

量子 XXZ スピン鎖の準位間隔分布における予想外の振る舞い¹

お茶の水女子大学 理学部 出口 哲生²
お茶の水女子大学 人間文化研究科 工藤 和恵³

1 はじめに

ランダム行列理論はカオス系のみならず、量子スピン系の準位統計にも応用されてきた。量子スピン系の準位間隔分布は、与えられたハミルトニアンが可積分ならポアソン分布 [$P_{\text{Poi}}(s) = \exp(-s)$] を、非可積分ならウィグナー分布 [$P_{\text{Wig}}(s) = (\pi s/2) \exp(-\pi s^2/4)$] を示すことが経験的に知られている。

ところで、量子 XXZ スピン鎖には、ある特異な対称性が現れるということが、最近の研究 [1] から明らかになった。その対称性は、異方性変数 $\Delta = (q + q^{-1})/2$ の q が 1 のべき根のときのみ現れる。そのとき、XXZ ハミルトニアンは sl_2 ループ代数という非可換代数と交換し、その縮退次元は、格子点数に対して指数関数的に増加する。このような特異な対称性があることから、量子 XXZ スピン鎖の可積分性と準位間隔分布との関係は、再考する価値があるといえる。

本研究では、量子 XXZ スピン鎖の準位間隔分布を、可積分の場合、また次近接相互作用を含む非可積分の場合について調べた。

2 模型と計算方法

格子点数 L のハミルトニアンを次のように与える。

$$\mathcal{H} = J_1 \sum_{j=1}^L (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \Delta_1 S_j^z S_{j+1}^z) + J_2 \sum_{j=1}^L [\alpha (S_j^x S_{j+2}^x + S_j^y S_{j+2}^y) + \Delta_2 S_j^z S_{j+2}^z] \quad (1)$$

ここで $S^a = \frac{1}{2} \sigma^a$ で ($\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$) はパウリ行列である。境界条件は、周期的境界条件を課す。また、簡単のため $J_1 = 1$ とする。ハミルトニアン (1) は $J_2 = 0$ なら可積分、 $J_2 \neq 0$ なら非可積分である。

ハミルトニアン (1) は、鏡映、並進、 z 軸まわりのスピンの回転という 3 つの自明な対称性を持つ。これらの対称性を取り除くため、パリティ、波数、 S_{total}^z によって分類し、 $S_{\text{total}}^z = 0$ の最大のセクターについてのみ固有値の計算を行なった。そのセクターは、 $L = 16$ では 440×440 の行列となる。また、準位間隔分布を計算する際には、アンフォールディング処理も行なった。

3 可積分の場合

可積分 ($J_2 = 0$) のとき、準位間隔分布は、ほとんどの場合、ポアソン分布的な振る舞いを示す。異方性変数 Δ_1 の様々な値 ($0 \leq \Delta_1 < 1$) で準位間隔分布を調べたところ、 Δ_1 が特殊な値をとる場合以外では、ほぼポアソン分布的であった。ところが、 $L = 16$ のとき $\Delta_1 = \cos(\pi/m)$, $m = 2, 3, 4$ では、図 1 のように、 $s = 0$ でピークが出現した。このピークの出現は、前節で述べた対称性を取り除いた後でも多数の縮退が残っているため、前述の sl_2 ループ代数の対称性と対応している。

