_1 &= \left(\frac{1}{p_{12} + \beta_1 p_{22} - \beta_1^2} \right)^{1/2}, \\ t_2 &= \left(\frac{1}{p_{12} + \beta_2 p_{22} - \beta_2^2} \right)^{1/2}, \\ t_3 &= \left(\frac{1}{p_{11} + (\beta_1 + \beta_3) p_{12} + \beta_1 \beta_3 p_{22} + A_{13}} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ここで,

$$A_{13} = (\beta_1 + \beta_3) (\beta_1^2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_3^2) + a_1 (\beta_1 + \beta_3)^2 + a_2 (\beta_1 + \beta_3) + a_3.$$

最後に $u \in \mathbb{C}^2$, $\tilde{u} \in J$ に対して, $\tilde{u}$ と Θ の '距離' を測る関数 λ_Θ として

$$\lambda_\Theta(\tilde{u}) = \max(\log |p_{ij}(u)|, \log |p_{ijk}(u)|, \log |p(u)|)$$

がとれる. ただし, $p_I(u) = 0$ が index I に対して成り立つときは $\log |p_I(u)|$ を $-\infty$ と見なす. 証明は [15] を参照されたい.

5. 実例

この節では, Birch-Swinnerton-Dyer 予想に関する実例について 計算例を示す.

5.1. Birch-Swinnerton-Dyer Conjecture. A を $\mathbb{Q}$ 上定義されたアーベル多様体とし, A' を 双対アーベル多様体, V_∞ を real periods $\text{Vol}(A(\mathbb{R}))$ の volume, S を bad prime 全体, V_S を $\text{Vol}(\prod_{p \in S} A(\mathbb{Q}_p))$, III を A の Tate-Shafarevich 群, $A(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ を Mordell-Weil 群の torsion part, r を Mordell-Weil rank とする. Birch-Swinnerton-Dyer 予想 (以下 BSD) はまず, r と Hasse-Weil zeta 関数 $L(s, A)$ の $s = 1$ における order r' が等しいことを主張している. r' と analytic rank と呼ぶ. さらに, α_i , $1 \leq i \leq r$ を $A(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}$ の生成系とし, $R = \det(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}$ とおく (A の regulator と呼ぶ). このとき BSD は以下の関係式が成り立つことを主張する.

[14], p. 51, Conjecture 2.8.2:

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{-r} L(s, A) = \frac{R V_\infty V_S \# \text{III}}{\# A(\mathbb{Q})_{\text{tors}} \# A'(\mathbb{Q})_{\text{tors}}}.$$

5.2. 実例.

Example 5.1. $N = 23$ とし, $X_0(N)$ を level N の modular curve とする. $X_0(N)$ は次の式で与えられる.

$$y^2 = f(x) = x^6 - 14x^5 + 57x^4 - 106x^3 + 90x^2 - 16x - 19.$$

χ を 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ に対応する指標とし, $C = X_0(N)_\chi$ を χ による $X_0(N)$ の twist すなわち,

$$-7y^2 = f(x) = x^6 - 14x^5 + 57x^4 - 106x^3 + 90x^2 - 16x - 19,$$

とする. $J = \text{Jac}(C)$ とする. ここではこの $A = J$ に対して BSD の等式が 'up to rational' で成り立つことを確かめる. すなわち,

BSD(weak version):

$$(5.1) \quad \frac{\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{-r} L(s, A) \# A(\mathbb{Q})_{\text{tors}} \# A'(\mathbb{Q})_{\text{tors}}}{R V_\infty V_S} \in \mathbb{Q}.$$

$S_2(N)$ を weight 2 の $\Gamma_0(N)$ に関する cusp forms の空間とする. $S_2(23)$ は 2 次元で $g \in S_2(23)$ を eigen cusp forms の一つで $g(q) = a_1 + a_2q + \cdots$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

なる Fourier 展開を持つものとする (cf. [4]). よく知られているように 各係数 a_n は $K = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ に属し, σ を $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の生成元とすると, g, g^σ は $S_2(23)$ の基底となる. g_χ を $\sum_{n \geq 1} \chi(n) a_n q^n$, で与えられる cusp form とすると $g_\chi \in S_2(23 \cdot 7^2)$ である. このとき, $L(s, J) = L(s, g_\chi) L(s, g_\chi^\sigma)$ が成り立つ. 関数等式の符合は -1 なので, $L(s, g_\chi)$ も $L(s, g_\chi^\sigma)$ も analytic rank/2 は奇数である. さらに $L'(1, g_\chi), L'(1, g_\chi^\sigma)$ を直接計算することにより, analytic rank = 2 であることがわかる:

$$\begin{aligned} L'(g_\chi, 1) &= 3.3236701591276114211249090245717594419417 \\ &\quad 548256170127399799836304033108 \dots, \\ L'(g_\chi^\sigma, 1) &= 1.2235733780550577014994167260813838530875 \\ &\quad 469109100787909011075184313338 \dots. \end{aligned}$$

従って, J の Mordell-Weil rank も 2 と予想される. 以下では Mordell-Weil rank 2 と仮定する. 一方, C 上には 4 つの $\mathbf{Q}$ -rational point $P_1(1, 1), P_2(3, 5), P_1', P_2'$ がある. そこで, $b_1 = P_1 - P_2, b_2 = P_1 - P_2', b_3 = P_1 - P_1'$ とおくと, $b_i \in Z_0(C)_\mathbf{Q}$ である. $\alpha_i = \overline{b_i} \in J(\mathbf{Q}), (i = 1, 2, 3)$ とすると容易にわかるように $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ が成り立つ. もし, $R' := \det(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle_{1 \leq i, j \leq 2})$ が 0 でなければ, α_1, α_2 は独立であり, R' は regulator R に整数倍を除いて一致する.

