

ソボレフ空間上の広義積分としての

Feynman 経路積分.

東京工業大学理学部

藤原大輔

Daisuke FUJIWARA

§ 1 結果

$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 - V(x)$ をラグランジアン関数とする.

$V(x)$ はポテンシャルである. 以下記述を単純にするため
配置空間は 1 次元とするが, 多次元でも本質は変わらない.

経路 $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $t=0$ で $\gamma(0) = y$, $\gamma(T) = x$,

$\dot{\gamma} \in L^2(0, T)$ の作用は 積分

$$S(\gamma) = \int_0^T L(\dot{\gamma}(s), \gamma(s)) ds$$

である.

Feynman 経路積分とは, 経路の全体の空間上の形式的
積分

$$\int_{\Omega} e^{i\hbar^{-1} S(\gamma)} \{ \gamma \}$$

である. $\hbar$ はプランク定数.

これに厳密な数学的意味を付ける試みは、幾つか成されたが
 ここでは、伊藤清の定式化 [1], [7] を採用する。

伊藤の定式化は、次のようである。まず $x_0 = y$,
 $x(T) = x$ となる直線 x_0 とする。すなわち,

$$x_0(s) = \frac{s}{T} x + \frac{T-s}{T} y.$$

次に ソボレフ空間 $H_0^1(0, T) = \{x : x \in L^2(0, T), x(0) = x(T) = 0\}$ を導入する。簡単のためこれを $\mathcal{H}$ と書く。 $\mathcal{H}$ の
 元 x_1, x_2 に対し 内積を

$$(x_1, x_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^T \dot{x}_1(s) \dot{x}_2(s) ds$$

とする。 $x(0) = y, x(T) = x$ となる経路の空間 $\mathcal{E}$ は
 アフィン空間 $x_0 + \mathcal{H} = \{x_0 + x \mid x \in \mathcal{H}\}$ と表える。

次に $\mathcal{H}$ の正値定符号の二次形式

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \otimes e_j$$

を考える。 $\{e_j\}$ は c.o.n.s. で、 $\lambda_j > 0$, $\sum_j \lambda_j < \infty$
 とする。 $b \in \mathcal{H}$ を任意にとり、 $N(dx, b, Q)$ は、 $\mathcal{H}$
 上のガウス測度で、平均ベクトルが b , 分散テンソルが Q
 となるものとする。伊藤は、次のように定式化した。

$$(1) \quad \int_{\mathcal{E}} e^{i\lambda^{-1} S(x)} Q(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(T, x, y),$$

二二二

$$(2) I_n(T, x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i T} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n\lambda_j}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\partial e} e^{it^{-1}S(x_0+t)} N(ds, b, nQ)$$

である。

(実際の伊藤の定式化は、もっと対称性が高い。[7] 参照)

二二二では、古い形の定式化を引用した。

二二二問題となるのは、(1) 式の極限が実際に存在する
のか？ ということである。不幸にして、今のところ、

(1) 式右辺の極限が存在すること被証明されているのは、本
質的に、次の2例である。

$$1^\circ \quad V(x) = Rx^2 + bx + c, \quad a, b, c \text{ 定数}$$

$$2^\circ \quad V(x) = \int e^{i\lambda x} d\mu(\lambda), \quad \mu \text{ は 有界変動の} \\ \text{符号付の測度}$$

一方では、Pauli [8] は、

$$(3) \quad \text{grad } V(x) = O(|x|) \quad |x| \rightarrow \infty$$

のとき、Feynman path 積分が、“物理的に” 取り扱うこと
が出来ることを論じている。我々の目標は、(3) に近い
仮定の下で Feynman 経路積分を論じることである。

この講演では, ポテンシャル $V(x)$ について, 次の仮定を課する。

$$(4) \quad |\partial^j V(x)| \leq C_j \quad j = 2, 3, 4, \dots$$

また 二次形式としても, 次の特別な形をとる。

$$(5) \quad Q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} (x, e_j)_{\mathcal{H}}^2, \quad \lambda > 1.$$

ただし e_j は, Haars 関数の不定積分である。

定理 Q を上述の (5) とする。またポテンシャルは, (4) の仮定を満たすものとする。このときある $\delta > 0$ が存在して, $0 \leq T < \delta$ であれば, (1) 式の右辺の極限が存在する。極限は b に依らない。極限を $K(T, x, y)$ と書くと, これは, Schrödinger 方程式の基本解となる。

