

対流ロールの安定性と Swift-Hohenberg 方程式

広島商船高等専門学校 桑村雅隆 (KUWAMURA, Masataka)

Rayleigh-Benard 問題において、図 1 のような対流ロールが形成される過程を記述するモデル方程式として、Swift-Hohenberg [2] による次のものがある。

$$(1) \quad u_t = (\alpha - (1 + \partial_x^2 + \partial_y^2)^2)u - u^3$$

ここで、 u は各ロールの中心線を通る平面上の各点 (x, y) における流速場の鉛直方向成分を表す。 α は (reduced) Rayleigh 数と呼ばれる (温度差に比例する) parameter である。(1) がこのような現象を記述するモデルであることは、次のような heuristic な議論によって了解されるであろう。

$u \equiv 0$ (静止状態) のまわりの (1) の線形安定性を調べる。Fourier mode $\exp(i(kx + ly))$ に対する固有値は

$$\mu_{k,l} = \alpha - (1 - (k^2 + l^2))^2$$

である。これより、もしも $\alpha < 0$ ならば、 $\mu_{k,l} < 0$ ($\forall k, l$) となって、 $u \equiv 0$ は安定 (熱伝導状態)。もしも $\alpha > 0$ ならば、最大固有値 $\mu_{k,l} > 0$ ($k^2 + l^2 = 1$) となって、 $u \equiv 0$ は不安定。特に、Fourier mode $\exp(\pm ix)$ ($k = \pm 1, l = 0$) 方向へ不安定性が成長すれば、 x 方向に周期的で y 方向に一様な形の定常解が出現する可能性がある (対流ロールの形成)。実際、Collet-Eckmann [1] は、(1) がロール解を持つことを証明した。

Existence of roll solutions [1]: Suppose that ω satisfies

$$2/5 < \omega^2 < 2.$$

Then, there exists a positive constant ε_0 independent of ω such that for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, the equation

$$(\alpha - (1 + \partial_x^2 + \partial_y^2)^2)u - u^3 = 0, \quad -\infty < x, y < \infty$$

has a unique solution of the form

$$\alpha = 3\varepsilon^2 + (1 - \omega^2)^2,$$

and

$$(2) \quad u_0(x) = \bar{u}(\omega x), \quad \bar{u}(z) = \varepsilon 2 \cos(z) + O(\varepsilon^3).$$

ロール解 (2) の安定性を調べるのが、我々の目的である。非常に大きな系において、対流ロールを観察すると次のことがわかる。

- (a) ロールは局所的には規則正しく並んでいるが、大域的に見ると空間的な周期 (phase) が弱く緩やかに変調している。
 (b) ロール解に対して摂動を加えた場合、ロール解の amplitude 成分は phase 成分に比べて速く減衰する。

上の (a),(b) を考慮して、ロール解 (2) の安定性を次のような形式的な摂動計算によって調べる。(2) のまわりの (1) の解 $u = u(x, y, t)$ は

$$(3) \quad u = \bar{u}(z) + \rho(z, X, Y, T),$$

where

$$z = \omega x + \phi(X, Y, T), \quad X = \nu x, \quad Y = \nu y, \quad T = \nu^2 t,$$

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(z, X, Y, T) \nu^n, \quad \phi_T = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(X, Y, T) \nu^n$$

で与えられると仮定する。ここで、 ν は摂動展開 parameter を表す小さな正数である。(3) を (1) に代入して ν について整理することによって次を得る。

$$(4) \quad \begin{aligned} \phi_T &= D_{//} \phi_{XX} + D_{\perp} \phi_{YY} + O(\nu), \\ D_{//} &= 4 - 8W^2 + O(\epsilon), \quad D_{\perp} = 2\sqrt{3}\epsilon W, \end{aligned}$$

where

$$W = \frac{\omega^2 - 1}{\sqrt{3}\epsilon}.$$

これより、 $D_{//} > 0$ かつ $D_{\perp} > 0$ すなわち、 $0 < W < 1/\sqrt{2}$ のときロール解は安定である。一方 $D_{//} < 0$ または $D_{\perp} < 0$ のとき、すなわち $|W| > 1/\sqrt{2}$ または $W < 0$ のときロール解は不安定である。 $D_{//} < 0$ のときを Eckhauss 不安定、 $D_{\perp} < 0$ のときを zigzag 不安定という。(図 2)