次に, 無限素点の canonical local height を計算する.

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)(x^3 - 11x^2 + 22x - 19)$$

と分解され, $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ の唯一の実根 x_0 をとると $\mathbf{Q}(x_0)$ -同型

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{f'(x_0)}{x - x_0}, \frac{f'(x_0)^2 y}{(x - x_0)^3} \right),$$

を得る. この同型の像は $y^2 = x^5 + \dots \in \mathbf{Q}(x_0)[x]$ で与えられる. これから, Tate 級数を計算すると以下ようになる ($N_T \geq 150$):

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_\infty(\alpha_1) &= 8.7417108302483296767154557179790709120077 \\ &\quad 0880444567048579023157642390338444909942 \dots, \\ \hat{\lambda}_\infty(\alpha_2) &= 8.5824393360065566735121235093036839525837 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4396997136609666242902462638802297360634\dots, \\
& \hat{\lambda}_\infty(\alpha_3) = 8.7561543364583716258929769839951270330761 \\
& 3410174036934238900919308262429139876024\dots
\end{aligned}$$

一方, C 上の P_1, P_2 と異なる 2 点 $P_3(5 - \sqrt{13}, 10 - 3\sqrt{13}), P_4(5 + \sqrt{13}, 10 + 3\sqrt{13})$ をとると, これに対して, C 上の 6 点 $P_j, (j = 5, \dots, 10)$ が定まり, $b_i \sim b'_i = P_{2i+3} + P_{2i+4} - P_3 - P_4$ となる. $G_i = G_{b_i, b'_i}$ を $\text{div}(G_i) = b_i - b'_i$ を満たす $K(C)$ の元とする. $P_j, (j = 5, \dots, 10)$ は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}
P_5 &= (3\sqrt{-1}, 2 + 21\sqrt{-1}), \\
P_6 &= (-3\sqrt{-1}, 2 - 21\sqrt{-1}), \\
P_7 &= \left(\frac{1015 + 3\sqrt{32009}}{256}, \frac{-70569557 - 419001\sqrt{32009}}{4194304} \right), \\
P_8 &= \left(\frac{1015 - 3\sqrt{32009}}{256}, \frac{-70569557 + 419001\sqrt{32009}}{4194304} \right), \\
P_9 &= \left(\frac{437 + \sqrt{147206}}{107}, \frac{27721445 + 67635\sqrt{147206}}{1225043} \right), \\
P_{10} &= \left(\frac{437 - \sqrt{147206}}{107}, \frac{27721445 - 67635\sqrt{147206}}{1225043} \right).
\end{aligned}$$

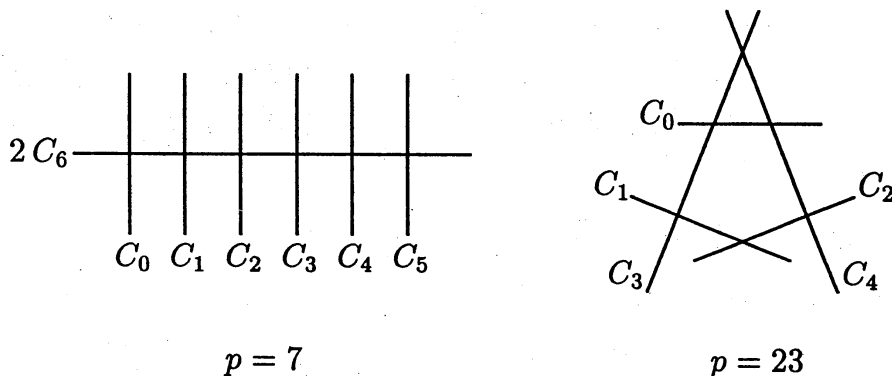
これらはいずれも P_1, P_2 と異なる. 従って, (実) 素点における Néron's local paring $r_i := \langle b_i, b'_i \rangle_\infty = 2\hat{\lambda}_\infty(\alpha_i) - \log |G_i[b]|$ を計算することが出来て, 以下のようなになる:

$$\begin{aligned}
r_1 &= -0.3779682038474793239566516214064928511906 \\
& 5187702973806955564168003000827460539180\dots, \\
r_2 &= -0.1995352620720013629776611485766647308863 \\
& 6166002662262541504391361101778520199515\dots, \\
r_3 &= -2.3135175421748408234366903964991804162103 \\
& 7008163231687118098438209046679595805722\dots
\end{aligned}$$

次に有限素点における Néron's local paring を計算する. $p = 2$ の上では, (5.1) は正規ではないので $y = (x^3 + x^2 + 1) + 2Y$ として正規化する. 容易に

$$\langle b_1, b'_1 \rangle_2 = -\log 2, \quad \langle b_2, b'_2 \rangle_2 = 0, \quad \langle b_3, b'_3 \rangle_2 = -\log 2$$

を得る. また, $p = 7, p = 23$ の場合の fiber は以下ようになる.