実際は, 収束の早さ等も, 独立に評価できる。

§ 2 証明の概略

Haars 関数の不定積分:

$q = 2^{-n}(2k+1)$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}-1$, とおく。2進有限小数である。この $n \in n(q)$, $k \in k(q)$

と書く。 $m(g) = 2^{m(g)-1} + k(g)$ とする。 このとき
 各 g に対して, $\delta_g = 2^{-m(g)} T$ とおく。 また

$$e_g(s) = \begin{cases} 0 & |gT - s| \geq \delta_g \text{ のとき,} \\ (2\delta_g)^{-1/2} (\delta_g - |s - gT|), & |s - gT| \leq \delta_g. \end{cases}$$

とおく。 直ちに合えば

$$\frac{d}{ds} e_g(s) = \begin{cases} 0 & |gT - s| \geq \delta_g \text{ のとき,} \\ (2\delta_g)^{-1/2}, & gT - \delta_g \leq s \leq gT \text{ のとき} \\ -(2\delta_g)^{-1/2}, & gT \leq s \leq gT + \delta_g \end{cases}$$

であるから, $\{\frac{d}{ds} e_g(s)\}_g$ は Haar's 関数系を成す。 従って

$\{e_g(s)\}_g$ は $\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{N}, \mathcal{S}$ (完全正規直交系) である。

次の等式も有用である。

$$(6) \quad \|e_g\|_{L^\infty} = 2^{-1/2} \delta_g^{1/2}, \quad \|e_g\|_{L^2} = 3^{-1/2} \delta_g, \quad \|e_g\|_{L^1} = 2^{-1/2} \delta_g^{3/2}.$$

この $\{e_g\}_g$ を使って = 次形式 $Q(\sigma)$ は, $\lambda > 1$ に対して

$$(7) \quad Q(\sigma) = \sum_g \lambda^{-m(g)} y_g^2,$$

ただし $y_g = (\sigma, e_g)$ と書く。

空間 $\mathcal{H}$ の分解,

幾つかの本質的でない因子を除く ($I_n(T, x, y)$ は形式的に

$$\prod_j \left(1 + \frac{n\lambda^{-m(j)}}{4i}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{it\left(\frac{1}{2}\sum_j y_j^2 - \int_0^T V(t+\tau_0) d\tau\right)} e^{-\frac{1}{2n}\sum_j \lambda^{m(j)} (y_j - b_j)^2} \prod_j \left(\frac{\lambda^{m(j)}}{2\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} dy_j$$

と書ける。 $T \in \mathbb{C}$ $b_j = (b, e_j)$ である。 $n = 2^N$,

$e^{it\left(\frac{1}{2}\sum_j y_j^2 - \int_0^T V(t+\tau_0) d\tau\right)}$ は振動する項であり,

$$e^{-\frac{1}{2n}\sum_j \lambda^{m(j)} (y_j - b_j)^2} \prod_j \left(\frac{\lambda^{m(j)}}{2\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} dy_j$$

は正規分布の項である。 y_j は 2^N の積分のうちで,

$\frac{\lambda^{m(j)}}{n}$ が 0 に近い項は, 振動する部分が強く効いて来ず,

$\frac{\lambda^{m(j)}}{n}$ が非常に大きい項は, 正規分布の分散が小さく

$y_j = b_j$ の近くに質量が集中する。このように考え,

$\mathcal{H}$ を幾つかの部分空間に分解して取扱う必要があることを示す。

次のように分解する: まず $p > 1$ を固定する。 N

に N_0 を次のようにとる。

$$(2.1) \quad \forall N \geq N_0 \quad \text{に対し} \quad 2^{-N} < \epsilon^{2p} \quad \text{と}$$

$$(2.2) \quad 2^N \lambda^{-2^{N-1/2}} < 1.$$

とする。 (2) 式の n を十分大きくとって

$$(2.3) \quad n^{-1} \lambda^{2^{N_n}} < h^{-1}$$

と可。 λ^{12} 2 の n に對し, $N_n \in$

$$(2.4) \quad n^{-1} \lambda^{2^{N_n}} \leq h^{-1} < n^{-1} \lambda^{2^{N_n+1}}$$

を定める。 また, n に依る可正整数 $m_i = m_i(n)$, $i=0,1,2$ $\in$

$$(2.5) \quad n^{-1} \lambda^{m_2(n)} \leq h^{-1} < n^{-1} \lambda^{m_2(n)+1}$$

$$(2.6) \quad n^{-1} \lambda^{m_1(n)} \leq 2^{-\frac{1}{45}N_n} < n^{-1} \lambda^{m_1(n)+1}$$

$$(2.7) \quad n^{-1} \lambda^{m_0(n)} \leq 2^{-PN_n} < n^{-1} \lambda^{m_0(n)+1}$$

