

$U(1)$ gauge 理論にもとづく3次元多様体の位相不変量 I.

東大・理 牛嶋 徹 (Toru Gocho)

§ 1. introduction.

数年前, Witten は [W] において新しい type の3次元多様体 (及びその中の link) の位相不変量の存在を物理的な議論により示した。そこでは不変量を Feynmann の経路積分により定義するという論法がとられている。これを直接に扱うことは現在の数学ではできないので、この“積分”が持つべき性質を抽出して不変量を公理的にとらえようという考えが Atiyah, Segal により提出され (Atiyah のいう topological quantum field theory [A]) 数学サイドとしてはこの公理にのるようには不変量を厳密に構成するという態度がとられているように思われる。中でも [K], [R-T] などにより現在ではこうした不変量の数学的な存在は確立されている。

さて, original の [W] における考え方, 及びこれに関連した Atiyah 周辺の人達の研究によると, この不変量

は微分幾何学的な構成が可能のように思われる。彼らの主張にもとづき、できる限り幾何学的に不変量を構成し、理解したいというのが筆者の希望である。そのために、[W]においては非可換な gauge 群に対する場合が扱われているが、まず gauge 群が可換な $U(1)$ のとまに同様の構成を幾何的に explicit に行なうことから始めようと思っただけである。以下 [W] における考え方を base にこの場合の不変量の構成を説明したい。

§ 2. 不変量構成のあらまし

M を closed oriented 3次元多様体とし、 $P_M = M \times U(1)$ を trivial $U(1)$ bundle とする。このとき A_M を P_M 上の connection space $A_M \cong \Omega^1(M, \sqrt{-1}\mathbb{R})$ として、 A_M 上に $CS(A) = \frac{1}{4\pi} \int_M A \wedge dA$ なる関数 $CS: A_M \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。このとき Witten 流に不変量を定義すれば、

$$Z_k(M) = \int_{A_M} e^{\sqrt{-1}k CS(A)} dA \quad (k \text{ は parameter})$$

となる。

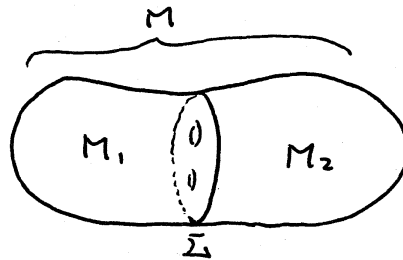
こうしたものが数学的にとらえられるようなものにまで reduce できる magic は、 M が non-empty な境界をもつ場合にも不変量 $Z_k(M)$ を拡張して考えることができる点にある。すなわち、 M の境界 ∂M を $\partial M = \Sigma$ として、

P_Σ, A_Σ などを用いて M を Σ にかえたものとし、 $r: A_M \rightarrow A_\Sigma$ を restriction map とするとき、拡張された不変量 $Z_k(M)$ は A_Σ 上の関数 $Z_k(M): A_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ として、

$$Z_k(M)(a) = \int_{r^{-1}(a)} e^{\int_M KCS(A)} \mathcal{D}A$$

により定義される。

このように不変量を拡張して考える利点は、



$M = M_1 \cup_\Sigma M_2$, $\partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$ と分解したとき、

$$\begin{aligned} Z_k(M) &= \int_{A_M} e^{\int_M KCS(A)} \mathcal{D}A \\ &= \int_{A_M} e^{\int_{M_1} KCS(A_1) + \int_{M_2} KCS(A_2)} \mathcal{D}A, \quad A_i = A|_{M_i} \\ &= \int_{A_\Sigma} Z_k(M_1)(a) \overline{Z_k(M_2)(a)} \mathcal{D}a \\ &= \langle Z_k(M_1), Z_k(M_2) \rangle \end{aligned}$$

と $Z_k(M)$ が $Z_k(M_1)$ と $Z_k(M_2)$ の pairing で定義できる点にある。

さて、ここでは説明を略すが、 M が non-empty な境界 $\partial M = \Sigma$ をもつときの不変量 $Z_k(M)$ は、 Σ 上に complex structure J を fix することと、complex gauge 変換群 $\mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}} = C^\infty(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ による symmetry で割ってやることで、商空間 $\mathcal{M}_{\Sigma, J} = A_\Sigma // \mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}}$ 上の holomorphic line bundle $\mathcal{L}_{\Sigma, J}^{(k)} \rightarrow \mathcal{M}_{\Sigma, J}$ の holomorphic section とみなすことができる。ただしこのために parameter k は $k \in \mathbb{Z}$ と量子化

される。(A_Σ は trivial bundle $\mathbb{C} \rightarrow \Sigma$ 上の holomorphic line bundle structure 全体とみなせ. $\mathcal{G}_\Sigma^c = GL(\mathbb{C})$ であることから $\mathcal{M}_{\Sigma,J}$ は degree 0 の line bundle の moduli 空間 (いわゆる Picard variety となる。) これにより, original の $Z_k(M): A_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ を $Z_k(M) \in H^0(\mathcal{M}_{\Sigma,J}, \mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)})$ ととるえなおすという idea が生まれ, 不変量 $Z_k(M)$ は, M の境界 $\partial M = \Sigma$ に付随した有限次元 vector space の元としてとるえなおすことができる。(これが Atiyah の topological quantum field theory の idea である。)

