

p 進体上の多様体のアルバネーゼ余核について (On the Albanese cokernel of varieties over p -adic fields)

By

甲斐 亘 (Wataru KAI) *

Abstract

This is an announcement of results by the author [4].

Let X be a smooth projective variety over a p -adic field K . In this article we present a conjectural formula describing the cokernel of the Albanese map of zero-cycles for X in terms of the Néron-Severi group and sketch a proof that it is true under additional assumptions on an integral model of X . The case where X is a curve has been settled by Lichtenbaum completely. We will also briefly mention the local-global problem for the Albanese-cokernel; the abelian group on the “local side” turns out to be a finite group.

§ 1. 導入

本稿では K を p 進体 ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大) とする. K の整数環を $\mathcal{O}_K$ と書く.

定理 1.1 (Lichtenbaum [5, Theorem 2]). X を K 上の非特異完備曲線とする. このときねじれ群とコンパクト群の完全双対を実現するペアリング

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K) \times \mathrm{CH}_0(X)^0 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

がある.

ここに現れる群は本稿で基本的な役割を果たすので定義を確認しておこう. スキーム Y の 0 次元サイクルの Chow 群 $\mathrm{CH}_0(Y)$ とは, Y の閉点の集合が生成する自由アーベル群 $Z_0(Y)$ を有理同値で割った群のことである.

$$\mathrm{CH}_0(Y) = Z_0(Y)/\text{有理同値}.$$

Received March 18, 2015. Revised October 10, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14F22, 14G20.

Key Words: Albanese map, Brauer groups.

Supported by Grant-in-Aid for JSPS Research Fellow (JSPS KAKENHI Grant Number 15J02264), and the Program for Leading Graduate Schools, MEXT, Japan.

*Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen.

e-mail: kaiw@ms.u-tokyo.ac.jp

Y が何らかの基礎体上固有のとき次数写像 $\deg: \mathrm{CH}_0(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ が定義できてその核を $\mathrm{CH}_0(Y)^0$ と記す. 今、定理の X は K 上の非特異完備曲線なので、ヤコビ多様体 J_X の K 有理点群への標準的単射 $\mathrm{CH}_0(X)^0 \hookrightarrow J_X(K)$ が存在し、像は右辺に体の位相から誘導されるコンパクト・ハウスドルフな位相について開部分群である.

スキーム Y の Brauer 群 $\mathrm{Br}(Y)$ はエタールコホモロジー群

$$\mathrm{Br}(Y) = H_{\mathrm{et}}^2(Y, \mathbb{G}_m)$$

として定義する. これはスキーム Y に関して反変関手として振舞う. 正則なスキームの Brauer 群はねじれアーベル群であることが知られている. 構造射による引き戻し写像 $\mathrm{Br}(K) \rightarrow \mathrm{Br}(X)$ の余核を $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K)$ と記す.

ペアリングは以下のように記述できる. まず, X の閉点 x に対して合成写像

$$\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Br}(x) \xrightarrow{\mathrm{cor}} \mathrm{Br}(K)$$

で値を定め, これを線型に延長してペアリング $\mathrm{Br}(X) \times Z_0(X) \rightarrow \mathrm{Br}(K)$ を定義する. これが定理のペアリング

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(K) \times \mathrm{CH}_0(X)^0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を誘導する.

Lichtenbaum の定理と Tate 双対を用いると, 標準的単射 $\mathrm{CH}_0(X)^0 \hookrightarrow J_X(K)$ の余核が決定できる. K の代数閉包 $\bar{K}$ を一つ固定し, $G = G_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ と書くことにしよう. $\bar{X} := X \times_K \bar{K}$ とおく.

系 1.2. 標準的単射 $\mathrm{CH}_0(X)^0 \hookrightarrow J_X(K)$ の余核は次数写像

$$\deg: \mathrm{Pic}(\bar{X})^G = \mathrm{CH}_0(\bar{X})^G \rightarrow \mathbb{Z}$$

の余核の Pontryagin 双対に標準的に同型である.

