

$\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]])$ における乗法的 Jordan 分解 と指数写像について

東大 理・数(大学院) 上野一男 (UENO, Kazuo)

§0. 研究の目的と概要

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n$ を $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ の極大イデアルとする。 $\mathcal{M}$ は普通のベキ級数の演算に関して単位元をもたない $\mathbb{C}$ 代数と考える。すると $\mathbb{C}$ 代数自己同型群として $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]) \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ ($\varphi \mapsto \varphi|_{\mathcal{M}}$), 右辺 = $\{ \varphi : x_i \mapsto f_i \ (i=1, \dots, n) \mid \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]^{\times} \}$ となる。この群, $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ (以下 A と略記する) の構造に関して調べてみたいというのが 1 つの素朴な動機である。また $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ (以下 D と略記する) を $\mathcal{M}$ の導関数 $\mathbb{C}$ Lie 代数とすると, 自然に $\exp : D \rightarrow A$ が定義される。($\mathcal{M}$ -adic filtration による射影極限を考えればよい。) これは形式解析的自励系常微分方程式の定める“流れ”と考えられるが, この指数写像と D の Lie 代数構造及び A の群構造との関わりにも関心がある。

A の元は, “原点における形式解析的変換”とも考えられ,

特に複素解析的変換（または，少し立場は違うが， C^∞ 変換）については，今までにもいくつかの重要な研究がされている。しかし， A そのものの群構造については（どういった観点からにせよ）あまり知られていないように思われる。

一方 D の元の標準化については Poincaré 以来の研究があり，現在も進行中のようである。70 年代後半頃から D で加法的 Jordan 分解が成立することが次第に一般に知られるようになった。（認識されはじめたのはもう少し前のようだ。）とこそ線形代数群の理論で基本的なことで乗法的 Jordan 分解がある。そこで A の群構造を調べる 1 つの手段としてこの乗 J 分解の考え方が利用できないだろうかと考えられる。

D で加 J 分解が成立することを示すには，例えば Gerard-Levitt ([GL]) の方法があるが，それを A の場合に“乗法的”におきかえて適用していくと， A で乗 J 分解が成立することがわかる。（§1. 参照）

しかし， $[St]$ ， $[Sc]$ などにおいて以前から知られているように $\exp: D \rightarrow A$ は全射ではないし，勿論単射でもない。従って A における乗 J 分解を指数写像を通じて D における加 J 分解に帰着させることはできない。むしろ Jordan 分解と指数写像との間のからみ具合が問題となってくる。

§2. で示すように“巾零導分”と“巾零同型”は $\exp$ に

まっ て 1対1 に対応する。これは直観的には線形代数における巾零性¹と巾単性の対応が一般化(或は拡大)されたものと考えられるが、 $\exp^{-1} = \log$ の well-definedness はそれ程自明ではない。しかしいずれにせよ、巾零導分上の $\exp$ も、巾単同型上の $\log$ も“本質的に多項式的”なので、この 1対1 対応には $\exp$ 特有の周期性は全く影響せず本質的に代数的である。

導分(又は同型)の半単純成分が 0 (又は id) ではないときに $\exp$ の周期性が現れてくる。それに関連して $\exp D$ ($\neq A$) の特徴付けが気になるが、§4.2 の 1 の説明を写える。これは結局 Jordan 分解を用いて問題を言い換えたにすぎないともいえる。§4.4 以上のことを知るためには“Jordan 標準形”に類する理論が必要だと思われるが、著者の知る限り(加法的、つまり導分の場合にも)そういう研究は余り進んでいないように思われる。しかし乗分解が問題を整理していることは確かだろう。

以下の記述において基礎体は $\mathbb{C}$ とする。これは簡単のため、ということもあるが、理くつをつけるなら次のような事情による；加(又は乗)分解そのものは任意の完全体上で考えることができる。しかし半単純=対角型を要請するには代数体上で考える必要がある。また非自明な指数写像を考える

ためには、基礎体が R を含んでいるのが望ましい。

勿論、以下の記述を適当な部分に限定して見ると、その部分については仮定を相当一般のものにできる場合が多い。しかしそれは目的と必要に応じてどうすればよいと思われるので、ここでは余りこだわらないことにする。

