

古典型ヘッケ環の表現型について

京都大学・数理解析研究所 有木 進 (Susumu Ariki)

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 導入

本報告では, Hecke 環の表現型について最近得られた結果について報告する.

まず用語の説明から始めよう. 以下では加群といったらすべて有限次元加群であり, 加群圏 $A\text{-mod}$ とかいたら, 有限次元 A -加群のなす圏である.

F を代数閉体, A を有限次元 F -代数とする. A (の表現型) が *finite* であるとは, 直既約 A 加群の同型類の個数が有限であるときをいう. A が *tame* であるとは, *finite* ではなく, 各自然数 d に対し有限個の $(A, F[X])$ -両側加群 $M_1, \dots, M_{n_d}$ が存在し, (1) M_i は自由 $F[X]$ -加群, かつ (2) d 次元直既約 A -加群の同型類の中で

$$M_i \otimes_{F[X]} F[X]/(X - \lambda) \quad (1 \leq i \leq n_d, \lambda \in F)$$

の形の A 加群を含まないのは有限個に限るときをいう. A が *wild* であるとは, $(A, F\langle X, Y \rangle)$ -両側加群 M が存在し, (1) M は自由 $F\langle X, Y \rangle$ -加群, かつ (2) M から定まる関手 $M \otimes_{F\langle X, Y \rangle} - : F\langle X, Y \rangle\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ がつねに直既約 $F\langle X, Y \rangle$ 加群を直既約 A 加群に写し, 非同型な直既約加群を非同型な直既約加群に写すときをいう.

定理 1.1 (Drozd) A を有限次元 F -代数とすると, A はかならず *finite*, *tame*, *wild* のどれかになり, しかも 2 つが同時に起こることはない.

以下ではとくに古典型 Hecke 環を考察する. W を古典型有限 Weyl 群, $q \in F^\times$ とし, $\mathcal{H}_W(q)$ を (W, q) から定まる Hecke 環とする. W の Poincaré 多項式 $P_W(x)$ を

$$P_W(x) = \sum_{w \in W} x^{l(w)}$$

で定める. ここで $l(w)$ は w の簡約表示の長さである.

W が古典型既約 Weyl 群のときは, A_{n-1} , B_n , D_n のそれぞれの場合にあわせて $\mathcal{H}_W(q)$ を $\mathcal{H}_n^A(q)$, $\mathcal{H}_n^B(q)$, $\mathcal{H}_n^D(q)$ とあらわす.

よく知られているように, W が B_n 型のときはパラメータを 2 つもつ Hecke 環が定義できる. この Hecke 環を $\mathcal{H}_n(q, Q)$ とあらわす. 定義は次の通りである.

定義 1.2 $q, Q \in F^\times$ とする. 生成元 $T_0, \dots, T_{n-1}$ とつぎの基本関係で定まる F -代数を $\mathcal{H}_n(q, Q)$ であらわす.

$$\begin{aligned}(T_0 - Q)(T_0 + 1) &= 0, & (T_i - q)(T_i + 1) &= 0 \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ (T_0 T_1)^2 &= (T_1 T_0)^2, & T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2) \\ T_i T_j &= T_j T_i \quad (j \geq i+2)\end{aligned}$$

以下, $q \neq 1$ を仮定し, $q^s = 1$ となる最小の自然数 $s \geq 2$ を e で表わす. q が 1 のべき根でないときは $e = \infty$ と考える.

昨年は Hecke 環の表現型が finite になるための条件について研究した. 結果はつぎの通りである.

定理 1.3 ([AM1]) F を代数閉体, $q, Q \in F^\times$ とすると, $\mathcal{H}_n(q, Q)$ が finite であるための必要十分条件は

- (a) $-Q \notin q^{\mathbb{Z}}$ かつ $n < 2e$, または
- (b) $-Q = q^f$ ($0 \leq f \leq e-1$) かつ $n < \min(e, 2f+4, 2e-2f+4)$,

である.

定理 1.4 ([A1]) F を代数閉体, $1 \neq q \in F^\times$ とし, W を古典型と仮定する. このとき, (W, q) から定まる Hecke 環 $\mathcal{H}_W(q)$ が finite になるための必要十分条件は $(x-q)^2 \nmid P_W(x)$ である.

2 主結果

今回は, W が古典型の場合に, $\mathcal{H}_W(q)$ がいつ tame/wild になるかについて報告したい. これで古典型の Hecke 環の表現型については完全にわかったことになる.

$\mathcal{H}_n(q, Q)$ についてもほぼ終了しており, ($n=4, f=0$ を残すのみ) 近いうちに報告できると思う. ただし, より精密な結果, つまり Hecke 環のブロック代数の表現型を決める問題については, $\mathcal{H}_n^A(q)$ を除けば手がついておらず今後の課題である. (A 型は Erdmann と Nakano による. [EN] をみよ.)