この結果を高次元の多様体に一般化したい. 曲線のヤコビ多様体はピカル多様体ともアルバネーゼ多様体とも捉えられ, 対応して $\mathrm{CH}_0(X)^0$ はピカル群とも 0 次元サイクルの Chow 群とも捉えられる. (アルバネーゼ多様体については少しあとで正確な定義を振り返る.) Van Hamel [2] は前者の立場に立って Lichtenbaum の双対理論を一般化する研究を行い, その系として一般次元の X について標準的単射

$$\mathrm{Pic}^0(X) \hookrightarrow \mathbf{Pic}_X^0(K)$$

の余核の記述を得た. ここで K -スキーム X のピカルスキーム $\mathbf{Pic}_X$ の単位成分 (= ピカル多様体) を $\mathbf{Pic}_X^0$ と記している. その結果によると, 余核は X のアルバネーゼスキーム $\mathrm{Alb}_X^{\mathrm{tot}}$ の連結成分のなす群 $\mathrm{Alb}_X^{\mathrm{tot}}/\mathrm{Alb}_X = \mathbb{Z}$ を, K 有理点を持つような連結成分からなる部分群で割ったものの Pontryagin 双対と標準的に同型である.

本稿では一般次元の非特異射影多様体 X について、**アルバネーゼ写像**

$$\mathrm{alb}_X: \mathrm{CH}_0(X)^0 \rightarrow \mathrm{Alb}_X(K)$$

の余核をピカールスキーム Pic_X の連結成分を用いて記述することについて講演者が得た結果 [4] について述べる. この余核は「 K が代数閉体や有限体から離れている度合い」と「 X がアーベル多様体から離れている度合い」を併せて測っている量だと看做せ, 数論的興味を伴うものである.

§2 でアルバネーゼ写像の定義とその余核 (**アルバネーゼ余核**) の持つ基本的な性質を見たあと主定理を述べ, §2 の残りで証明の概略を述べる. §2.1 では Lichtenbaum の定理 1.1 の高次元化である斎藤-佐藤の定理 2.3 をテコにして定理 1.1 から系 1.2 を導くのと同じ路を辿ることで, 問題をある写像の単射性に帰着する. この単射性は 1 次元の場合には定義域が自明であるという理由で自明に成立していたものである. §2.2 ではこれを de Jong による東屋代数の存在定理の助けを借りて解く方法を見る. §3 では**アルバネーゼ余核の局所大域問題**を紹介する.

§2. 主定理

以後, X を K 上の非特異射影多様体とする. K 上の多様体とは K 上幾何的に整なスキームを意味することとする. K 上の多様体が非特異とは $\mathrm{Spec}(K)$ への構造射がスムーズであることとする. $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$ と書く.

アルバネーゼ写像の定義. 簡単のため X は K 有理点を持つとする. このとき X のアルバネーゼ多様体 Alb_X と呼ばれるアーベル多様体と射 $\varphi: X \rightarrow \mathrm{Alb}_X$ が定義されて次の普遍性を持つ: X からアーベル多様体 A への射 $\psi: X \rightarrow A$ が与えられたとき, 射 $f: \mathrm{Alb}_X \rightarrow A$ で $\psi = f \circ \varphi$ を満たすものがただ一つ存在する. 射 φ は平行移動の分の不定性を除いて一意に決まる.

φ により CH_0 に誘導される推進写像とアーベル多様体 Alb_X の持つトランスファー構造 (有限次体拡大 L'/L に対して $\mathrm{Alb}_X(L') \rightarrow \mathrm{Alb}_X(L)$) によりアーベル群の準同型 (アルバネーゼ写像)

$$\mathrm{alb}_X: \mathrm{CH}_0(X)^0 \rightarrow \mathrm{Alb}_X(K)$$

が定まる. 定義域を次数 0 部分に制限しているため, これは φ の取り方に依らない. この写像の余核に我々は興味がある.

