

Gap Soliton と非線形シュレディンガー方程式

飯塚 剛 (Takeshi Iizuka)* 愛媛大理

1996 年 1 月 30 日

1 序論

周期系におけるソリトン現象は、「Bloch 波の modulation が非線形シュレディンガー (NLS) 方程式で記述される」という一般的事実を背景に、近年様々な物理系で研究がなされている [1]~[12]。代表的な例として、Klein-Gordon 方程式 [1, 3]、diatomic 格子 [9, 10]、一般の周期格子 [2, 4]、誘電体中の電磁波 [6]~[8] 等があげられる。また長波長極限として KdV (Korteweg de Vries) 方程式の導出も、diatomic 格子 [11] および Helmholtz 共鳴器中の音響波 [12] においてなされている。以上の事例を見る限り、均一系におけるソリトンの普遍性はそのまま周期系に拡張できることが容易に予想できる。実際、非線形周期系における Bloch 波の変調理論が、モデルに依存しない一般的な形で提出されていて [1, 3]、これはいわば拡張された逓減摂動法ということになる。この方法は、そのままほぼ機械的に非線形格子に応用できることもわかった [2, 4]。

本稿では、これを誘電率が周期的に不均一な光ファイバーにおける、電磁波に適用する。この系については既に、Gap ソリトンの発見 [6] 以来、多くの解析がなされている。特に Gap ソリトンに対する理論的説明 [7, 8] では、「ブロッホ波の変調」というアイデアが述べられており、これが非線形シュレディンガー方程式に還元されることが証明されている。ただし、ここでは波自体が周期性を持つ、と仮定してあって、角波数 k が離散的な値のみしか許されなくなる。その結果、分散性による高次の補正項の決定が困難になる。一方、先に述べた拡張された逓減摂動法では、波に周期性を課する必要はなく、さらに分散性の補正項の決定がブロッホ波から直接決定できる、という利点がある。以上の理由から、この系について「拡張された逓減摂動法」を応用することに関しては、十分研究余地があると考えられる。

ここで上に述べた Gap ソリトンについて、簡単に説明をする。Bloch 波に対する分散関係は、一般的にバンド構造を持っており、Gap に相当する角振動数の波は許されない。しかし、これはあくまで線形波動の範囲の制限であり、非線形効果を考えることによって角振動数が Gap 内にシフトすることがある。ここでいう非線形効果とは、NLS 方程式の 1 ソリトン解に出てくる、 $e^{-i\Omega t}$ のようなファクターを意味してる。つまり、搬送波の角波

*e-mail: iizuka@sci.ehime-u.ac.jp

数をバンド端に設定して、包絡波として NLS 方程式のソリトン解を考えればその角振動数が、Gap に入り込んでしまうのである。これを、Gap ソリトンといい、誘電体中の電磁波 [6]~[8] で最初に見いだされた。ちなみに Gap ソリトンは、非線形格子系でも見いだされている。

誘電体中の電磁波の一連の解析 [6]~[8] にはもう 1 つ注目すべきことがある。つまり、そこでは誘電体本来の分散性を考えていない、ということである。物質の誘電率 ϵ は一般的には電磁波の周波数に依存し $\epsilon = \epsilon(\omega)$ 、これが結果的に分散性の原因となっている。いわゆる光ソリトンの出現も、この分散性が一因である。ところが、解析 [6]~[8] においては、誘電率が一定という仮定をしていて、このとき線形波の分散性が消えるので、ソリトンは生じないかのように見える。しかしながら、周期的な不均一性を導入することによって、物質本来の分散性がなくても、ブロッホ波を介して「人工的に」分散性を生じさせることができるのである。この発想は、従来の

$$\text{「媒質の分散性効果」} + \text{「非線形性効果」} = \text{「ソリトン」}$$

という図式では説明できない、新たなソリトンメカニズムを示唆している。

$$\text{「媒質の周期的不均一性」} + \text{「非線形性効果」} = \text{「ソリトン」}$$

このような、「無分散媒質でのソリトン現象」は工学的に見ても注目すべきことであろう。例えば管内の 1 次元音響波に対して、この発想が既に適用されている [12]。本来分散性の波でない音響波は、非線形効果によって衝撃波になる傾向があるわけだが、Helmholtz 共鳴器によって人工的に分散性をつくることにより、それを抑えることができる、というのがこの考え方である。以下にわかる通り、本稿でも無分散の誘電体を扱う。

ここで、本稿の内容を簡単に述べる。次節では、Bloch 波の変調の一般論を述べる。第 3 節では誘電率が周期的に不均一であるような、無分散ファイバー中の電磁波を取りあげて、そこでのソリトンの存在を示す。次に、周期性の具体例として 2 種類のファイバーが等間隔につながれた系を取り上げて、Bloch 波、バンド構造、非線形シュレディンガー方程式等を explicit に求める。最後にまとめと今後の課題を述べる。