を満足する n には可。

命題 2.1 次の事成立可。

$$(2.8) \quad -2^{N_n-12} \log \lambda < \log h$$

$$(2.9) \quad m_0(n) < m_1(n) < m_2(n)$$

$$(2.10) \quad 2^{N_n} \leq m_2(n) < 2^{N_n+1}$$

$$(2.11) \quad m_2(n) - m_0(n) < 2^{N_n-10}$$

これを便し。

$$\mathcal{H}_1 = \text{span of } \{e_g \mid m(g) < m_0(n)\}$$

$$\mathcal{H}_2 = \text{span of } \{e_g \mid m_0(n) \leq m(g) < m_1(n)\}$$

$$\mathcal{H}_3 = \text{span of } \{e_g \mid m_1(n) \leq m(g) < m_2(n)\}$$

$$\mathcal{H}_4 = \text{span of } \{e_g \mid m_2(n) \leq m(g)\}$$

とすると、直交分解

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

が出来る。この分解にあわせて、 $r \in \mathcal{H}$ を

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

と成合に分解する。また上の直交分解は、 Q をも分解するから

$$Q(r) = Q_1(r_1) + Q_2(r_2) + Q_3(r_3) + Q_4(r_4)$$

となる。対応して $\mathcal{H}_i$ 上のガウス分布 $N_i(dr_i, b_i, nQ_i)$ が定義されて $N(dr, b, nQ)$ はこれらの直積としてあらわされる:

$$N(dr, b, nQ) = \prod_{i=1}^4 N_i(dr_i, b_i, nQ_i).$$

$I_m(T; x, y)$ の形をもう少し簡単に書くことを考える。 $\mathcal{H}_1$ で変数変換とする。 $\dim \mathcal{H}_1 = m_0 - 1$ であらう。 $\{g_T\}_{m(1) \leq m_0-1}$ を大きさの順に並べかえて、

$[0, T]$ の分割

$$(2.12) \quad \Delta: 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m_0-1} < \tau_{m_0} = T.$$

を得る。 $\mathcal{H}_1$ の基底 $\{e_g\}_{m(1) \leq m_0}$ の方がうちは、これらの τ_j のどれかについて、折れ曲った折線がつづである。

従って、 $\mathcal{H}_1$ は、従って、これらの τ_j で折れ曲った、区分的直線のグラフをもつ函数の全体と一致する。そこで、 $\mathcal{H}_1$

に新しく基底 $\{w_j\}_{j=1}^{m_0-1}$ を導入する。

$$w_j(s) = \begin{cases} 0 & [t_{j-1}, t_j] \text{ の外側} \\ \frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} & s \in [t_{j-1}, t_j] \text{ のとき} \\ \frac{t_{j+1}-s}{t_{j+1}-t_j} & s \in [t_j, t_{j+1}] \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。 $\forall x \in \mathcal{H}_1$ に対し

$$x_j = x_1(t_j) \quad j=1, 2, \dots, m_0-1$$

とすると

$$x_1 = \sum_j x_j w_j$$

である。少し計算すれば $y_i \leftrightarrow x_j$ の変数変換の体積要素の変換は,

$$(2.14) \quad \prod_{m(j)=1}^{m_0-1} dy_j = \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{t_j - t_{j-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j$$

であることが判る。 ガウス命題を

$$(2.15) \quad \left(\frac{1}{2\pi i k} \right)^{\frac{1}{2}} N_1(ds_1, b, m, \Omega_1) \\ = \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{2\pi i k \Delta t_j} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2k} \sum_{m(j)=1}^{m_0-1} x^{m(j)} (y_j - b_j)^2} \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j$$

と書くことが出来る。 ここで $b_j = (b, e_j)_{\mathcal{H}}$ とある。

また $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ とある。 これを用いると,

$I_n(T, x, y)$ 中 $\mathcal{H}_1$ 上の積分に関わることは、

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad & \left(\frac{1}{2\pi i\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{m(j) \leq m_0} \left(1 - \frac{n\lambda^{-m(j)}}{i\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} N_i(d\tau_i, b_i, nQ_i) \\
 &= \prod_{j=1}^{m_0-1} \left(1 - \frac{i\hbar\lambda^j}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{2\pi i\hbar \Delta\tau_j} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2n} \sum_{m(j)=1}^{m_0-1} \lambda^{m(j)} (y_j - b_j)^2} \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j.
 \end{aligned}$$