X が K 有理点を持つとは限らない場合は定義を若干修正する必要がある ([4] を参照).

アルバネーゼ余核の基本性質. アルバネーゼ写像は, 従ってアルバネーゼ余核は任意の体上の非特異射影多様体に対して定義できるが, その性質をいくつか挙げよう.

命題 2.1. 体 F 上の非特異射影多様体に対するアルバネーゼ余核は, 次の性質を持つ.

- F が代数閉体または有限体のとき, アルバネーゼ余核は常に自明である. 多様体 Y がアーベル多様体のときも基礎体に関わらず自明である.
- アルバネーゼ余核は F 上の非特異射影多様体の圏上の共変関手でありアーベル群の圏に値を持つ. 基礎体の拡大に対して制限写像があり, 基礎体の有限次拡大に対してトレース (ノルム) 写像がある. (従ってアルバネーゼ余核は常にねじれアーベル群である.)
- 射 $Y' \rightarrow Y$ が双有理同値のとき, Y' と Y のアルバネーゼ余核は同型である.
- F が素体上有限生成な体, p 進体または $\mathbb{R}$ のとき, アルバネーゼ余核は常に有限である. また, これらの体上で Y が 3 次元以上のとき, Y の非特異な超曲面切断で Y に同型なアルバネーゼ余核を持つものが存在する.
- アルバネーゼ多様体が自明であるような多様体に対してはアルバネーゼ余核は自明である. とくに, 有理多様体, $K3$ 曲面, Fermat 曲面, 射影空間の中の 2 次元以上の非特異完全交叉多様体などに対しては自明である.

主定理. 我々の主定理は次の主張である.

定理 2.2 ([4, Theorem 1.1]). X が $\mathcal{O}_K$ 上のスムーズかつ射影的なモデル $\mathcal{X}$ で, その $\mathcal{O}_K$ 上のピカールスキーム $\mathbf{Pic}_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}$ が $\mathcal{O}_K$ 上スムーズであるようなものを持つとする. このとき有限アーベル群

$$\mathrm{cok}(\mathrm{alb}_X: \mathrm{CH}_0(X)^0 \rightarrow \mathrm{Alb}_X(K))$$

は, 有限アーベル群

$$\mathrm{cok}(\mathrm{Pic}(\overline{X})^G \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X})^G)$$

の Pontryagin 双対に標準的に同型である.

本節の残りで定理の証明の概略を述べる. 定理は X が K 有理点を持つ場合に帰着して証明することができるので以下常に X は K 有理点を持つと仮定する.

§ 2.1. 可換図式

定理の記号を継続する.

定理の証明においては Brauer-Manin ペアリング

$$\mathrm{CH}_0(X)^0 \times \frac{\mathrm{Br}(X)}{\mathrm{Br}(K) + \mathrm{Br}(\mathcal{X})} \rightarrow \mathrm{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

と Tate ペアリング

$$\mathrm{Alb}_X(K) \times H^1(K, \mathrm{Pic}^0(\bar{X})) \rightarrow \mathrm{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が重要な役割を果たす. ここで $\frac{\mathrm{Br}(X)}{\mathrm{Br}(K)+\mathrm{Br}(\mathcal{X})}$ は分子を分母の二つの群の像の和で割った群を表す.

前者は §1 で登場したのと同じものであって Brauer 群の元の閉点への制限から定まるペアリング $Z_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ から誘導される. Brauer-Manin ペアリングの非退化性について斎藤・佐藤の最近の結果がある:

定理 2.3 ([6, Theorem 1.1.3, Remark 2.1.1]). ペアリング

$$\mathrm{CH}_0(X)^0 \times \frac{\mathrm{Br}(X)}{\mathrm{Br}(K) + \mathrm{Br}(\mathcal{X})} \rightarrow \mathrm{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

は右側で非退化である. つまり誘導される写像 $\frac{\mathrm{Br}(X)}{\mathrm{Br}(K)+\mathrm{Br}(\mathcal{X})} \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{CH}_0(X)^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射である.