2 ブロッホ波変調の一般論

ブロッホ波変調の一般論については、既に他で述べられているのだが [1, 2] ここで新たに議論を展開するには次の 2 つの理由がある。

- 第一に、以前の理論では角振動数 ω について、一般解の摂動展開していたが、この方法では群速度がゼロの場合に適用できない。その結果バンド端における Gap ソリトンが導出できない、という欠点がある。そこでここでは、ほとんど同じ方法ではあるが、角波数 k について展開を採用することにした。
- 第二に、これまでの理論 [1]~[4] では包絡波を記述する変数 τ に、local なゲージ関数 $\chi(x)$ が導入されていたのだが、これは非線形シュレディンガー方程式を導くのに有利であつ

た一方、解を τ の複素平面に解析接続しなければならない、という数学的困難が伴った。ここでは、ゲージ関数を導入する代わりに、「非線形の補正項」の導入してこの困難を回避するという、あらたな方法を提出することにした。

2.1 分散補正項

しばらくは1次元周期的「線形系」を考える。この系のブロッホ波を $Z(x, k)e^{i(kx - \omega t)}$ と書く。ここで、 x, t はそれぞれ空間座標、時間を示しており、定数 ω, k は角振動数、角波数をそれぞれ表している。また系の周期を L とすると $Z(x, k)$ は次の周期性を満たしている。

$$Z(x + L, k) = Z(x, k) \quad (2.1)$$

今考えてる波動を $u(x, t)$ とすると、線形系の場合は基本解であるブロッホ波の重ね合わせで表示できるので、次の積分表示ができる。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k) Z(x, k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (2.2)$$

ここで、分布関数 $\rho(k)$ について重要な仮定をする。つまり、 $\rho(k)$ は $k = \pm k_0$ の周りのごく狭い領域、例えば $\pm k_0 - \varepsilon \Delta < k < \pm k_0 + \varepsilon \Delta$ にのみ分布すると考える。ただし ε は smallness parameter を表し、 Δ は $O(1)$ の定数である。この仮定を考慮に入れて、再スケールされた角波数 K と分布関数 $\tilde{\rho}(K)$ を次のように定義する。

$$k = k_0 + \varepsilon K \quad (2.3a)$$

$$\rho(k) = \varepsilon^{-1} \tilde{\rho}(K) \quad (2.3b)$$

これを用いて、積分 (2.2) の $Z(x, k)$ の部分と、指数関数の部分の $O(\varepsilon^2)$ までの量を考慮に入れ、摂動展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} u(x, t) = & e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta}^{\Delta} \tilde{\rho}(K) \left\{ 1 + \varepsilon K \frac{\partial}{\partial k} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon K \frac{\partial}{\partial k} \right)^2 \right\} Z(x, k_0) \\ & \cdot \exp i \left\{ K \varepsilon \left(x - \frac{d\omega_0}{dk} t \right) - \frac{K^2}{2} \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \varepsilon^2 t \right\} dK \\ & + c.c. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし $\omega_0 = \omega(k_0)$ 、 $d\omega_0/dk = d\omega(k_0)/dk$ 、 $d^2\omega_0/dk^2 = d^2\omega(k_0)/dk^2$ とした。以下 k_0, ω_0 等を改めて k, ω と書き直すことにする。ここで独立変数 ξ, τ と従属変数 $\Psi = \Psi(\xi, \tau)$ を以下のように導入する。

$$\xi = \varepsilon \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right) \quad (2.5a)$$

$$\tau = \varepsilon^2 t \quad (2.5b)$$

$$\Psi(\xi, \tau) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \tilde{\rho}(K) \exp i \left(K \xi - \frac{K^2}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \tau \right) dK \quad (2.5c)$$

すると積分 (2.4) は次式のような展開となる。

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \left\{ Z(x, k) \Psi + \varepsilon \frac{\partial Z(x, k)}{i \partial k} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{i \partial k} \right)^2 Z(x, k) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right\} + c.c. \quad (2.6)$$

この展開式の ε 最低次の項をみるかぎり、 $u(x, t)$ はブロッホ波 $Z(x, k)e^{i(kx - \omega t)}$ がゆっくりと変調した波であり、その包絡線 (2.5c) は $\Psi(\xi, \tau)$ で与えられる。さらに容易にわかる通り、包絡線は線形の自由シュレディンガー方程式を満たしている。