加(又は乗)丁分解が成立つ、というのは次のような意味に使う：半単純及び巾零(又は巾単)という性質が定義され、任意の元が半単純成分と巾零成分(又は巾単成分)の和(又は積)、但しこの2成分は積について可換、として表現される。また、これが1意的である、というのは上の条件を満たす分解の2成分が1意的にきまるということである。

この記録には“収束性”(或は Gervey 性 etc) に関する説明は全くない。これらの問題は今後の課題の1つで、すでに部分的には研究されている面もあると思われるが、ここでは“形式解析的性質はそれ自身を抽出して整理した方が右のゴトの見通しがよくなる場合もある”ということに注意していただきたい。

§1. D における加丁分解と A における乗丁分解

記号を再記しておくと、

$$D := \text{Der}_A(m) = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i \partial_i \mid f_i \in m, \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, i=1, \dots, n \right\}$$

$1, \dots, n\}$

$$A := \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) = \left\{ \varphi : x_i \mapsto f_i \mid \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathbb{C} \llbracket x_1, \dots, x_n \rrbracket^{\times} = \mathbb{C} \llbracket x_1, \dots, x_n \rrbracket \setminus \mathcal{M} \cong \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \llbracket x_1, \dots, x_n \rrbracket).$$

加(又は乗)分解とは加法(又は乗法)的 Jordan 分解のことである。以下 aJd (又は mJd) と略記する。

(ちっと脇道にそれるが, A が上の $\{\dots\}$ のまらに表わされるということはどう自明とは言えないかも知れない。ここでは深入りしない。)

以下更に若干の記号と定義を並べるが, いずれも初等的で自然なものである。

$$F_{\mathcal{M}} := \{ \mathcal{M}^i \mid i=1, 2, \dots \} \quad \mathcal{M} \text{ の } \mathcal{M}\text{-adic filtration}$$

$$\mathfrak{gl} := \mathfrak{gl}(\mathcal{M}; F_{\mathcal{M}}) \quad F_{\mathcal{M}} \text{ を保つ } \mathcal{M} \text{ の } \mathbb{C}\text{-線型自己射の全体のなす } \mathbb{C}\text{-Lie 代数}$$

$$GL := GL(\mathcal{M}; F_{\mathcal{M}}) \quad \mathfrak{gl} \text{ の可逆元の全体のなす群}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}^{i+1} &:= \{ \mathcal{M}^j/\mathcal{M}^{i+1} \mid j=1, 2, \dots \} \\ {}_i\mathfrak{gl} &:= \mathfrak{gl}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^{i+1}; F_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}^{i+1}) \\ {}_iGL &:= GL(\mathcal{M}/\mathcal{M}^{i+1}; F_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}^{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}^{i+1} \text{ の商による} \\ &\text{引きおこされる} \end{aligned}$$

$$\{ {}_j\mathfrak{gl} \rightarrow {}_k\mathfrak{gl} \mid j \geq k \} \text{ は自然な射影系になる。すると,}$$

$$\mathfrak{gl} = \varprojlim_i {}_i\mathfrak{gl}. \quad \text{同様にして, } GL = \varprojlim_i {}_iGL.$$

$$\text{また, } \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \cong \mathbb{C}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}x_n \cong \mathbb{C}^n \text{ (}\mathbb{C}\text{-線型同型)}$$

かつ $F\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, 0\}$ は自明な filtration となり, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$
 $\ni \bar{f}, \bar{g} \Rightarrow \bar{f}\bar{g} = 0$, つまり積は自明なものとなることに
 注意すると,

$$GL := GL \cong GL_n(\mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{gl} := \mathfrak{gl} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \quad \text{と同一視できる。}$$

Prop.1 次の可換図式が成り立つ:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} GL & \hookrightarrow & A & \hookrightarrow & GL \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{gl} & \hookrightarrow & D & \hookrightarrow & \mathfrak{gl} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(群単射行)} \\ \text{(Lie代数単射行)} \end{array}$$

ここにいずれの $\exp$ も, $\exp M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$ で定義される。

証明は略すが, 例えば $\mathfrak{gl} \hookrightarrow D$ は $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \partial_i$ で与えられる。 //

Prop.2 図式(1)において, $\mathcal{A}1$ 及び $\mathcal{A}3$ 列の $\exp$ は全射である。 $\mathcal{A}2$ 列の $\exp$ は全射ではない。