一方, Tate ペアリングはコンパクト群とねじれ群の Pontryagin 双対をなしている [7].

二つのペアリングに現れる四つの群のうち $\mathrm{CH}_0(X)^0$ と $\mathrm{Alb}_X(K)$ はアルバネーゼ写像 $\mathrm{alb}_X: \mathrm{CH}_0(X)^0 \rightarrow \mathrm{Alb}_X(K)$ で関係付けられている. 残り二つの群同士にも写像を作ろう. まず Hochschild-Serre スペクトル系列から導かれる同型 $\phi_2^X: \frac{\mathrm{Br}(\bar{X}/X)}{\mathrm{Br}(K)} \rightarrow H^1(K, \mathrm{Pic}(\bar{X}))$ がある. ここでスキームの射 $Y' \rightarrow Y$ が与えられたとき $\mathrm{Br}(Y'/Y) := \ker(\mathrm{Br}(Y) \rightarrow \mathrm{Br}(Y'))$ と記すことにした. このとき ϕ を次の合成写像とする.

$$\phi: H^1(K, \mathrm{Pic}^0(\bar{X})) \xrightarrow{\phi_1} H^1(K, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \xrightarrow[\cong]{(\phi_2^X)^{-1}} \frac{\mathrm{Br}(\bar{X}/X)}{\mathrm{Br}(K)} \xrightarrow{\phi_3} \frac{\mathrm{Br}(X)}{\mathrm{Br}(K) + \mathrm{Br}(\mathcal{X})}$$

ここで, 両端の写像 ϕ_1, ϕ_3 は自然な写像である.

補題 2.4. Brauer-Manin ペアリングと Tate ペアリングは alb_X と ϕ を介して整合的である:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CH}_0(X)^0 & \times & \frac{\mathrm{Br}(X)}{\mathrm{Br}(K)+\mathrm{Br}(\mathcal{X})} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow \mathrm{alb}_X & & \uparrow \phi & & \parallel \\ \mathrm{Alb}_X(K) & \times & H^1(K, \mathrm{Pic}^0(\bar{X})) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

補題の証明は [4, §3.3] を参照されたい.

この可換性と二つのペアリングの非退化性により $\mathrm{cok}(\mathrm{alb}_X)$ と $\ker \phi$ が Pontryagin 双対となる. そこで $\ker \phi$ を決定すればよい. ϕ の定義から完全系列

$$0 \rightarrow \ker \phi_1 \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{\theta} \ker \phi_3$$

がある. これは

$$0 \rightarrow \frac{\mathrm{NS}(\overline{X})^G}{\mathrm{Im.Pic}(\overline{X})^G} \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{\theta} \mathrm{Br}(\overline{\mathcal{X}}/\mathcal{X})$$

と書き換えられることが示せるので, $\theta: \ker \phi \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{\mathcal{X}}/\mathcal{X})$ が零写像であることを示すのが我々の目標となる. ここで $\mathrm{Im.Pic}(\overline{X})^G$ は $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X})^G$ の像であり $\overline{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ とおいた.

なお, X が 1 次元の場合は $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$ が自明であるためこの時点で証明完了となる ($\mathcal{X}$ はスムーズでなくても正則ならばよい).