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.7)$$

ここで、展開 (2.6) における Ψ_ξ 、あるいは $\Psi_{\xi\xi}$ に比例する高次の項は、分布関数 $\rho(k)$ の広がりによる効果で現れたので、今後「分散補正項」と呼ぶことにする。これらは、以下に示すように「拡張された逓減摂動法」で不可欠な量である。

2.2 非線形補正項

展開式 (2.6) を、今一度別の視点から考察する。 $u(x, t)$ の満たすべきオリジナルの方程式を、線形化部を次のように置く。

$$F(i\partial_t, x, -i\partial_x)u(x, t) = 0 \quad (2.8)$$

ただし

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.9a)$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.9b)$$

$$F(i\partial_t, x + L, -i\partial_x) = F(i\partial_t, x, -i\partial_x) \quad (2.9c)$$

である。式 (2.9c) は、系の周期性に由来する。ブロッホ波 $Z(x, k)e^{i(kx - \omega t)}$ が $u(x, t)$ の特解であることを考慮に入れると

$$F(\omega, x, -i\partial_x)Y(x, k) = 0, \quad (2.10a)$$

$$Y(x, k) \equiv Z(x, k)e^{ikx} \quad (2.10b)$$

がわかる。

次に (2.8) に、先に導入した展開 (2.6) を代入する。この際、演算子を

$$F(i\partial_t, x, -i\partial_x) \rightarrow F(i\partial_t - i\varepsilon \frac{d\omega}{dk} \partial_\xi + \varepsilon^2 \partial_\tau, x, -i\partial_x - i\varepsilon \partial_\xi) \quad (2.11)$$

と置き換えして、上の (2.10a) を利用する。途中の計算は省略するが、最終的には

$$\begin{aligned} & F(i\partial_t, x, -i\partial_x) [\text{展開 (2.6) の右辺}] \\ &= \varepsilon^2 e^{-i\omega t} \left(\frac{\partial F(\omega, x, -i\partial_x)}{\partial \omega} Y(x, k) \right) \left(i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

を得る。結果的に、 $\Psi(\xi, \tau)$ の式 (2.5c) を用いずに展開 (2.6) から、自由シュレディンガー方程式 (2.7) を得たわけである。

つぎに $u(x, t)$ の満たすべき、本来の非線形波動方程式を

$$F(i\partial_t, x, -i\partial_x)u(x, t) + NL\{u(x, t); x\} = 0, \quad (2.13)$$

とおく。左辺第1項は線形部、第2項は非線形部を表しており、今の場合は3次の非線形性のみがあると仮定する。また系の周期性により $NL\{u; x+L\} = NL\{u; x\}$ である。ここでやや天下りの的ではあるが、上記の $u(x, t)$ に対して、新たに摂動展開を導入する。

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \varepsilon e^{-i\omega t} Y(x, k) \Psi + c.c. && \text{(Bloch 波の変調項)} \\ & + \varepsilon^2 e^{-i\omega t} \frac{\partial Y(x, k) e^{-ikx}}{i\partial k} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \varepsilon^3 e^{-i\omega t} \left(\frac{\partial}{i\partial k} \right)^2 Y(x, k) e^{-ikx} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + c.c. && \text{(分散補正項)} \\ & + \varepsilon^3 e^{-i\omega t} \theta(x) Y(x, k) |\Psi|^2 \Psi + c.c. && \text{(非線形補正項)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで1段目+2段目の項は、(2.6) に ε をかけたものをそのまま用いた。 ε をかけた理由はいうまでもなく、 $u(x, t)$ に対する弱非線形仮定から来ている。1段目は ε の最低次の項で、明らかにブロッホ波の変調を表していて、2段目は、先ほど導いた高次の分散補正項である。3段目の項が、ここで新たに導入する「非線形補正項」である。ただし、関数 $\theta(x)$ は周期関数

$$\theta(x+L) = \theta(x) \quad (2.15)$$

であり、具体的形は後で決めるようにする。なぜ非線形補正項が必要であったかを、以下に説明する。また、ブロッホ波の包絡関数 $\Psi(\xi, \tau)$ がどのような形になり、どのような方程式に支配されるかは、今の段階では未知であることに注意しよう。

まず、非線形効果を取り入れた展開 (2.14) を非線形方程式 (2.13) に代入して、 $\varepsilon^3 e^{-i\omega t}$ に比例する項から、次式を得る。

$$P(x) \left(i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) + Q(x) |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (2.16a)$$

$$P(x) = \frac{\partial F(\omega, x, -i\partial_x)}{\partial \omega} Y(x, k) \quad (2.16b)$$

$$Q(x) = NL^{(3,1)}(x) + F(\omega, x, -i\partial_x) (\theta(x) Y(x, k)) \quad (2.16c)$$