定理 2.1 F を代数閉体, $1 \neq q \in F^\times$ とし, Hecke 環 $\mathcal{H}_n^X(q)$ ($X = A, B, D$) を考える. 対応する Poincaré 多項式を $P_n^X(x)$ であらわす. このとき, 次が成立.

- (1) $q^2 \neq 1$ ならば, $\mathcal{H}_n^X(q)$ は finite または wild である. とくに, wild になるための必要十分条件は $(x-q)^2 \mid P_n^X(x)$ である.
- (2) $q^2 = 1$ ならば, $\mathcal{H}_n^X(q)$ が tame になるための必要十分条件は $(x-q)^2 \nmid P_n^X(x)$ であり, $\mathcal{H}_n^X(q)$ が wild になるための必要十分条件は $(x-q)^3 \mid P_n^X(x)$ である.

3 手法

まず最初に、表現型をどう決めるかについて復習しよう。

F を代数閉体、 A を有限次元 F 代数とし、 $P_1, \dots, P_m$ を直既約射影 A 加群の同型類の完全代表系とする。このとき、 A と $\text{End}_A(P_1 \oplus \dots \oplus P_m)$ は森田同値であり、Gabriel の定理により、後者は有限有向グラフ (quiver) $Q = (Q_0, Q_1)$ と Q の道代数 FQ の許容的イデアル I を用いて FQ/I と表示できる。ここで、 Q_0 は Q の頂点の集合であり、 $Q_1 \subset Q_0 \times Q_0$ は Q の有向辺の集合である。

さてここで問題になるのは、この道代数による表示を得るためには直既約 A 加群の構造について詳しい情報が必要なことで、完全な表示を得ることは不可能である。

しかしながら、私が 1996 年に出版した論文の結果 ([Abook] に詳しい解説がある。) をもとにして、Dipper, James と Murphy による Specht 加群理論 [DJM] 等を用いると、表現型を決定する程度には詳しい、 FQ/I についての情報を得ることができる。この論文の結果について簡単に説明しておこう。上で述べたように、 $q = \sqrt[e]{1}$ 、 $-Q = q^f$ ($2 \leq e$, $0 \leq f \leq e-1$) で自然数 e, f を定める。

ヤング図形のペア $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ が与えられたとき、そのすべての箱を e 色に色分けしよう。すなわち、色の集合を $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ とし、次のように定義する。

ヤング図形のペア $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ に f から定まる色分けが与えられているとは、 $\lambda^{(1)}$ の a 行 b 列めにある箱が $-a+b \pmod{e}$ 、 $\lambda^{(2)}$ の a 行 b 列めにある箱が $f-a+b \pmod{e}$ で色分けされているときをいう。

$\mathfrak{g}$ を $A_{e-1}^{(1)}$ 型の Kac-Moody Lie 環とすると、ヤング図形のペアを基底とする無限次元ベクトル空間 $\mathcal{F} = \bigoplus \mathbb{Q}\lambda$ は、 f から定まる色分けを用いて加群構造を定めることにより、可積分 $\mathfrak{g}$ 加群になる。これを $\mathcal{F}_{0,f}$ と書こう。

空ヤング図形のペア $((0), (0))$ を $v_{0,f}$ であらわし、 $v_{0,f}$ で生成される $\mathcal{F}_{0,f}$ の部分 $\mathfrak{g}$ -加群を $V_{0,f}$ とする。

詳しいことは [Abook] の解説を読んでもらうこととして、 $V_{0,f}$ には標準基底が定まり、次の定理が成り立つ。

定理 3.1 F を標数 0 の体とし、 $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(q, -q^f)$ ($n \in \mathbb{N}$) を考える。 S^λ を Specht $\mathcal{H}_n$ -加群、 D^μ を既約 $\mathcal{H}_n$ -加群、 $d_{\lambda\mu} = [S^\lambda : D^\mu]$ を分解係数とする。

$\mathcal{F}_{0,f}, V_{0,f}$ を上で述べた通りとすると次が成立。

- (1) $\{G(\mu) = \sum_{\lambda \geq \mu} d_{\lambda\mu} \lambda \mid D^\mu \neq 0\}$ は $V_{0,f}$ の標準基底と一致する。
- (2) $G(\mu)$ が $f_{i_1}^{(n_1)} \dots f_{i_n}^{(n_n)} v_{0,f}$ の形ならば、 F の標数が正であっても、すべての λ に対し $d_{\lambda\mu}$ は $[S^\lambda : D^\mu]$ に一致する。

