

加法定理 (予想 C_n)

東大 理 角田秀一郎

加法定理. $f: X \rightarrow Y$ は代数的ファイバー空間, $K(X) \geq 0$, $K(Y) = \dim Y$ ならば, $K(X) = K(F) + K(Y)$. 二重に F は f の一般ファイバー $f^{-1}(y)$.

証明. まず $P_g(X) \neq 0$ の場合に帰着させる. $m \in P_m(X) \neq 0$ なる正整数とする. $U = \{U_i\}$ は X のアフィン開被覆, φ_{ij} は K_X の U に関する変換関数とする. f_i は $m K_X$ の非零切断に対応する U_i 上の関数で, $f_i = \varphi_{ij}^m f_j$ をみたすものとする. $U_i' = \{(x, s) \in U_i \times \mathbb{C} \mid s^m = f_i(x)\}$ とおけば, U_i' は U_i 上の代数的多様体 K_X の代数的集合 X' をつくる. $X^* \in X'$ の既約成分の非特異化, $\pi: X^* \rightarrow X$ は射影とすれば, X^* の生成系から, $H^0(X^*, \pi^* K_X) \neq 0$, $R\pi \in \pi$ の合成因子とすれば, $N \geq 0$ に対して, $0 \leq R\pi \leq N\pi^* K_X$. したがって, $K(X^*) = K(X)$. 一方, $X^* \xrightarrow{f_i} Y^* \rightarrow Y$ は $f \circ \pi$ のスタイン分解とすれば, $K(Y^*) \geq K(Y)$, $K(F^*) \geq K(F)$, F^* は f の一般ファイバー.

こつて、 $X^* \rightarrow Y^*$ について加法定理を示せばよいので、
はじめから、 $P_g(X) \neq 0$ としてよい。

F を f の一般ファイバーとすれば、 $P_g(X) \neq 0$ より $P_g(F) \neq 0$ 。
 $f: X \rightarrow Y$ はモデルをとることができることにより、中置化定理の
系の仮定をみたすとしてよい。そこで、次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 p \uparrow & & \uparrow g \\
 X = X \times_Y Y & \xrightarrow{f_1} & Y \\
 \mu \nearrow & & \nearrow f \\
 X & &
 \end{array}$$

以下、 $D, \bar{D}$ の他にも中置化定理の系と同様とする。

主補題によれば、 $f_* K_X$ は局所自由かつ半正値な層で、
 $P_g(F) \neq 0$ より非零がわかる。

補題 [1]. L は非常に豊富な Y 上の因子とする。 n と m ,
正整数 m が存在し、 $H^0(Y, m g_* K_Y - L) \neq 0$ 。
 $P = P(f_* K_X)$ とおき、 $\pi: P \rightarrow Y$ を射影とする。 H は
半正値。すなわち $C \in P$ の曲線とすれば、 $(H, C) \geq 0$ 。
 $\nu: C^* \rightarrow C$ を非特異化とする。 π は $\varphi: C^* \rightarrow Y$, $\varphi^* f_* K_X$ の
商可逆層を誘導するが、それは $\nu^* H$ に他ならない。したが
って、 $(H, C) = \deg_{C^*} \nu^* H \geq 0$ 。

次の定理を使って、 $mH + \pi^* L$ は豊富を示す。

定理 (セシャトリ) の判定法 [2].

S は完備代数多様体, $D \in S$ の Cartier 因子. このとき,
 D が豊富である必要十分条件は, 正数 ε が存在して, S の
 任意の曲線 C に対し, $(D, C) \geq \varepsilon(m(C))$. 二つで $m(C) = \max_{P \in C} m_P(C)$,
 $m_P(C)$, とおいた.

L は豊富なので, 正数 ε_1 が存在して, $\forall$ C の曲線 C に対し,
 $(L, C) \geq \varepsilon_1(m(C))$. π のファイバーは, 射影空間で, H をファイバ
 ーに制限すると, 超平面になる. したがって,

π のファイバーに小さくされる曲線 C に対し, $(H, C) \geq m(C)$.

C を P 上の曲線とする. C が π のファイバーに小さくされれば,

$$(mH + \pi^*L, C) = m(H, C) \geq m(C) \geq m(C).$$

$$\pi(C) = C_0 \text{ が曲線であれば, } (mH + \pi^*L, C) \geq (\pi^*L, C)$$

$$= [C : C_0](L, C_0) \geq [C : C_0] \varepsilon_1 m(C_0) \geq \varepsilon_1 m(C)$$

二つで $[C : C_0]$ は $\pi : C \rightarrow C_0$ の写像度を表す.

よって, $mH + \pi^*L$ は豊富.

X は平坦であるから, 平坦基変換定理より, $K_{X/Y} = p^*K_{X/Y}$.

したがって, $K_{X_1} = p^*K_{X/Y} \otimes f_1^*K_Y$ となり, X_1 はゴッロースタ

イニ. 次の命題によれば, $\text{Hom}(\mu_*K_X, K_{X_1}) \neq 0$ がわかる.

命題 [3]. $f : M \rightarrow V$ を全射正則写像とする. M, V は
 次元の等しい, 局所マコーレー完備代数多様体.