ここで $NL^{(3,1)}(x)$ は、(2.13) の非線形部 $NL\{Y(x, k) e^{-i\omega t}; x\}$ の $\varepsilon^3 e^{-i\omega t}$ に比例する係数で、explicit にわかっている関数である。ここで、 Ψ の閉じた方程式を得るためには、 $P(x)$ と $Q(x)$ が比例する必要がある。つまり x に依らない定数を r と置いて

$$Q(x) = rP(x) \quad (2.17)$$

でなければならない。もし、非線形補正項を導入しなかったとしたら、 $P(x)$ と $Q(x)$ は両方とも、既に決まってしまうていて、上の要請が満たされることはまずない。しかし今

の場合、 $Q(x)$ に含まれる $\theta(x)$ が未だに固定されていないので、逆に上の比例関係を満たすように $\theta(x)$ を決めれば問題がない。これがすなわち、非線形補正項の導入が必要であった理由である。これは、過去に提出された理論 [1, 3] での、ゲージ関数 $\chi(x)$ の固定とほとんど同値と見てよいであろう。

結局、非線形補正項の中の $\theta(x)$ は (2.17) から、

$$\theta(x) = Y^{-1}(x, k) F^{-1}(\omega, x, -i\partial_x) \left\{ r \frac{\partial F(\omega, x, -i\partial_x)}{\partial \omega} Y(x, k) - NL^{(3,1)}(x) \right\} \quad (2.18)$$

と決まる。さらに定数 r の値は $\theta(x)$ の周期性 (2.15) を満たすように、決めることができる。以上から、(2.16) は Ψ に対する閉じた方程式

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + r |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (2.19)$$

すなわち非線形シュレディンガー方程式を満たすことがわかった。

ここで述べた議論は、かなり一般的であり多くの物理系に拡張できる、と考えられる。非線形性として3次のものしか考えなかったが、2次の非線形効果に関しては、2次の非線形補正項を導入することにより、同様の議論が展開できる。また、ここでは空間座標 x が連続であったが、例えば格子系のように離散系についても $y(x+1) = \exp(d/dx)y(x)$ などの関係を使えば、上記の議論に帰着できる。

3 無分散誘電体中の光ソリトン

3.1 基礎方程式とブロッホ波

具体的な物理系として、誘電率が場所によって周期的に変化するようなファイバーを伝わる電磁波、を取り上げる。まずは、出発点となる Maxell 方程式を書くと [7]、

$$-c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, t) + \epsilon(x) \frac{\partial}{\partial t^2} E(x, t) = -4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} N(x, t) \quad (3.1)$$

となる。ここで、 x, t, c はそれぞれ、ファイバー方向の空間座標、時間、真空光速を表しており、従属変数 $E(x, t)$ はファイバーに垂直な一方向の電場である。右辺の $N(x, t)$ は光 Kerr 効果による3次の非線形分極を示していて、次式のようになる。

$$N(x, t) = K(x) (E(x, t))^3 \quad (3.2)$$

ここで、誘電体の非線形分極率 $K(x)$ と線形誘電率 $\epsilon(x)$ は、場所によって変わるものとした。特にここではそれが周期的であるとする：

$$\epsilon(x+L) = \epsilon(x) \quad (3.3a)$$

$$K(x+L) = K(x) \quad (3.3b)$$

本来なら、Maxell 方程式の左辺第 2 項は電束 $D(x, t)$ を用いて $\partial^2 D(x, t)/\partial t^2$ とすべきだが、ここでは「誘電体固有の分散は無視出来るもの」として（各点において） $D(x, t)$ と $E(x, t)$ は比例するものとした。

ここで、 $E(x, t) = Y(x)e^{-i\omega t}$ として、Maxell 方程式を線形化したものに代入する。すると Hill 型方程式

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2} Y(x) + \omega^2 \epsilon(x) Y(x) = 0, \quad (3.4)$$

が得られて、Bloch の定理によれば [7]

$$Y(x + L) = Y(x)e^{ikL} \quad k \text{ は実数} \quad (3.5)$$

なる解 $Y(x) = Y(x, k)$: ブロッホ解が存在する。このとき $E(x, t) = Y(x, k)e^{-i\omega t}$ をブロッホ波と呼ぶ。ここで、 k, ω はそれぞれ、角波数、角振動数を表していて、お互いに分散関係で結ばれているわけだが、一般にはいわゆる「バンド構造」が現れることを注意しておく。次節において、この具体例をみることになる。