となる。

Fubini の定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad & I_n(T, \alpha, y) \\
 &= \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{2\pi i\hbar \Delta\tau_j} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m_0-1}} e^{-i\hbar^{-1} S(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2^* + b_3 + b_4)} p(\tau_1) \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j
 \end{aligned}$$

と書ける。ここで $p(\tau_1)$ は、

$$\begin{aligned}
 (2.18) \quad & p(\tau_1) = e^{-\frac{1}{2n} \sum_{m(j) < m_0} \lambda^{m(j)} (y_j - b_j)^2} \prod_{m(j) \geq m_0} \left(1 - \frac{n\lambda^{-m(j)}}{i\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \times \int_{\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4} e^{i\hbar^{-1} (S(\tau_0 + \tau_1) - S(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2^* + b_3 + b_4))} \prod_{j=2}^4 N(d\tau_j, b_j, nQ_j)
 \end{aligned}$$

であり τ_2^* は $\mathcal{H}_2$ 上の汎関数

$$\mathcal{H}_2 \ni \tau_2 \longmapsto S(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + b_3 + b_4)$$

の停留点である。 τ_2^* は τ_1 の関数となる。

さて、 τ_1^* は $S(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2^* + b_3 + b_4)$ の停留点とする。
すなわち

$$(2.19) \quad \partial_{r_1} S(r_0 + r_1^* + r_2^* + b_3 + b_4) = 0.$$

$r_1^* + r_2^*$ の e_g への成分を

$$y_g^* = (r_1^* + r_2^*, e_g)_{\mathbb{R}^2}$$

とする。

定理 1 ポテンシャルは、条件 (4) を満たすものと仮定する。このとき、正数 δ が存在して、 $|T| < \delta$ であれば、次のことが成立する

$$\begin{aligned} (2.20) \quad & I_m(T, x, y) \\ &= e^{\frac{i}{2\hbar} \|b_3 + b_4\|_{g_e}^2} \\ & \exp - \frac{1}{2} \left[\sum_{m(g) < m_1} \frac{\lambda^{m(g)}}{n} (y_g^* - b_g)^2 + \sum_{m(g) \geq m_1} \frac{n \lambda^{-m(g)}}{1 - i n \nu \lambda^{-m(g)}} (\xi_g^* - b_g)^2 \right] \\ & \times I(\Delta | \nu, x, y, T) \\ & + \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\nu S(r_0 + r_1^* + r_2^* + b_3 + b_4)} \quad \Gamma_m(\nu, x, y, T) \end{aligned}$$

ただし、 $\nu = \hbar^{-1} T$ である

$$I(\Delta | \nu, x, y, T) = \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar \Delta T_j} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m_0+1}} e^{i\nu S(r_0 + r_1 + r_2^* + b_3 + b_4)} \frac{\prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j}{\prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j}.$$

$$\xi_g^* = \int_0^T V'(r_0(t) + r_1^*(t) + r_2^*(t) + b_3(t) + b_4(t)) e_g(t) dt.$$

剰余項 $\Gamma_m(\nu, x, y, T)$ は次の評価を満たす。

$$(2.21) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta r_n(\nu, x, y, T) \right| \\ \leq C_{\alpha\beta} \left(\delta_n^{\frac{1}{2}(p-1)} + \delta_n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} + \delta_n^{1-\frac{1}{8p}} + \delta_n^{\frac{1}{4p}} \right)$$

$$\text{さらに } \delta_n = 2^{-N_n T}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\delta_n \rightarrow 0$ である。従って,

$r_n(\nu, x, y, T)$ はその微分も一様で 0 に収束する。また,

$b_3 + b_4$ は $\mathcal{H}$ で 0 に強収束する。また次の定理によると

(2.20) 式右辺の各項の r_n 中の $\exp \dots$ の因子も 1 に収束する。

定理 2 任意の α, β に対し次の評価が成立する。

$$(2.22) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \xi_j^* \right| \leq C_{\alpha\beta} \delta_n^{\frac{3}{2}} (1 + |x| + |y| + \|b_3\|_{\mathcal{H}} + \|b_4\|_{\mathcal{H}})^{(1-\alpha-\beta)_+}$$