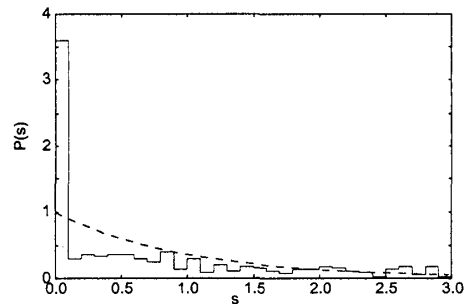


図 1: 可積分で $\Delta_1 = 0.5$ の場合の準位間隔分布。破線はポアソン分布。

¹研究会では Phys. Rev. B **68**, 052510 (2003) の内容を解説しました。

²E-mail:deguchi@phys.ocha.ac.jp

³E-mail:kudo@degway.phys.ocha.ac.jp

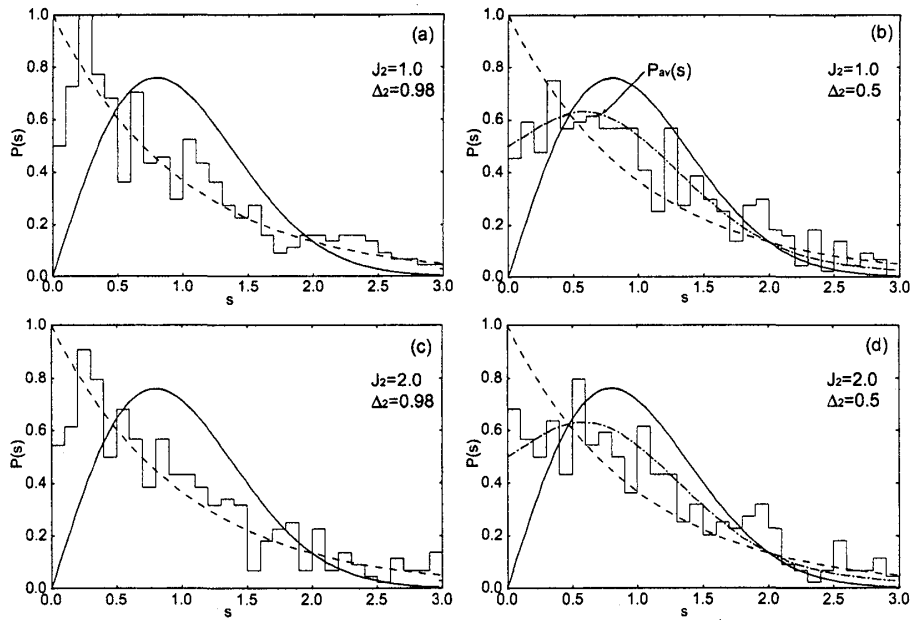


図 2: 非可積分 ($J_2 \neq 0$) の場合の準位間隔分布。破線はポアソン分布。実線はウィグナー分布。

4 次近接相互作用を含む (非可積分) の場合

非可積分 ($J_2 \neq 0$) の場合には、 J_2 と Δ_2 の様々な組み合わせについて準位間隔分布を計算した。ただし、簡単のため $\Delta_1 = 1$ とした。図 2 に見るように、予想していたウィグナー分布は現れず、 Δ_2 が 1 に近い場合はむしろポアソン分布に近い振る舞いさえ示している。ただし、 $\Delta_2 = 1$ 、すなわちハイゼンベルク模型の場合には、ウィグナー分布が出現することが確認されている [2, 3]。 $0 \leq \Delta_2 < 1$ の範囲では Δ_2 が 1 に近い場合以外ではウィグナー分布とポアソン分布の中間 $P_{av}(s) = [P_{Poi}(s) - P_{Wig}(s)]/2$ に近い分布を示す。また、式 (1) で $\alpha = 0$ の場合でも同様の分布を示す。このように Δ_2 に関しては依存性が見られるのに対して、 J_2 に関しては $J_2 = 1, 2$ の間では見られなかった。

非可積分 ($J_2 \neq 0$) であるのにウィグナー分布が見られなかった理由としては、(i) 考慮にいていない対称性がある、(ii) 有限サイズ効果のためという 2 点が考えられる。図 2 のような非ウィグナー分布が出現するのは、非対称化が十分でない、つまり、考慮していない対称性が残っていると解釈するのが一般的である。しかしながら、第 2 節で挙げた 3 つの対称性以外の対称性が XXZ スピン鎖にあるのかどうかは明らかでない。一方で、有限サイズ効果のために非ウィグナー分布を示すということも十分考えられる。しかしながら、格子点数 $L = 16$ は極めて小さいサイズとは言えず、有限サイズ効果が主要な理由であるかどうかは明らかではない。

本研究は科研費 (14702012) の支援を受けています。

参考文献

- [1] T. Deguchi, K. Fabricius, and B. M. McCoy, J. Stat. Phys. **102**, 701 (2001).
- [2] T. C. Hsu and J. C. Anglès d'Auriac, Phys. Rev. B **47**, 14291 (1993).
- [3] D. Poilblanc, T. Ziman, J. Bellissard, F. Mila, and G. Montambaux, Europhys. Lett. **22**, 537 (1993).