C_i は $C_6(p = 7)$ と $C_3, C_4(p = 23)$ が (-3) -curve で, それ以外は (-2) -curve である. $p = 7, 23$ における Néron's local pairing は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \langle b_1, b'_1 \rangle_7 &= \langle b_2, b'_2 \rangle_7 = \langle b_3, b'_3 \rangle_7 = 0 \\ \langle b_1, b'_1 \rangle_{23} &= -\frac{6}{11} \log 23, \quad \langle b_2, b'_2 \rangle_{23} = 0, \quad \langle b_3, b'_3 \rangle_{23} = -\frac{6}{11} \log 23. \end{aligned}$$

以上から,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}^0} \langle b_1, b'_1 \rangle_v &= -\log 2 + 3 \log 3 - \frac{6}{11} \log 23, \\ \sum_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}^0} \langle b_2, b'_2 \rangle_v &= -3 \log 3 + \log 887, \\ \sum_{v \in \Sigma_{\mathbf{Q}}^0} \langle b_3, b'_3 \rangle_v &= -\log 2 + \log 3 + \log 179 - \frac{6}{11} \log 23. \end{aligned}$$

を得, 従って, $h_i = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) とおくと

$$h_1 = 0.5144519092719137003718049687337098118895$$

$$6676307438099043759656003472103072539585\dots,$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= 3.2924728542332490532396517934684869119793 \\
&\quad 9026185015676151351622678083750406914366\dots, \\
h_3 &= 1.5690637994490878142790801498173730131778 \\
&\quad 0086100745083786934319002486632428241500\dots
\end{aligned}$$

となる. $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = (h_3 - h_1 - h_2)/2$ より,

$$\begin{aligned}
R' &= 0.4418135224747459009837796585512486028911 \\
&\quad 9027232784016701161394069098323593670992\dots
\end{aligned}$$

を得る.

一方 real period は M-symbol([3]) を使って計算される. ここでは 技術的な理由 (レベルが高くなると精度が落ちる) から $X_0(23)$ の imaginary period (の 7 倍) で代用する. (これを V'_∞ とおく).

$$\begin{aligned}
V'_\infty &= 10.2506719848116009699526519174413057653616 \\
&\quad 5631926561357938968846741216424637142414\dots
\end{aligned}$$

また, $V_S = 11 \cdot 16$, および $\#J(\mathbf{Q})_{tors} = 1$ がわかる. 以上より,

$$T := \frac{\frac{1}{2}L'(g_X, 1)L'(g_X^\sigma, 1)\#J(\mathbf{Q})_{tors}^2}{R'V'_\infty V_S},$$

とおくと,

$$392 \cdot T = 0.999999999\dots ('9' \text{ は少なくとも } 50 \text{ 回以上続く}).$$

と計算され, $T = \frac{1}{392}$ と推測することが出来, (5.1) が確かめられた.

REFERENCES

- [1] *H. F. Baker*, Multiply periodic functions, Cambridge University Press, 1907.
- [2] *G. S. Call and J. H. Silverman*, Canonical heights on varieties with morphisms, *Compositio Math.* **89** (1993), 163–205.
- [3] *J. E. Cremona*, Algorithms for modular elliptic curves, Cambridge University Press, 1992.

- [4] *K. Doi*, On the jacobian varieties of the fields of elliptic modular functions, *Osaka Math. J.* **15** (1963), 249–256.
- [5] *D. Grant*, Formal groups in genus two, *J. reine angew. Math.* **411** (1990), 96–121.
- [6] *B. H. Gross*, Local Heights on Curves, *Arithmetic Geometry* (*G. Cornell and J. H. Silverman*, eds.), Springer-Verlag, 1985, pp. 327–339.
- [7] *S. Lang*, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, 1983.
- [8] *Y. Namikawa and K. Ueno*, The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two, *Manuscripta Math.* **9** (1973), 143–186.
- [9] *A. Néron*, Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, *Ann. of Math.* **82** (1965), 249–331.
- [10] *G. Shimura*, On the factors of the jacobian variety of a modular function field, *J. Math. Soc. of Japan* **25** (1973), 523–544.
- [11] ———, On the periods of modular forms, *Math. Ann.* **229** (1977), 211–221.
- [12] *J. H. Silverman*, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, GTM106, Springer-Verlag, 1986.
- [13] ———, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, GTM151, Springer-Verlag, 1994.
- [14] *W. W.J. Hulsbergen*, *Conjectures in Arithmetic Algebraic Geometry*, *Aspects of Mathematics*, Vieweg, 1992.
- [15] *K. Yoshitomi*, On height functions on Jacobian surfaces, preprint.