略証) $\mathcal{A}1$ 列については線型代数で知られている。 $\mathcal{A}3$ 列については, 各 $i=1, 2, \dots$ について ${}_i\mathfrak{gl} \xrightarrow{\exp} {}_iGL$ の全射性を (複素解析的) 線形代数により示し, それらが射影極限と両立することを示す。 $\mathcal{A}2$ 列の非全射性については

[St], [Sc] を見よ。 //

$\mathfrak{gl} \rightarrow_i \mathfrak{gl}$ (又は $GL \rightarrow_i GL$) の自然な射影を q_i と表わす。

Def. 3 $M \in \mathfrak{gl}$ とする。

1) M が半単純: $\iff \forall i=1, 2, \dots, q_i M \in {}_i \mathfrak{gl}$ が半単純 (M/M^{st} は $\mathbb{C}$ 上有限次元線型空間だからこの定義は有効。以下同様)。

2) M が巾零: $\iff \forall i=1, 2, \dots, q_i M \in {}_i \mathfrak{gl}$ が巾零。

$M \in GL$ に対し, 半単純性は 1) と同じく定義される。更に,

3) M が巾単: $\iff \forall i=1, 2, \dots, q_i M \in {}_i GL$ が巾単。

Def. 3 に従って次のような記号を用いる:

$${}^s GL := \{ M \in GL \mid M \text{ は半単純} \}$$

$${}^u GL := \{ \quad \quad \mid M \text{ は巾単} \}$$

${}^s \mathfrak{gl}, {}^u \mathfrak{gl}$ も同様。また, ${}^s A := A \cap {}^s GL, {}^u D := D \cap {}^u \mathfrak{gl}, {}^u GL := GL \cap {}^u GL$ etc だが, 例えば ${}^u GL$ が本来の $GL_n(\mathbb{C})$ における巾単の全体と一致することは上の Def. 3 だけでは自明とはいえない。これらについては次の Th. 4 及び Th. 5 の説明の中で触れる。

Th. 4 ($[Sa]$, $[GL]$ 参照)

$gl \hookrightarrow D \hookrightarrow gl$ について,

- 1) 3つのそれぞれにおいて aJd が1意的になりたつ。
- 2) 1)の aJd と各 $\hookrightarrow$ とは両立する。

Th. 5 $GL \hookrightarrow A \hookrightarrow GL$ について,

- 1) 3つのそれぞれにおいて mJd が1意的になりたつ。
- 2) 1)の mJd と各 $\hookrightarrow$ とは両立する。

Th. 4, Th. 5において gl (又は GL) における aJd (又は mJd) は普通の線形代数における Jordan 分解である。

まず Th. 4 の gl における aJd については $[GL]$ に詳しく説明されている。(定義や記号の細部はここでのものと異なるが、本質的に同値になる。)簡単に言うと、各 $i=1, 2, \dots$ について $i \cdot gl$ で aJd が成立することを用いて、それらが射影極限と両立することにより gl での aJd の成立を示す。

GL における mJd も同様に示される。($i \cdot GL \hookrightarrow i \cdot gl$ により aJd から mJd へ移るのは普通の線形代数のうにできる。)

さて D における aJd についても $[GL]$ に詳しく証明が載っているが、射影極限をとるという操作を除けば、ポイントと

なるのは、次の導分に関する一般化された Leibniz の公式である：(Lem.6 と Lem.7 の仮定部分は多少一般化できる)

Lem.6 $\delta \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \in \mathcal{M}$ とする と $\forall k \in \mathbb{N}$

に対して,

$$(2) \quad (\delta - \alpha - \beta)^k (fg) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (\delta - \alpha)^i f \cdot (\delta - \beta)^{k-i} g.$$

$\delta \in D$ を, $D \hookrightarrow \mathcal{O}^L$ により $\mathcal{O}^L$ の元と見て $\mathfrak{a}Jd$ する:
 $\delta = {}^1\delta + {}^\pi\delta$, ${}^1\delta \in {}^1\mathcal{O}^L$, ${}^\pi\delta \in {}^\pi\mathcal{O}^L$. 問題は, ${}^1\delta, {}^\pi\delta \in D$ となるかどうかだが, それを示すのに Lem.6 が用いられる。

このやり方を見ると自然に次のように考えられる。つまり
 “ $\varphi \in A$ を, $A \hookrightarrow \mathcal{G}L$ により $\mathcal{G}L$ 内で mJd したものを $\varphi = {}^{\mathfrak{a}}\varphi {}^\pi\varphi$, ${}^{\mathfrak{a}}\varphi \in {}^{\mathfrak{a}}\mathcal{G}L$, ${}^\pi\varphi \in {}^\pi\mathcal{G}L$ とすると実際には, ${}^{\mathfrak{a}}\varphi, {}^\pi\varphi \in A$ ではないか? そしてそれを示すのには Lem.6 に類する乗法的公式をつくれればいいのではないか?”