このように、空間的な周期構造を持った定常解の安定性を phase 成分の dynamics を通して調べる方法を phase dynamics 法という [3],[4]。

我々は、ロール解 (2) の安定性を spectral analysis によって調べると同時に (4) の数学的な意味を明らかにしたい。また、(4) ではわからなかったロールの軸方向の長さと zigzag 不安定性との関係も明らかにしたい。

$$\Omega = (-L/2, L/2) \times (-M/2, M/2), \quad 0 < L < \infty, \quad 0 < M < \infty$$

とおく。ただし、 L は $2\pi/\omega$ の整数倍であるとする。

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$Av = (\alpha - (1 + \partial_x^2 + \partial_y^2)^2)v - 3u_0^2v, \quad v \in H^4(\Omega)$$

を周期境界条件の下で考える。我々の得た結果は次の通りである。

Theorem 1. (1) If $0 \leq W < 1/\sqrt{2}$, then for sufficiently small $\varepsilon > 0$, the spectrum of A lies in the closed left half-plane in $\mathbb{C}$. This is independent of L and M .

(2) If $-1/\sqrt{2} < W < 0$, then for sufficiently small $\varepsilon > 0$, (i) the spectrum of A lies in the closed left half-plane in $\mathbb{C}$ provided $0 < \varepsilon < \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}|W|M^2}$, (ii) the spectrum of A intersects the right half-plane in $\mathbb{C}$ provided $\varepsilon > \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}|W|M^2}$, where $\varepsilon M^2 = O(1)$ as $\varepsilon \downarrow 0$ and $M \rightarrow \infty$.

(3) If $|W| > 1/\sqrt{2}$, then for sufficiently small $\varepsilon > 0$ and large L , the spectrum of A intersects the right half-plane in $\mathbb{C}$.

Theorem 2. When $0 < W < 1/\sqrt{2}$ and ε is sufficiently small, for sufficiently large L and M , there exist $\beta > 0$ and $\gamma > 0$ which depend on ε, W, L and M such that (i) β and γ satisfy

$$\begin{aligned} 0 < \beta < \gamma, \quad \lim_{L, M \rightarrow \infty} \beta(\varepsilon, W, L, M) &= 0 \\ \lim_{L, M \rightarrow \infty} (\gamma(\varepsilon, W, L, M) - \beta(\varepsilon, W, L, M)) &= 0 \end{aligned}$$

(ii) The eigenvalues which belong to the interval $[-\beta, 0]$ are given by

$$\mu_{mn} = -D_{\perp} \left(\frac{2\pi m}{M} \right)^2 - D_{\parallel} \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{L}\right)^3\right)$$

for $|m| \leq \rho_1(M)$ and $|n| \leq \rho_2(L)$, where $\rho_1(M) = o(M)$, $\rho_2(L) = o(L)$ as $L, M \rightarrow \infty$, and the associated eigenfunctions are given by

$$\psi_{mn} = \partial_x u_0 \exp(2\pi i m y / M) \exp(2\pi i n x / L) + O(1/M) + O(1/L).$$

(iii) The other eigenvalues μ which belongs to the interval $(-\infty, -\beta)$ satisfy $\mu < -\gamma$

この定理の証明については、参考文献 [5], [6] を見よ。

参考文献

- [1] P. Collet and J.P. Eckmann, Instabilities and fronts in extended systems, Princeton University Press, 1990.

- [2] J. Swift and P.C. Hohenberg, Hydrodynamic fluctuations at the convective instability, *Phys. Rev. A*, vol **15**, num.1 (1977), pp.319–328.
- [3] Y. Kuramoto, Phase dynamics of weakly unstable periodic structures, *Progress. Theo. Phys.* vol. **71**, no. **6** (1984), pp.1182–1196.
- [4] Y. Pomeau and P. Manneville, Stability and fluctuations of a spatially periodic convective flow, *J. de Phys. Lett.* **40** (1979), pp.609–612.
- [5] M. Kuwamura, The phase dynamics method with applications to the Swift-Hohenberg equation, *J.Dyns. Diff. Eqns.*, vol. **6**, no. **1** (1994), pp.185–225.
- [6] M. Kuwamura, On the stability criterion of convective rolls in the Rayleigh-Bénard problem, submitted to *SIAM J. Math. Anal.*