3.2 拡張された逡減摂動法と非線形シュレディンガー方程式

次に非線形効果を取り入れた解析を行う。この際、1) $E(x, t)$ の振幅は、小さいが有限である（弱非線形性）、2) $E(x, t)$ は ブロッホ波 $Y(x, k)e^{-i\omega t}$ のゆっくりとした変調である、という 2 つの仮定を要請する。これらを満たすために、前節で導入した摂動展開 (2.14) をここでもそのまま適用することにする。

$$\begin{aligned} E(x, t) = & \epsilon e^{-i\omega t} Y(x, k) \Psi + c.c. && \text{(Bloch 波の変調項)} \\ & + \epsilon^2 e^{-i\omega t} \frac{\partial Y(x, k) e^{-ikx}}{i \partial k} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \epsilon^3 e^{-i\omega t} \left(\frac{\partial}{i \partial k} \right)^2 Y(x, k) e^{-ikx} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + c.c. && \text{(分散補正項)} \\ & + \epsilon^3 e^{-i\omega t} \theta(x) Y(x, k) |\Psi|^2 \Psi + c.c. && \text{(非線形補正項)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

包絡関数 $\Psi = \Psi(\xi, \tau)$ を記述する独立変数も、(2.5a)、(2.5b) と同様に

$$\xi = \epsilon \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right), \quad (3.7a)$$

$$\tau = \epsilon^2 t, \quad (3.7b)$$

とした。未知関数 $\theta(x)$ は周期性があるものとする。

$$\theta(x + L) = \theta(x) \quad (3.8)$$

(3.6) を、非分散媒質の方程式 (3.1) に代入して、 $\epsilon^n e^{-i\omega t}$, ($n, l = 1, 2, \dots$) の係数を比較する。 $n = 1, l = 1$ においては、Bloch 解が満たす線形方程式 (3.4) が得られ、 $n = 2, l = 1$

では、その両辺を k で微分した式が得られる。最終的には、 $n = 3, l = 1$ からは、(2.16) に相当する式が得られる。

$$P(x) \left(i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) + Q(x) |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (3.9a)$$

$$P(x) = -2\omega \epsilon(x) Y(x, k) \quad (3.9b)$$

$$Q(x) = -12\pi\omega^2 K(x) |Y(x, k)|^2 Y(x, k) - \left(c^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \omega^2 \epsilon(x) \right) (\theta(x) Y(x, k)) \quad (3.9c)$$

つぎに、 x の関数として $P(x)$ と $Q(x)$ が比例してる (2.17)、と仮定すると

$$Q(x) = r P(x) \quad (3.10)$$

未知関数 $\theta(x)$ が決まる。今の場合「幸いにも」、あらわな形で求めることができる。

$$\begin{aligned} \theta(x) = \theta(0) + \frac{c^{-2}}{e^{2ikL} - 1} \int_0^x dx' Y^{-2}(x', k) \\ \cdot \int_{x'}^{x'+L} dx'' \left(2r\omega \epsilon(x'') - 12\pi\omega^2 K(x'') |Y(x'', k)|^2 \right) Y^2(x'', k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

さらに (2.15) に示した通り、 $\theta(x)$ 周期は周期関数であるので、未だ決まっていなかった定数 r が下のように得られる。

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{2} \int_0^L dx' Y^{-2}(x', k) \int_{x'}^{x'+L} dx'' 12\pi\omega^2 K(x'') |Y(x'', k)|^2 Y^2(x'', k) \\ \cdot \left(\int_0^L dx' Y^{-2}(x', k) \int_{x'}^{x'+L} dx'' \omega \epsilon(x'') Y^2(x'', k) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

最終的に、包絡波 $\Psi(\xi, \tau)$ に対して次の NLS 方程式を得る。

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + r |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (3.13)$$

上で得られた r は、ゲージ関数を導入する方法 [5] を採用しても全く同じ値が得られる。

ここで、注意すべき点が1つある。それは、(3.12) で与えられた非線形項の係数 r が、必ずしも実数とならないことである。一般的にどのような条件で、 r が実数となるのか今の段階ではわからない。しかし少なくとも、 $\epsilon(x), K(x)$ が「対称的」ならば；

$$\epsilon(-x) = \epsilon(x) \quad (3.14a)$$

$$K(-x) = K(x) \quad (3.14b)$$

実数となることがわかった。これを以下に証明する。Hill 方程式 (3.4) で $x \rightarrow -x$ としたものの、ブロッホ解の満たす式 (3.5)、および式 (3.14a) を比べると、

$$Y^*(x, k) = Y(x, -k) = Y(-x, k) \quad (3.15a)$$

$$|Y(-x)|^2 = |Y(x)|^2 \quad (3.15b)$$

がわかる。さて、 $F(x)$ を、周期的かつ対称的な実関数とする：

$$F(-x) = F(x) \quad (3.16a)$$

$$F(x+L) = F(x) \quad (3.16b)$$

これを用いて次の積分を考える。

$$\int_0^L dx' Y^{-2}(x', k) \int_{x'}^{x'+L} dx'' F(x'') Y^2(x'', k) \quad (3.17)$$