そのとき, $\text{Hom}(f_*\omega_M, \omega_V) \neq 0$. 二つは ω_M と

ω_V は dualizing sheaf.

次の準同型がつけれる.

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{Y}} \hat{f}_* K_{X/\mathcal{Y}} \rightarrow \mathrm{Sym}_{\mathcal{Y}} f_{1*} K_{X_1/\mathcal{Y}} \rightarrow \sum_{n \geq 0} f_{1*} (n K_{X_1/\mathcal{Y}})$$

この準同型は、 P の部分スコーム R を定め、 $\pi: R \rightarrow \mathcal{Y}$ を誘導する. $\dim \mathcal{Y} = 0$ なる主張は自明. $\dim \mathcal{Y} > 0$ とし、 y_1, y_2

$\in \mathcal{Y}$ を異なる点、 $r_1, r_2 \in R$ の点でそれぞれ y_1, y_2 におちる

とる. $mH + \pi^*L$ は豊富であるから、正整数 n と $n(mH$

$+ \pi^*L)$ の切断 S_1, S_2 が存在し、 $S_1|_{\pi^{-1}(y_1)} = 0, S_1(r_2) \neq 0,$

$S_2|_{\pi^{-1}(y_2)} = 0, S_2(r_1) \neq 0. H^0(P, n(mH + \pi^*L))$

$$= H^0(\mathcal{Y}, \mathrm{Sym}^{nm} \hat{f}_* K_{X/\mathcal{Y}} \otimes nL) \rightarrow H^0(\mathcal{Y}, \hat{f}_{1*} (nm K_{X_1/\mathcal{Y}}) \otimes nL)$$

により、 S_1, S_2 は $H^0(\mathcal{Y}, \hat{f}_{1*} (nm K_{X_1/\mathcal{Y}}) \otimes nL)$ の切断 ω_1

ω_2 を誘導する. S_1, S_2 の性質から、 $\omega_1(y_1) = 0, \omega_1(y_2) \neq 0$

$\omega_2(y_2) = 0, \omega_2(y_1) \neq 0. \therefore H^0(\mathcal{Y}, \hat{f}_{1*} (nm K_{X_1/\mathcal{Y}})$

$\otimes nL) \geq 2. \therefore K(nm K_{X_1/\mathcal{Y}} \otimes n f_{1*} L, X_1) > 0$

$$\Rightarrow K(nm K_{X_1/\mathcal{Y}} \otimes m f_1^* g^* K_Y, X_1) > 0$$

$$\Rightarrow K(P^* K_X, X_1) > 0 \Rightarrow K(X) > 0.$$

正: $X \rightarrow Z$ を高次元ファイバリング、 $G \in (H, \pi): X \rightarrow Y \times Z$ の像とす

る. Z の一般超平面切断の共通部分 Z' をとって、 $Y^* = G \times_Z Z'$ が

Y 上支配的かつ、次元が等しくできる. $\dim Y^* \geq K(Y^*) \geq K(Y)$

$= \dim Y = \dim Y^*$ より $K(Y^*) = \dim Y^*$ が従う. $Y^* \rightarrow Z'$ の一般

ファイバ - は $f(\pi^{-1}(z)) (z \in Z')$. $Y^* \rightarrow Z'$ に基本不等式を使う

$$K(Y^*) \leq K(f(\pi^{-1}(z))) + \dim Z' \quad \text{より} \quad K(f(\pi^{-1}(z))) = \dim f(\pi^{-1}(z))$$

$\pi^{-1}(z) \rightarrow f(\pi^{-1}(z))$ を考へると, $\dim f\pi^{-1}(z) > 0$ であ
 れば, 上に証明したことから, $K(\pi^{-1}(z)) > 0$ とならねば
 ならず, $K(\pi^{-1}(z)) = 0$ となる. したがって, $\dim f\pi^{-1}(z) = 0$.
 よって, 有理写像 $g: Z \rightarrow Y$ が存在して, $f = g \circ \pi$. ところで
 与えられて, g は正則写像として与えられ, $g \in Y$ を一般点とし,
 $f^{-1}(y) \rightarrow g^{-1}(y)$ 上の基本不等式 (弱加法性) より, $K(f^{-1}(y))$
 $\leq K(\pi^{-1}(y)) + \dim g^{-1}(y)$. $\dim g^{-1}(y) =$
 $\dim Z - \dim Y = K(X) - K(Y)$ より, $K(F) \leq K(X) + K(Y)$
 一方基本不等式から, $K(X) \leq K(F) + K(Y)$.
 したがって $K(X) = K(F) + K(Y)$ $\square$. $Q.E.D.$

文 献

- [1] K. Kodaira: Holomorphic mappings of polydisks
 into compact complex manifolds, J. Diff. Geo.,
 6 (1971), 33-46
- [2] R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic
 Varieties; Springer Lecture Notes in Math. 156.
 P37.
- [3] T. Fujita: On Kähler fiber spaces over curves
 , J. Math. Soc. Japan. Vol 30, No 4, 1978
 777-794