この“...”に対する答は肯定的で, Lem.6に対応するのは次の公式である：(証明自体は簡単な帰納法である)

Lem.7 $\varphi \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \in \mathcal{M}$ とする と, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$(3) \quad (\varphi - \alpha\beta)^k(fg) = \sum_{\substack{0 \leq i, j, i+j \leq k \\ (\varphi - \beta)^{k-j}g}} \binom{k}{i+j} \binom{i+j}{i} \alpha^i (\varphi - \alpha)^{k-i} f \cdot \beta^j x$$

(3)は(2)の乗法化と考えられると思うが、著者は自分で作るまでこういう公式が成立つことは知らなかった。

以上でTr.4とTr.5の1)の部分の概略は説明した。また、 $D \hookrightarrow \mathfrak{gl}$ と $\mathfrak{ad}$ (又は $A \hookrightarrow GL$ と $m\mathfrak{ad}$) が両立するというのは上の説明から理解されるだろう。

ここまです $\mathfrak{ad}$ ($m\mathfrak{ad}$) を正式に定義せずに書いてきたが、形式的には $\mathfrak{gl}(GL)$ の場合と全く同じである。重要なことは例えば $\wedge \delta \wedge \varphi \delta = \wedge \varphi \delta \wedge \delta$ ($\delta \in D$) 又は $\wedge \varphi \wedge \varphi = \wedge \varphi \wedge \varphi$ ($\varphi \in A$) となること、つまり半単純部分と巾零部分(又は巾単部分)が可換になるということである。

最後に $\mathfrak{gl} \hookrightarrow D$ と $\mathfrak{ad}$ (又は $GL \hookrightarrow A$ と $m\mathfrak{ad}$) が両立することに関して Def.3のあとに注意したことも含めて説明する。

Lem.8 1) $\delta \in {}^{\mathfrak{m}}D \iff \exists \delta \in \mathfrak{gl}$ が巾零.

2) $\varphi \in {}^{\mathfrak{m}}A \iff \exists \varphi \in GL$ が巾単.

右辺の巾零(巾単)性は普通の線型代数におけるものである。

略証) $\varphi \in A$ の場合を説明する。($\delta \in D$ についても同様。)

$\Rightarrow$ は明らか。 $\Leftarrow$ を示すには, $i=1, 2, \dots$ についての帰納法により $\forall i, g_i \varphi \in {}_i G L$, が巾單なことを示す。その際, Lem. 7 の (3) 式で, $\alpha = \beta = 1$ とおいたものを用いる。それは, $g_i \varphi - 1$ が巾零なことから $g_{i+1} \varphi - 1$ が巾零なことを示したいから。 //

上の Lem. 8 は, 本質的には D の元 $\times A$ の元が “次数を保つ” 性質, つまり $\delta(fg) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g)$ 又は $\varphi(fg) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$, を持つことによる。半単純性については:

Prop. 9 1) ([Sa], [GL] 参照) $\delta \in {}^1 D \iff \exists \psi \in A,$
 $\psi \delta \psi^{-1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \partial_i, \alpha_i \in \mathbb{C}.$

2) $\varphi \in {}^1 A \iff \exists \psi \in A, \psi \varphi \psi^{-1}: x_i \mapsto \alpha_i x_i, \alpha_i \in \mathbb{C}^{\times}.$
 2) を示すのにも [GL] p. 157 の論法が使える。 //

さて $GL \hookrightarrow A$ と mJd が両立するというのは次のことである: $g \in GL$ を GL 内で mJd したものを $g = {}^1 g {}^u g$, とすると, これは $g \in A$ と見たときの mJd と一致する。($g \in D$ と aJd についても同様。) なぜならば, ${}^1 g$ に対し, $\exists h \in GL, h {}^1 g h^{-1}$ は対角行列, とできるが, $GL \hookrightarrow A$ には