(3.15a)、(3.16a) を使って、複素共役をとると

$$(3.17)^* = \int_0^L dx' Y^{-2}(-x', k) \int_{x'}^{x'+L} dx'' F(-x'') Y^2(-x'', k) \quad (3.18)$$

さらに

$$\bar{x} = -x'' + 2L \quad (3.19a)$$

$$\tilde{x} = -x' + L \quad (3.19b)$$

と変数変換すると (3.18) は

$$\begin{aligned} (3.17)^* &= e^{-2ikL} \int_0^L d\tilde{x} Y^{-2}(\tilde{x}, k) \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+L} d\bar{x} F(\bar{x}) Y^2(\bar{x}, k) \\ &= e^{-2ikL} (3.17) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで r を与える式 (3.12) にある、の $K(x)|Y(x, k)|^2$ と $\epsilon(x)$ は $F(x)$ の条件を満たしている、ので、 r の複素共役をとると直ちに r に戻ることがわかる。つまり、非線形シュレディンガー方程式 (3.13) の係数 r が、実数であることが証明できた。

3.3 Gap ソリトン

ここでは、 r が実数で $r < 0$ であることを仮定する。このとき、NLS 方程式 (3.13) の 1 ソリトン解を考える。

$$\Psi(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{-2}{r}} A \operatorname{sech}(A\xi + 2BA\tau) \exp\{iA\xi - i(A^2 - B^2)\tau\} \quad (3.21)$$

ただし A, B は実数である。これを、展開 (3.6) に代入したものが、元の電磁波であるが、これも x 空間での孤立波である。これはまさに Bloch 波を搬送波としたソリトン現象といえよう。

ここで、zone-edge ($d\omega/dk = 0$) の場合を考えて、 $B = 0$ とおくと、 $E(x, t)$ の ϵ に関する、最低次の部分は

$$\epsilon \sqrt{\frac{-2}{r}} AY(x, k) \operatorname{sech}(\epsilon Ax) e^{\epsilon Ax} \exp(-i) \left\{ \omega - \epsilon^2 A^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right\} t + c.c. \quad (3.22)$$

となる。(3.22) における時間依存部分に着目しよう。バンドの上端では一般に $d^2\omega/dk^2 < 0$ であり、逆に下端では $d^2\omega/dk^2 > 0$ なので、 $\omega - \epsilon^2 A^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2}$ は Gap 中の角振動数に相当する。これゆえに、(3.22) は Gap ソリトンと呼ばれ、線形波動では実現できない振動数を持つ周期非線形系特有の現象と考えられる。

4 2種類のファイバーが交互につながれた系

本節では具体例として、2種類の誘電率の異なるファイバーが、交互につながれた系をとりあげる。

4.1 ブロッドホ波とバンド構造

ここでは誘電率 $\epsilon(x)$ を次のように与える。

$$\begin{aligned}\epsilon(x) &= (cb)^2 & \text{for } (n - \frac{1}{2})L < x < nL & \text{ [caseI]} \\ &= (ca)^2 & \text{for } nL < x < (n + \frac{1}{2})L & \text{ [caseII]}\end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし n は整数を示す。

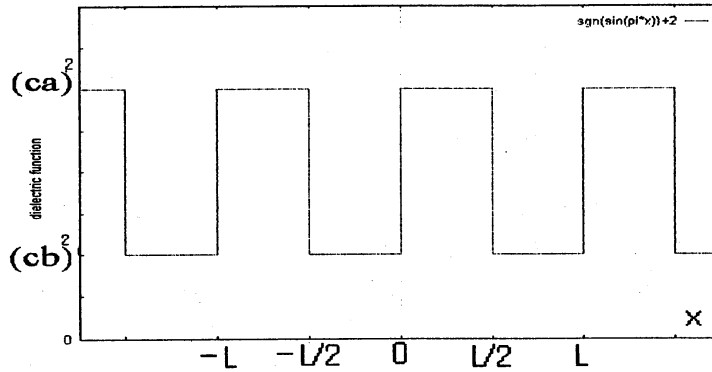


図 1: 2種類の誘電体が交互に置かれている系

このとき線形化した方程式 (3.4) の一般解を、次のように置く。

$$Y(x) = \alpha_n e^{ib\omega(x-nL)} + \beta_n e^{-ib\omega(x-nL)} \quad \text{[caseI]} \quad (4.2a)$$

$$Y(x) = \gamma_n e^{ia\omega(x-nL)} + \delta_n e^{-ia\omega(x-nL)} \quad \text{[caseII]} \quad (4.2b)$$