この定理に Specht 加群理論その他の議論を用いることにより、Hecke 環から定まる FQ/I の情報を得るわけであるが、ここで、 $\mathcal{H}_n(q, Q)$ 等が対称多元環でありまた胞体代数でもあることが有用な情報を与えてくれることに注意しておく。

FQ/I の形の代数に対しては表現型の判定法が多く知られている。以下ではそれらについて説明しよう。まず、wild であることの判定法から述べる。

3.1 複雑度

A を有限次元 F -代数, M を A -加群とする.

$$\cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の最小射影分解とする. このとき, ある定数 C が存在して

$$\dim_F P_i \leq C(i+1)^{s-1}$$

がすべての $i \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような自然数 s の最小値を $c_A(M)$ とかき, M の複雑度とよぶ. 次が知られている.

定理 3.2 A を有限次元 *self-injective* F -代数とする.

- (1) A が半単純環である必要十分条件は, すべての直既約 A -加群 M に対して $c_A(M) = 0$ が成り立つことである.
- (2) ある直既約 A -加群 M に対して $c_A(M) \geq 2$ ならば, A は *tame* または *wild* である.
- (3) ある直既約 A -加群 M に対して $c_A(M) \geq 3$ ならば, A は *wild* である.

この定理を用いて, A が *tame self-injective* で B が *finite non semisimple* のとき, $A \otimes B$ が *wild* であることを示せる場合がある.

群環の場合に, $c_A(M) \leq 1$ がすべての直既約 A -加群 M に対して成り立っていても A が *tame* である例や, $c_A(M) \leq 2$ がすべての直既約 A -加群 M に対して成り立っていても A が *wild* である例があるので, (2), (3) は必要十分条件にはならない. これは, support variety の理論による.

3.2 被覆理論

定義によれば, *wild* であるための条件は $F\langle X, Y \rangle - \text{mod}$ を直既約性と非同値性を保ちつつ埋めこめるかどうかであった. このことと, 道代数 FQ が *tame* であるための必要十分条件が Q が *affine quiver* であること, *wild* であるための必要十分条件が Q が *finite Dynkin quiver* でも *affine quiver* でもないこと, というよく知られた結果を用いれば,

「 Q がこれこれの *subquiver* をもてば $A = FQ/I$ は *wild*」

というタイプの定理が多く成り立つ. 実際に使った例をあげると次のようである.

例 3.3 $Q = (Q_0, Q_1)$ が次の形の有向グラフ,



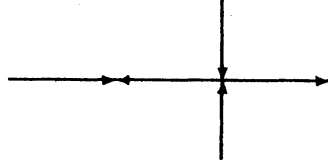
すなわち隣接行列が

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の有向グラフを部分グラフにもてば, $A = FQ/I$ は *wild*.

また, つぎの補題が成り立つ.

補題 3.4 A を有限次元 F 代数, T を次の形の有向グラフ ($\tilde{D}_4$) とする.



もし, (A, FT) 両側加群 M が存在して, (1) M は自由 FT 加群, かつ (2) M の定める関手 $F = M \otimes_{FT} - : FT\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ が, 直既約 FT 加群を直既約 A -加群に写し, 非同値な直既約 FT -加群を非同値な直既約 A -加群に写すならば, A は *wild* である.

このような補題は被覆理論の簡単な応用であり, 関手 F は被覆の pushdown 関手である. 被覆の定義を述べよう.

定義 3.5 $Q' = (Q'_0, Q'_1)$ と $Q = (Q_0, Q_1)$ を有向グラフとする. 全射写像 $\pi = (\pi_0, \pi_1) : Q' \rightarrow Q$ が被覆とは, 任意の $x' \in Q'_0$ に対し, $x = \pi(x')$ とおくと, π が $s(x') = \{y' | (x', y') \in Q'_1\}$ と $s(x) = \{y | (x, y) \in Q_1\}$ の全単射を誘導し, かつ $e(x') = \{y' | (y', x') \in Q'_1\}$ と $e(x) = \{y | (y, x) \in Q_1\}$ の全単射を誘導するときをいう.

被覆が Galois 被覆とは, 有向グラフ Q' の自己同型群 $\text{Aut}(Q')$ の部分群 G が存在して, すべての $x \in Q_0$ に対し $\pi^{-1}(x)$ が固定点をもたない G -軌道になっているときをいう.

$A' = FQ'/I'$ が $A = FQ/I$ の Galois 被覆とは, Q' が Q の Galois 被覆であって, その被覆の誘導する全射環準同型写像 $FQ' \rightarrow FQ$ がイデアル I' からイデアル I への全射を誘導するときをいう.