さて k を K の剰余体とし, $Z := \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_K} k$ を X の $\mathcal{X}$ に関する還元とする. $\overline{K}$ の剰余体を $\overline{k}$ とし $\overline{Z} := Z \times_k \overline{k}$ と書く. ピカル群の特殊化写像 $\mathrm{sp}: \mathrm{Pic}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(Z)$ とは次のように定義できる写像であった: $\mathrm{Pic}(X)$ の元を全射 $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathrm{Pic}(X)$ により $\mathcal{X}$ に持ち上げ, 閉ファイバーに制限することで $\mathrm{Pic}(Z)$ の元を定める. こうして定まる $\mathrm{Pic}(Z)$ の元は持ち上げに依らない.

$$\mathrm{Pic}(X) \leftarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathrm{Pic}(Z)$$

これは代数的同値性を保つため Néron-Severi 群の特殊化写像 $\mathrm{sp}: \mathrm{NS}(X) \rightarrow \mathrm{NS}(Z)$ も定まる. さらにこれらが K の有限次拡大体それぞれに対して整合的に定義できるので $\mathrm{sp}: \mathrm{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{Pic}(\overline{Z})$, $\mathrm{sp}: \mathrm{NS}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{Z})$ を得る.

命題 2.5 ([4, Proposition 3.7]). 次の図式は可換である. ここで, 右下の写像 inf はガロアコホモロジーのインフレーション写像である.

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccc} H^1(K, \mathrm{Pic}^0(\overline{X})) & \xrightarrow{\quad} & H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X})) & \xrightarrow{\quad} & H^1(K, \mathrm{NS}(\overline{X})) \\ \uparrow \cup & & \uparrow \phi_2^X \cong & & \downarrow \mathrm{sp} \\ \ker \phi & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Br}(\overline{\mathcal{X}}/\mathcal{X}) & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{Br}(\overline{X}/X)/\mathrm{Br}(K) & \xrightarrow{\quad} & H^1(K, \mathrm{NS}(\overline{Z})) \\ & & \downarrow & & & & \uparrow \mathrm{inf} \\ & & \mathrm{Br}(\overline{Z}/Z) & \xrightarrow[\cong]{\phi_2^Z} & H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{Z})) & \xrightarrow{\quad} & H^1(k, \mathrm{NS}(\overline{Z})) \end{array}$$

また ϕ_2^Z は ϕ_2^X と同様にして Hochschild–Serre スペクトル系列から得られる同型写像である.

この図式で上段の二つの写像の合成は 0 であるため, $\mathrm{Br}(\overline{\mathcal{X}}/\mathcal{X})$ から下側の経路をへて $H^1(K, \mathrm{NS}(\overline{Z}))$ へ至る合成写像が単射であることが示せれば $\theta = 0$ が結論できる. 次の小節でこの単射性の証明の概略を述べる.

§ 2.2. 単射性

命題 2.6. 図式 (2.1) に現れる写像 (i) $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{Z})) \rightarrow H^1(k, \mathrm{NS}(\overline{Z}))$ および (ii) $H^1(k, \mathrm{NS}(\overline{Z})) \xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(K, \mathrm{NS}(\overline{Z}))$ はともに単射である.

証明. (i) の単射性は $H^1(k, \text{Pic}^0(\bar{Z})) = 0$ から分かる. この消滅は代数群の第一ガロアコホモロジーは有限体上では消滅するという Lang の定理による. (ii) の単射性は, 一般に群コホモロジーのインフレーション写像が H^1 に対しては単射であるという事実から従う. $\square$

次に $\text{Br}(\bar{\mathcal{X}}/\mathcal{X}) \rightarrow \text{Br}(\bar{Z}/Z)$ の単射性を扱う. K' が K の有限次体拡大のとき, その剰余体を k' とし $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$, $Z' = Z \times_k k'$ とおく. K' が K の有限次拡大体すべてを亘るとき

$$\text{Br}(\bar{\mathcal{X}}/\mathcal{X}) = \bigcup_{K'} \text{Br}(\mathcal{X}'/\mathcal{X})$$

が成立するので $\text{Br}(\mathcal{X}'/\mathcal{X}) \rightarrow \text{Br}(Z'/Z)$ の単射性を示せばよい.

命題 2.7. 記号は今までの通りとする. 整数 $i \geq 1$ に対して $Z_i = \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^i$, $Z'_i = Z_i \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$ とおく. このとき

(1) 制限写像が引き起こす写像 $\text{Br}(\mathcal{X}) \rightarrow \varprojlim_i \text{Br}(Z_i)$ は単射である.