連結部の $Y(x, k)$ と $dY(x, k)/dx$ の連続条件より $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ の間には、以下の関係式が成立する。

$$\begin{pmatrix} \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (4.3a)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (4.3b)$$

ここで T は、モノドロミー行列と呼ばれ、次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{4ab} \begin{pmatrix} (a+b)^2 e^{i(a+b)\omega L/2} & (b-a)e^{i(b-a)\omega L/2} \\ (b-a)e^{-i(b-a)\omega L/2} & (a+b)^2 e^{-i(a+b)\omega L/2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

行列 T の固有値 λ を計算すると、

$$\lambda = \frac{1}{2}(trT \pm \sqrt{(trT)^2 - 4}) \quad (4.5)$$

となる。ここで、もし $|trT| < 2$ なら (band 内) $|\lambda| = 1$ であるので、

$$\lambda = e^{ikL}, \quad k = (\text{角波数}) \in \mathfrak{R} \quad (4.6)$$

なる実数 k がある。ここでもし、 (α_0, β_0) として、 T の固有ベクトルを採用したら、上記で与えられる $Y(x)$ はブロッホ解となることが、容易にわかる。また、(4.5) と (4.6) から、角波数 k と角振動数 ω を関係づける、分散式が求まる：

$$\cos kL = \frac{1}{2}trT = \frac{1}{4ab} \left\{ (a+b)^2 \cos \frac{a+b}{2} \omega L + (a-b)^2 \cos \frac{a-b}{2} \omega L \right\} \quad (4.7)$$

これを図示すると、下のように入バンド構造を成すことがわかる。

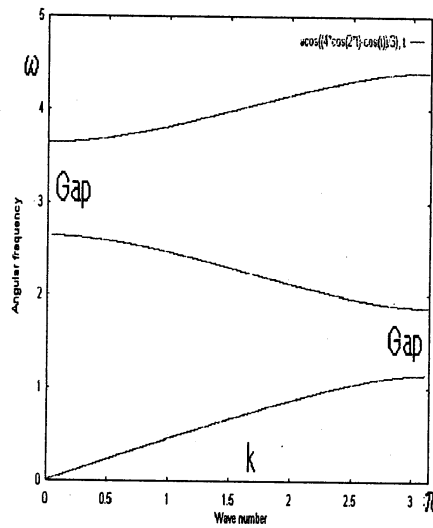


図 2: 分散関係とバンド構造 $a = 3$, $b = 1$, $L = 1$

モノドロミー行列の固有ベクトルを求めれば、(3.5) を満たすブロッホ解 $Y(x) = Y(x, k)$ が求まる。

$(n - \frac{1}{2})L < x < nL$ に対して

$$Y(x) = (b^2 - a^2) \exp i \left\{ +b\omega(x - nL) + knL + \frac{1}{2}(b - a)\omega L \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -(b^2 - a^2) \exp i \left\{ +b\omega(x - nL) + knL + \frac{1}{2}(b + a)\omega L \right\} \\
& -(a + b)^2 \exp i \left\{ -b\omega(x - nL) + knL + \frac{1}{2}(b + a)\omega L \right\} \\
& -(b - a)^2 \exp i \left\{ -b\omega(x - nL) + knL + \frac{1}{2}(b - a)\omega L \right\} \\
& + 4ab \exp i \left\{ -b\omega(x - nL) + k(n + 1)L \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$nL < x < (n + \frac{1}{2})L$ に対して

$$\begin{aligned}
Y(x) = & +2b(b - a) \exp i \left\{ +a\omega(x - nL) + knL + \frac{1}{2}(b - a)\omega L \right\} \\
& -2b(b - a) \exp i \left\{ +a\omega(x - nL) + k(n + 1)L \right\} \\
& -2b(a + b) \exp i \left\{ -a\omega(x - nL) + knL + \frac{1}{2}(a + b)\omega L \right\} \\
& +2b(a + b) \exp i \left\{ -a\omega(x - nL) + k(n + 1)L \right\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

この実数部を図示すると下図のようになる。

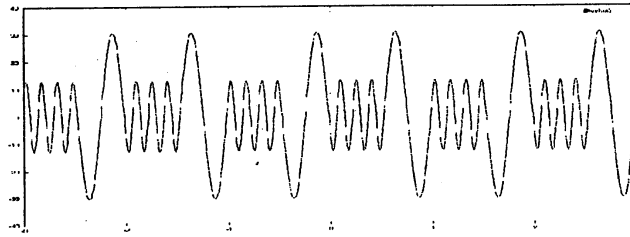


図 3: ブロッホ解の実数部 $a = 3$ 、 $b = 1$ 、 $L = 1$ 、 $k = \pi$

4.2 Gap Soliton 現象

NLS 方程式のソリトン解を、電場 $E(x, t)$ に対する展開式に代入して、

$$k = \frac{d\omega}{dk} \tag{4.10}$$

$$B = 0 \tag{4.11}$$

と置く。 $O(\varepsilon)$ までで；

$$E(x, t) = \varepsilon \sqrt{\frac{-2}{r}} Y(x, k) A \operatorname{sech}(\varepsilon A x) e^{i\varepsilon A x} \exp(-i) \left\{ \omega - \varepsilon^2 A^2 \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \right\} t + c.c. \tag{4.12}$$