今, $H^0(\mathcal{M}_{\Sigma,J}, \mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)})$ を $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ と書き, $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)} = \bigcup_J \mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ を Σ の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_\Sigma$ 上の vector bundle とみなすとき, $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ には projective flat connection が入るといふのが [W] の主張である。さらに $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ には Σ の mapping class group $\Gamma_\Sigma = \text{Diff}^+(\Sigma)/\text{Diff}_0^+(\Sigma)$ が作用し, この connection に対する monodromy 表現として $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ 上に Γ_Σ が projective linear に作用することになる。実際に gauge 群が $U(1)$ のときは上記 $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ は Siegel 上半平面上の vector bundle に拡張し, Γ_Σ は Siegel modular 群 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ (g は Σ の genus) を通して作用する。(ここで Γ_Σ の作用をもつために $k \in 2\mathbb{Z}$ と量子化される。)

このとき得られる monodromy 表現は次のようになる。

$\mathcal{H}_{\Sigma, J}^{(k)}$ は $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^g$ を parameter とする unitary base

$\{\Psi_\ell\}_{\ell \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^g}$ をもつ Hilbert 空間となり. $\mathcal{H}_{\Sigma, J}^{(k)}$ 上の

$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の作用は generator に対して.

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \cdot \Psi_\ell = k^{-g/2} \sum_{\ell'} e^{2\pi\sqrt{-1} \ell' \ell / k} \Psi_{\ell'}$$

$$\begin{pmatrix} A & \\ & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \cdot \Psi_\ell = \sum_{\ell'} a_{\ell' \ell} \Psi_{\ell'}, \quad A \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z})$$

$$\text{ここで} \quad a_{\ell' \ell} = \begin{cases} 1 & \text{if } {}^t A \ell' = \ell \\ 0 & \text{if } {}^t A \ell' \neq \ell \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & B \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot \Psi_\ell = e^{\sqrt{-1}\pi {}^t \ell B \ell / k} \Psi_\ell, \quad B \in M_g(\mathbb{Z}), \quad {}^t B = B$$

で与えられる。

こうして $\partial M = \Sigma$ のとき $Z_k(M)$ の属する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\Sigma, J}^{(k)}$ 及び その上の mapping class group Γ_Σ の作用が定まると closed oriented 3次元多様体 M に対する不変量が任意の M は Heegaard 分解をもつことを利用して定義できる。

すなわち H_g を genus

g の handle body, $\partial H_g = \Sigma_g$,

$f \in \Gamma_{\Sigma_g}$ として, M が

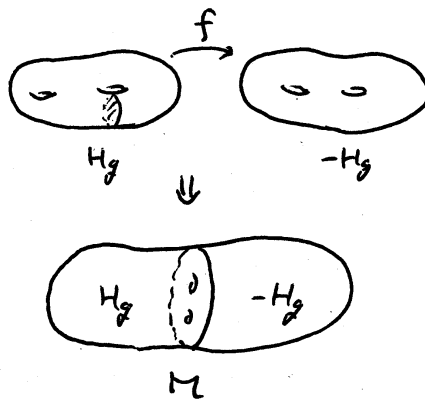
$M = H_g \cup_f (-H_g)$ と表わせる

とすると, topological quantum

field theory の要請から, $Z_k(M) = \langle f \cdot Z_k(H_g), Z_k(H_g) \rangle$

となるなければならないことが分かる。したがってこの

$Z_k(M)$ が M の Heegaard 分解の仕方によらないように。



最後に、こうした不変量が3次元多様体 M のどのような不変量と関係しているのかを調べることは、gauge 群を非可換にした場合の不変量がどのような種類の不変量の拡張となっているのかを知る上でも大切なことである。これに関しては、現在大概氏による研究が進行中なので、そちらに期待したいと思う。又、一般の境界付き3次元多様体 M に対する不変量 $z_k(M)$ も gauge 群が $U(1)$ のときには、 $H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\partial M, \mathbb{Z})$ という restriction map により割に直接的に定義ができるようなので、この点でも非可換 gauge 群の場合の理解に役立つのではないかと期待している。

(references)

- [A]. M. F. Atiyah, Topological quantum field theories,
Publ. I.H.E.S. 68 (1989) 175-186
- [G]. T. Gotoh, The topological invariant of three-manifolds
based on the $U(1)$ gauge theory (preprint)
- [K]. T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using
representations of mapping class group I (preprint)
- [R-T]. N. Reshetikhin, V. Turaev, Invariants of 3-manifolds
via Link polynomials and Quantum group.

Invent. Math. 103 (1991), 547-597

[W]. E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial

Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351-399