(2) 第一成分への射影が引き起こす写像

$$\ker \left(\varprojlim_i \text{Br}(Z_i) \rightarrow \varprojlim_i \text{Br}(Z'_i) \right) \rightarrow \ker (\text{Br}(Z_1) \rightarrow \text{Br}(Z'_1))$$

は単射である.

(3) $\text{Br}(\mathcal{X}'/\mathcal{X}) \rightarrow \text{Br}(Z'/Z)$ は単射である.

証明. (3) は (1),(2) と次の図式から従う.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Br}(\mathcal{X}) & \rightarrow & \varprojlim_i \text{Br}(Z_i) & \rightarrow & \text{Br}(Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Br}(\mathcal{X}') & \rightarrow & \varprojlim_i \text{Br}(Z'_i) & \rightarrow & \text{Br}(Z') \end{array}$$

(1) を証明するには de Jong による東屋代数の存在定理 [3, Theorem 1.1] を用いて [1, Lemme 3.3] にある単射性の主張を拡張する. (2) の証明にピカルスキームがスムーズであるという仮定を使う. 詳細は [4, Proposition 3.9] を参照されたい. $\square$

§ 3. 局所大域問題

この最後の節では X を数体 F 上の非特異射影多様体とする. F の (有限又は無限) 素点 v に対して F の v における完備化を F_v とし $X_v = X \times_F F_v$ とおく.

$\text{Alb}_X \times_F F_v = \text{Alb}_{X_v}$ が成立するため次の写像がある:

$$\frac{\text{Alb}_X(F)}{\text{alb}_X(\text{CH}_0(X)^0)} \rightarrow \prod_v \frac{\text{Alb}_{X_v}(F_v)}{\text{alb}_{X_v}(\text{CH}_0(X_v)^0)}$$

ここで v は F の素点すべてを亘る.

ここで両辺に現れる群 $\text{Alb}_X(F)/\text{alb}_X(\text{CH}_0(X)^0)$, $\text{Alb}_{X_v}(F_v)/\text{alb}_{X_v}(\text{CH}_0(X_v)^0)$ はそれぞれ有限群である (命題 2.1).

命題 3.1. 右辺は有限群である. すなわち, ほとんどすべての素点 v に対して

$$\text{alb}_{X_v} : \text{CH}_0(X_v)^0 \rightarrow \text{Alb}_{X_v}(F_v)$$

は全射である.

この全射性は Néron モデルの理論を用いて証明する [4, Theorem 4.1].

局所大域写像は, X が曲線の場合には単射 $\frac{J_X(F)}{\text{Pic}^0(X)} \hookrightarrow \text{Br}(F)$ を用いて Brauer 群の局所大域原理から単射であることが分かる. 一般次元の場合にも単射なのではないかと予想しているが今のところ手がかりはつかめていない.

参考文献

- [1] A. Grothendieck. Le groupe de Brauer III. in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, Amsterdam, 1968.
- [2] J. van Hamel. Lichtenbaum-Tate duality for varieties over p -adic fields. *J. reine angew. Math.* **575** (2004), 101–134.
- [3] A. J. de Jong. A result of Gabber. preprint, 2003, available at <http://www.math.columbia.edu/~dejong/>
- [4] W. Kai. A higher-dimensional generalization of Lichtenbaum duality in terms of the Albanese map. *Compositio Math.* **152** (2016), 1915–1934.
- [5] S. Lichtenbaum. Duality Theorems for Curves over P -adic Fields. *Inventiones math.* **7**, 120–136 (1969).
- [6] S. Saito and K. Sato. Zero-cycles on varieties over p -adic fields and Brauer groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **47**, no. 3, 505–537, 2014.
- [7] J. Tate. WC -groups over p -adic fields. *Séminaire N. Bourbaki*, 1956–1958, exp. no. 156, 265–277, 1957.