今の場合 $\varepsilon(x)$ は (3.14a) を満たすので、 r は実定数であることに注意しよう。ここでは特に $r < 0$ とした。 $k = \pi$ で ω が第 1 バンドの上端にあるとき、この実部をスケッチしたものを下に示す。

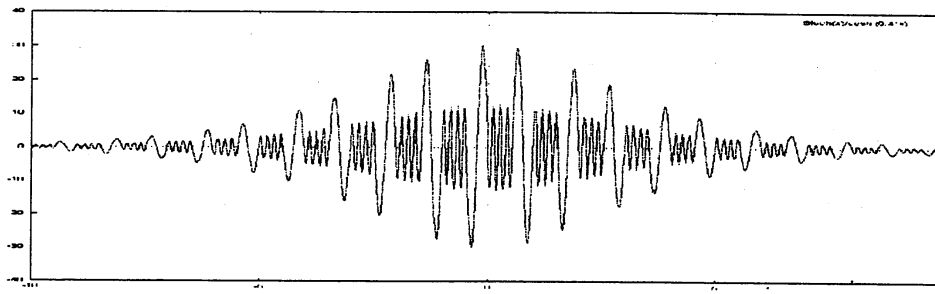


図 4: Gap ソリトン $A = 1, \varepsilon = 0.4$

これは、明らかに通常の単色波に対する、包絡ソリトンの形状とは異なるものとなっている。さらに、振動数 $\omega - \varepsilon^2 A^2 2^{-1} (d^2 \omega / dk^2)$ は、線形波では実現不可能な、ギャップ内の値をとっていることに注目しよう。

5 まとめ

まず、非線形の周期系における、ブロッホ波変調を一般的に解析するために「拡張された通減摂動法」を提唱した。その際重要であったことは、展開 (2.14) のように「分散補正項」と「非線形補正項」を加えることである。例として、次の3つの性質を満たす誘電体でできた、光ファイバーを伝わる電磁波を解析した。

- 1) 線形誘電率が周波数によらない。つまり無分散誘電体である。
- 2) 光カー効果による3次の、非線形分極がある。
- 3) 誘電率が、ファイバー方向に周期的に変化している

この系では、その周期性によって、線形解としてブロッホ波が存在する。またその結果として、「本来分散性がない媒質に分散性を生じさせることによって、光ソリトンが発生させることができる」ということを理論的に示した。

より具体的な例として、2種類の誘電体が交互に置かれている系をとりあげた。ブロッホ波と Gap ソリトンの形を explicit に示すことができたが、非線形の実係数 $r = r(a, b, k, L)$ については、まだ計算を行っていない。うまくいけば、入射するのに必要なソリトンの振幅が、構造パラメータ L 、を用いて制御できる可能性がある。これについては、今後の課題としたい。

参考文献

- [1] 飯塚剛、京大数理解析研講究録 886(1994)p6.

- [2] 飯塚剛、京大数理解析研講究録 908(1994)p134.
- [3] T. Iizuka, J.Phys.Soc.Jpn. **63**(1994)4343.
- [4] T. Iizuka, J.Phys.Soc.Jpn. **64**(1995)3215.
- [5] 飯塚剛、日本物理学会分科会 29pE3(1995 年 9 月大阪府立大学)
- [6] Wei Chen and D.L.Mills, Phys. Rev. Lett. **58**(1987)160.
- [7] J.E. Sipe and Herbert G. Winful, Opt. Lett. **13**(1988)132.
- [8] C.Martijin de Sterke and J.E.Sipe, Phys. Rev. A **38**(1988)5149.
- [9] S. Pnevmatikos, N. Flytzanis, and M. Remoissenet, Phys. Rev. B **33**(1986) 2308.
- [10] A. Campa, A. Giansanti, A. Tenenbaum, D. Levi and O. Ragnisco,
Phys. Rev. B **48** (1993) 10168.
- [11] N. Yajima and J. Satsuma, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 370.
- [12] N. Sugimoto, J. Fluid Mech **244**(1992)55. N.Sugimoto, Jpn.Soc.Mechanical Engi-
neers (1993) 284.