ここで $\alpha_+ = \max(0, \alpha)$ である。

$$(2.23) \quad \left| \sum_{m(j) \geq m_1} \frac{n \lambda^{-m(j)}}{1 - i\nu n \lambda^{-m(j)}} (\xi_j^* - b_j)^2 \right| \\ \leq C \delta_n^{\frac{3}{2}} (1 + |x|^2 + |y|^2 + \|b_3 + b_4\|_{\mathcal{H}}^2).$$

$$(2.24) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta y_j^* \right| \leq C_{\alpha\beta} \delta_n^{\frac{3}{2}} (1 + |x| + |y| + \|b_3 + b_4\|_{\mathcal{H}})^{(1-\alpha-\beta)_+}$$

$$(2.25) \quad \sum_{m(j) < m_0} \frac{\lambda^{m(j)}}{n} (y_j^* - b_j)^2 \leq C \delta_n (1 + |x|^2 + |y|^2 + \|b_3 + b_4\|_{\mathcal{H}}^2).$$

定理 1 と 2 によると, $I_n(\tau, x, y)$ では結局,
 $I(\Delta; \nu, x, y, T)$ が 主要であることが分る。

定理 3 $|T| < \delta$ のとき,

$$I(\Delta; \nu, x, y, T) = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\nu S(\gamma_0 + \gamma_1^* + \gamma_2^* + b_3 + b_4)} (1 + k_n(\nu, x, y, T))$$

と書ける。 $\forall \alpha, \beta$ に対し $C_{\alpha\beta}$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k_n(\nu, x, y, T)| \leq \frac{m_0}{T!} (1 + C_{\alpha\beta} T \Delta \tau_j) - 1.$$

という評価が成立する。

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると $b_3 + b_4$ は $\hbar$ で 0 に強く収束する。従って $\gamma_0 + \gamma_1^* + \gamma_2^*$ は, $\gamma_0 + \gamma^\#$ に収束する。ただし $\gamma^\# + \gamma_0$ は, 古典軌道, となる。

$$(2.26) \quad \partial_r S(\gamma_0 + \gamma^\#) = 0$$

の解である。よって 定理 3 の中の $S(\gamma_0 + \gamma_1^* + \gamma_2^* + b_3 + b_4)$ は, $n \rightarrow \infty$ とすると, classical action

$$S_d(x, y, T) = S(\gamma_0 + \gamma^\#)$$

へ収束する。また $k_n(\nu, x, y, T)$ も収束することが分る。

定理 4. 次の2つの事柄が証明出来る。

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\delta_0 + \delta_1^* + \delta_2^* + b_3 + b_4) = S_{cl}(x, y, T)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x, y, T) = k(x, y, T)$$

が存在し、すべての α, β に関し

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (k_n(x, y, T) - k(x, y, T))| \leq C_{\alpha\beta} \cdot T^2 \delta_n$$

以上、伊藤の公式の収束を論じたら、Schrödinger 方程式との関連は、

定理 5.

$$\left(\frac{1}{2\pi i \hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\sqrt{2} S_{cl}(x, y, T)} (1 + k(x, y, T))$$

は Schrödinger 方程式の基本解である。

更に技術的なことは別の機会に発表するが、方法として、停留位相法において、誤差項を、空間の次元によらずに評価する方法 [5] に、その基礎を置く。

文献表

- [1] Albeverio, S. - H.Krohn. R.J. Mathematical theory of Feynman path integrals, Lecture note of Math. , 523, Springer Berlin (1976).
- [2] Feynman, R.P., Space time approach to non relativistic quantum mechanics, Rev. of Modern Phys. 20 (1948), 367-387.
- [3] Fujiwara, D. remarks on convergence of some Feynman path integrals, Duke Math. J. 47 (1980) 559-600.
- [5] Fujiwara, D., Stationary phase method with an estimate of remainder term on a space of large dimension. (Preprint) 1990.
- [6] Fujiwara, D., The Feynman path integral as an improper integral over the Sobolev space. Proc. Journee d'Equations aux derivees partielles Saint Jean de Monts, (1990)
- [7] Ito, K. Generalized uniform complex measure in Hilbert space and its application to the Feynman path integrals, Proc. 5th Berkeley symposium on Math. Statistics and Probability, vol. 2, part 1, 145-161, Univ. Calif. press. Berkeley, (1967).
- [8] Pauli, W. Selected topics in field quantization, Pauli lectures on Physics, vol.6, MIT Press (1973).