り $g \in A$ と見れば, ${}^{\wedge}g$ について Prop. 9-2) の右辺が成立つか
 ら, ${}^{\wedge}g \in {}^{\wedge}A$. また, $GL \hookrightarrow A \xrightarrow{g_1} GL$ において ${}^{\wedge}g$ は ${}^{\wedge}g$
 に戻ることを, Lem 8-2) により ${}^{\wedge}g \in {}^{\wedge}A$. ${}^{\wedge}g {}^{\wedge}g = {}^{\wedge}g {}^{\wedge}g$
 だから, A における mJd の一意性により $g = {}^{\wedge}g {}^{\wedge}g$ は A にお
 ける mJd と一致する。//

Def. 3 のあとに触れたことに関しては, 例えば ${}^{\wedge}GL :=$
 $GL \cap {}^{\wedge}GL = GL \cap A \cap {}^{\wedge}GL = GL \cap {}^{\wedge}A$, だが, Lem. 8
 -2) によりこれは $\{g \in GL \mid g_1 g = g \in GL\}$ が単元, つま
 り普通の線形代数における $GL \cong GL_n(\mathbb{C})$ の中単元の全体に
 等しい。 ${}^{\wedge}GL := GL \cap {}^{\wedge}GL = GL \cap {}^{\wedge}A \ni g$ とすると, Prop 9
 -2) により $\exists \psi \in A$, $\psi g \psi^{-1}: x_i \mapsto \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^{\times}$ とな
 るが, $A \xrightarrow{g_1} GL$ により, $g_1 \psi \cdot g_1 g \cdot g_1 \psi^{-1} = g_1 \psi \cdot g \cdot (g_1 \psi)^{-1} =$
 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$, $g_1 \psi \in GL$, だから, g は線型変換で対角化できる。
 逆は上で示した通り。よって ${}^{\wedge}GL$ は $GL \cong GL_n(\mathbb{C})$ の半単
 元全体の全体と一致する。 (${}^{\wedge}gl, {}^{\wedge}gl$ についても同様。) //

上の2つの議論をすく見れば, $g_1: A \rightarrow GL$ (又は $D \rightarrow$
 gl) と mJd ($glJd$) が両立することもある。

Th. 4 と Th. 5 についての説明はこれで終る。形式解析的自励
 系常微分方程式の "Poincaré reduction" と上記の理論と
 の関係に触れて, この §1. を閉じることにする。

Prop. 10 1) ([Sa], [GL]参照) $\delta \in D$ について, $g_1 \delta \in {}^1GL$, その固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ とする。もし任意の $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $|m| := m_1 + \dots + m_n \geq 2$ に対して $\alpha_i \neq \sum_{j=1}^n m_j \alpha_j$ ($i=1, \dots, n$) ならば $\delta \in {}^1D$ 。
 2) $\varphi \in A$ について, $g_1 \varphi \in {}^1GL$, その固有値を $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}^\times$ とする。もし任意の $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $|m| \geq 2$ に対して $\beta_i \neq \beta_1^{m_1} \cdots \beta_n^{m_n}$ ($i=1, \dots, n$) ならば $\varphi \in {}^1A$ 。

略証) 1) $\delta = {}^1\delta + {}^n\delta$, ${}^1\delta {}^n\delta = {}^n\delta {}^1\delta$ と D だとする。

Prop 9-1) により ${}^1\delta$ を対角型にしておいて, ${}^1\delta$ と ${}^n\delta$ の可換性と Th. 4 を用いる。2) も同様。//

この Prop. 10-1) は, 形式解析的自励系常微分方程式の Poincaré reduction (対角化) を与えているが, 注意すべきことは2点ある: 一般化が δ から系として与えられること, いわゆる resonance relation ($\alpha_i = \sum_{j=1}^n m_j \alpha_j$) は形式解析的性質値であること。Prop 10-2) は, 1) の乗法化である。ここでも $\beta_i = \beta_1^{m_1} \cdots \beta_n^{m_n}$ という関係は形式解析的性質値であることに注意する。