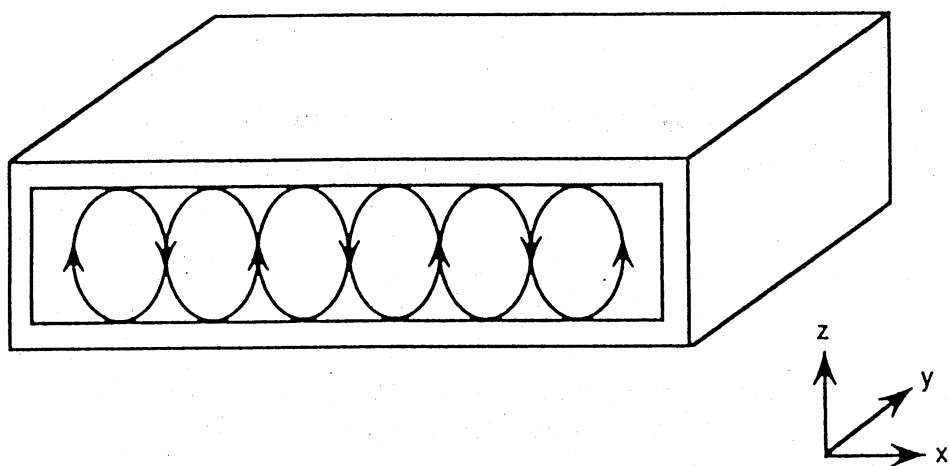


Figure 1.

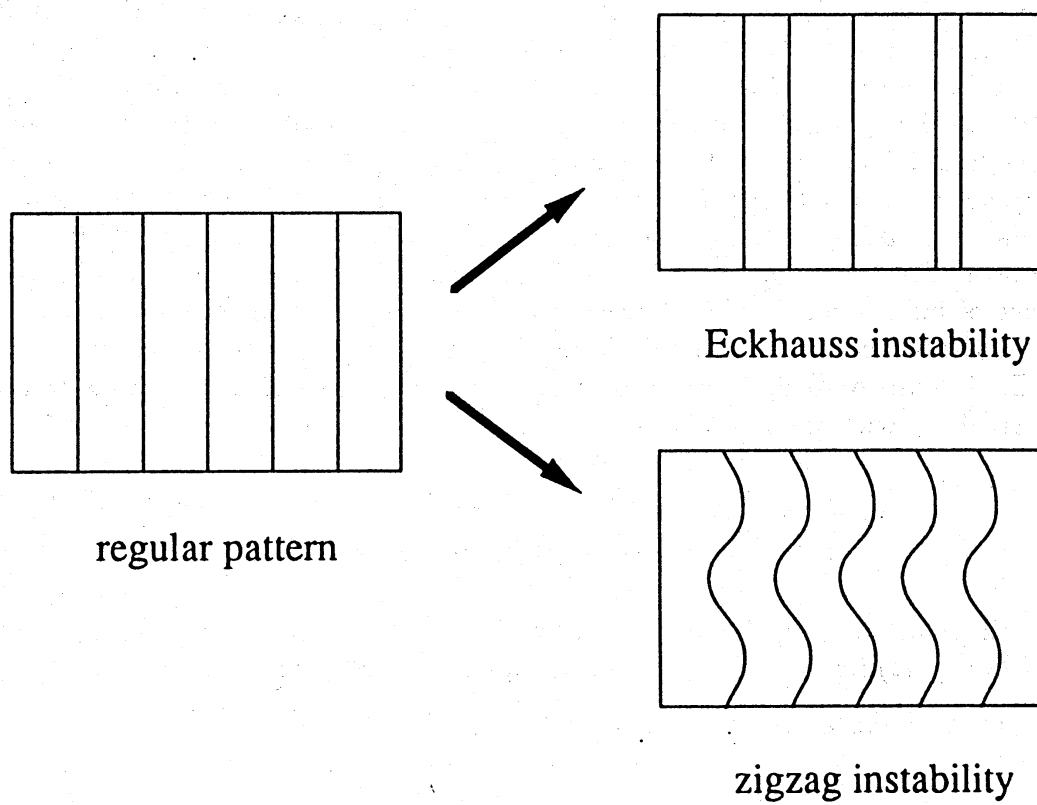


Figure 2.