前補題のような例は被覆を考え, その中に T と同型な有向グラフを見つけることにより応用されるのである. 同様にして次の補題も成立する.

補題 3.6 $Q = (Q_0, Q_1)$ が次の隣接行列をもつ有向グラフを部分グラフにもてば, $A = FQ/I$ は *wild* である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最後に, 最近の発展の中でとくに Han's covering criterion について触れよう. この結果のおかげで, $\mathcal{H}_n(q, Q)$ の表現型の決定も完成しつつあるのである.

この「Han の被覆判定法」は [H1] において与えられた. この判定法を用いれば, 多くの Artin 環 $A = FQ/I$ が *wild* であることを示すことができる. とくに $|Q_0| = 2$ の場合を 2 点代数とよぶが, この被覆判定法はすべての *wild* 2 点代数を確定することができるほど強力である. 実際, [H2] において, Han はすべての 2 点代数の表現型を決定した.

3.3 Erdmann の代数

上では wild になるための判定方法ばかり説明してきたが, wild にならないことをどう示すかについて述べよう. さいわいなことに Hecke 環の場合は特殊な tame 代数しかでてこない.

定義 3.7 有限次元 F 代数 $A = FQ/I$ が *special biserial* とは, 次をみたすときをいう.

(a) 各 $x \in Q_0$ に対し, $s(x), e(x)$ を次で定めると $|s(x)| \leq 2, |e(x)| \leq 2$ が成立.

$$s(x) = \{y \in Q_0 \mid (x, y) \in Q_1\}, \quad e(x) = \{y \in Q_0 \mid (y, x) \in Q_1\}.$$

(b) 各 $\alpha \in Q_1$ に対し, $\beta \in Q_1$ で $\beta\alpha \notin I$ となるものは高々 1 つしか存在せず, また $\beta \in Q_1$ で $\alpha\beta \notin I$ となるものも高々 1 つしか存在しない.

次の定理が成立する.

定理 3.8 ([E]) $A = FQ/I$ が *special biserial* ならば, A は *tame* または *finite* である.

References

- [Abook] S. Ariki, *Representations of Quantum Algebras and Combinatorics of Young Tableaux*, University Lecture Series, 26 (2002), Amer. Math. Soc.
- [A1] S. Ariki, *Uno's conjecture on representation types of Hecke algebras*, to appear in the proceedings of a conference held in North Carolina State University (2001), **math.QA/0108176**.
- [A2] S. Ariki, *On tameness of the Hecke algebras of type B*, preprint.
- [AM1] S. Ariki and A. Mathas, *The representation type of Hecke algebras of type B*, to appear in Adv. Math., **math.RT/0106185**.
- [AM2] S. Ariki and A. Mathas, *Hecke algebras with a finite number of indecomposable modules*, to appear in the proceedings of a conference held in Sophia University, Tokyo (2001).
- [BD] V.M. Bondarenko and J.A. Drozd, *The representation type of finite groups*, J. Soviet Math., **20** (1982), 2515–2528.
- [Br] S. Brenner, *Decomposition properties of some small diagrams of modules*, Symposia Math., Ist. Naz. Alta Mat., **13** (1974), 127–141.
- [DJ] R. Dipper and G. James, *Representations of Hecke algebras of type B_n* , J. Algebra, **146** (1992), 454–481.
- [DJM] R. Dipper, G. James and E. Murphy, *Hecke algebras of type B_n at roots of unity*, Proc. London Math. Soc. (3), **70** (1995), 505–528.

- [DD] R. Dipper and J. Du, *Trivial and alternating source modules of Hecke algebras of type A*, Proc. London Math. Soc. (3), **66** (1993), 479–506.
- [E] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, Lecture Notes in Math., **1428** (1990), Springer Verlag.
- [EN] K. Erdmann and D.K. Nakano, *Representation type of Hecke algebras of type A*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 275–285.
- [H1] Y. Han, *Controlled wild algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **83** (2001), 279–298.
- [H2] Y. Han, *Wild two-point algebras*, J. Algebra, **247** (2002), 57–77.
- [Hig] D. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p* , Duke Math. J., **21** (1954), 377–381.
- [HM] M. Hoshino and J. Miyachi, *Tame two point algebras*, Tsukuba J. Math., **12** (1988), 65–96.
- [Ri] J. Rickard, *The representation type of self-injective algebras*, Bull. London Math. Soc., **22** (1990), 540–546.
- [R1] C. Ringel, *Tame algebras*, Lecture Notes in Math., **831** (1980), 137–287.
- [R2] C. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Math., **1099** (1984), Springer Verlag.
- [U] K. Uno, *On representations of non semisimple specialized Hecke algebras*, J. Algebra, **149** (1992), 287–312.