

氏 名	近 藤 剛 史
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3090 号
学位授与の日付	平 成 18 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Fixed-point Property for CAT(0) Spaces (CAT(0) 空間に対する固定点性質)

論文調査委員	(主 査) 教 授 深 谷 賢 治	教 授 中 島 啓	教 授 河 野 明
--------	----------------------	-----------	-----------

論 文 内 容 の 要 旨

近藤剛史氏の博士申請論文は、幾何学的群論に関するものである。幾何学的群論は無限群を幾何学的手法で研究する分野で、近年重要性をましているが、日本での研究はまだそれほど多くない。

近藤氏の論文に用いられている手法はランダム群と呼ばれる手法である。これは、群を生成元と関係式で与えるやり方のパターンをきめ、そのようなパターンのできる群の(膨大な数の)集合の中で、目的の性質をもつ群が含まれる確率を計算するという手法である。

これは、無限群の重要な例を構成する方法として、現在注目されている手法である。

近藤氏がこの手法を応用したのは、群の作用の固定点に関する性質にたいしてである。与えられた群が、「あるカテゴリーに属する空間への作用に関して必ず固定点を持つ」、というのは、その群に関する重要な性質であり、剛性や Kazdan の性質 T といった、無限群の研究の典型的な問題に関して、重要な応用がある。

近藤氏が調べた空間のカテゴリーは、CAT(0) 空間というカテゴリーである。これは、空間がリーマン多様体であるときは、曲率に関する条件すなわち断面曲率が 0 以下である、という条件を満たす空間に相当する。ただし、CAT(0) 空間は必ずしも多様体とは限らず、多様体でない場合(たとえばグラフなど)が重要な役割を果たす。

さらに、正確には、近藤氏は井関氏と納谷氏によって考えられていた等周的な量を用いて、CAT(0) 空間であり、かつ、この等周的な量が δ 以下である群のカテゴリー、FY(δ) を考察した。

すなわち、近藤氏は FY(δ) に属する任意の空間への作用が固定点をもつ群全体を考え、種々の操作で閉じていることを証明した。

たとえば、そのような群は測度同値で不変である、とか、直積、有限指数部分群をとる操作で不変であるといったことを証明した。

さらに重要な結果は、そのような群が豊富に存在するという結果である。すでに参考論文において、近藤氏は井関氏、納谷氏と共同で、ランダム群の手法を用いて、FY(δ) に属する任意の空間への作用が固定点をもつ群を豊富に構成している。本論文においては、さらに、マーク付きの群の集合上の位相をも用いて、より多くの結果を得ている。

マーク付き群とは、群とその生成集合の組のことである。ここでは、必ずしも関係式が有限個とは限らない群を考えることが重要である。マーク付き群で生成集合の位数 m が決まった数になるものの集合 $H(m)$ を考えると、それは関係式のなす集合と見なすことができ、それによって位相が決まる。

近藤氏は、 $H(m)$ の元でねじれがなく初等的でない双曲群であるようなものの全体の集合 $G(m)$ のなかで、FY(δ) (ただし $\delta < 1/2$ とする) の任意の元への作用が不動点を持つものの全体は、開集合であることを証明した。

さらに、 $\delta = 1/2$ とすると、 $H(m)$ に属する群で、FY($1/2$) の任意の元への作用が不動点を持ち、有限次元の行列で表示されない群が豊富に存在することを示した。(じつは、行列の作る任意の群への準同型写像の像が有限群であるものが

豊富にあることを示した。)

論文審査の結果の要旨

この論文は、微分幾何学、代数学とその周辺分野で近年注目をあびている重要な分野である、幾何学的群論において、重要な結果を示した、価値ある論文である。

この論文では、その群の作用が $CA(0)$ 空間のしかるべき族に対して、必ず不動点をもつ群を考察している。

「 $CA(0)$ 空間のしかるべき族に対して、必ず不動点をもつ」という性質は無限群の研究において重要な性質である。実際、Kazdan の性質 T という無限群研究の基本性質は、「ヒルベルト空間への作用が必ず不動点をもつ」という性質と同値である。また、マルグリスの数論性定理において重要な役割を果たした、超剛性定理の行き先が p 進的群の場合は、しかるべきティッツ系（という $CA(0)$ 空間の一種）への、ランク 2 以上のリー群（実数体上の）の離散部分群の作用がかならず固定点をもつ、という性質に読み替えることができる。

リー群の離散部分群のような、代数的な意味がはっきりしている群とは限らない、無限離散群に対して、上記のような不動点性質を調べることは、明らかに重要な問題である。しかし、無限離散群というつかみ所のない対象に対して、そのような深い性質を示すことは、非常に困難と思われてきた。

最近になって、ランダム群という手法が開発され、無限離散群の例の存在をしめすのに、それが使えることが次第に明らかになっている。これは、具体的に群の例を与えるというのではなく、ほしい性質を持つ群が現れる確率を計算し、それによってほしい性質をもつ群が豊富にあることを示す手法である。

グロモフはこの手法によって、双曲群が豊富に存在することを示し、Zuk は Kazdan の性質 T をもつ群が豊富に存在することを示した。

一方、井関氏・納谷氏は、新しい等周的量を導入し、調和写像の理論と上記マルグリスの剛性との関係についての重要な研究をしている。

近藤氏は、この井関・納谷の等周的量に関する条件を満たす空間に対して不動点定理を満たす群を、Zuk の手法を一般化したランダム群の手法で豊富に構成する可能性に気づいた。これは、井関氏・納谷氏との共同研究に発展し、そのなかでこの構想は実現された。

さらに、本論文においては、マーク付き群上の位相に関する考察、さらには、有限次元忠実表現をもたない群のカボヴィッチによる構成、などと組み合わせることにより、論文要旨に述べたような深い結果を得ている。

このように、本論文は、幾何学的群論に関する重要な結果を、斬新かつ本質的な方法で示したものである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるもの認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。