§2. 巾乗性と巾単性の対応

Th. 11

次の可換図式が成立つ:

$$\begin{array}{ccc}
 {}^{np}\mathcal{GL} & \xrightleftharpoons[\log]{\exp} & {}^{up}\mathcal{GL} \quad (\text{普通の線形代数における対応}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 {}^{np}\mathcal{D} & \xrightleftharpoons[\log]{\exp} & {}^{up}\mathcal{A} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 {}^{np}\mathcal{OGL} & \xrightleftharpoons[\log]{\exp} & {}^{up}\mathcal{GIL}
 \end{array}$$

(4) 上の図式は Prop. 1 の図式 (1) を巾環元上に制限したものである。

(4) で $\log = \exp^{-1}$ は, パキ級数 $\log x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ で与えられる。

(4) の3行目は基本的には線形代数で, あとは射影極限の操作をすればよい。2行目の $\exp$ についても一般に導分の指数級数は定義される限り同型を与えることと, 3行目の対応からわかる。問題は2行目の $\log$ の像が ${}^{np}\mathcal{D}$ に入るかどうかである。これには次の Lem. 12 を用いる。

Lem. 12 $\varphi \in A$ に対し, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\varphi-1)^k$ が意味をもつ (つまり $\in \mathcal{OGL}$) とする。その時それは導分 ($\in \mathcal{D}$) に入る。

証明は [Sc] P322-P323 を見よ。 //

$\delta \in \mathcal{D}$ に対し $\exp \delta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta^k$ が A と入ることとは2項定理 (Leibniz の公式) からすぐわかるのに対し, 上の Lem 12.

の証明はそれ程おんぱりといかない。今のところ著者は Scheinberg の証明しか知らない。

Cor. 13 1) $SD := \left\{ \sum_{i=1}^n f_i \partial_i \mid f_i(x) = x_i r_i(x), r_i(x) \in \mathcal{M}, (i=1, \dots, n) \right\} \subseteq {}^n D$, $SA := \left\{ \varphi \in A : x_i \mapsto g_i \mid g_i(x) = x_i (1 + s_i(x)), s_i(x) \in \mathcal{M}, (i=1, \dots, n) \right\} \subseteq {}^u A$ とおく。SD は D の部分 Lie 代数, SA は A の部分群になる。

2) $SD \xrightleftharpoons[\log]{\exp} SA$ は 1 対 1 対応である。これは図式 (4) の $\log$ 2 行を制限したものである。//

この Cor. 13 の証明は $\log = \exp^{-1}$ が well-defined かどうかによって (Lem. 12) 比較的容易に (直接的に) できる。実は Cor. 13 の内容は A における乗分解の理論を作る少し前に別のやや技巧的方法によって得ていた。しかし Th. 11 の系とする方がずっと自然である。§0. で触れたように Th. 11 は本質的に代数的だが, Cor. 13 はその点では更に徹底的で, 基礎環は任意の $\mathbb{Q}$ 可換代数でよい。SA は $[F]$ の中で基本的な変数変換として利用されている。 $n=1$, つまり 1 変数の場合には $SD = {}^n D$, $SA = {}^u A$ となるが $n \geq 2$ のときは左辺と右辺の差は大きいことに注意する。(Lem. 8 参照。)

§3. 実固有値の場合について

Th. 14 $\bigcup_{-\infty, 0} D := \{ \delta \in D \mid \exists \delta \in \mathfrak{gl} \text{ の全ての固有値} \in \bigcup_{-\infty, 0} \}$, $\bigcup_{0, 1} A := \{ \varphi \in A \mid \exists \varphi \in GL \text{ の全ての固有値} \in \bigcup_{0, 1} \}$ とおく。 $\bigcup_{-\infty, 0} D \xrightarrow{\exp} \bigcup_{0, 1} A$ は全射である。
 $\bigcup_{0, +\infty} D$, $\bigcup_{1, +\infty} A$ も同様に定義すると, $\bigcup_{0, +\infty} D \xrightarrow{\exp} \bigcup_{1, +\infty} A$ も全射である。

これの詳しい証明は省略するが, 次の Lem. 15 が必要となる。

Lem. 15 $\mu_j \in \mathbb{C}^\times$ ($j=1, \dots, n$) に対し, $A \supseteq GL \ni T(\mu_1, \dots, \mu_n)$
 $: x_i \mapsto \mu_i x_i$ ($i=1, \dots, n$) とおく。そのとき,
 (5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (T(\mu_1, \dots, \mu_n) - \text{id})^k$ が ($\mathfrak{gl}$ で) 収束する (意味をもつ) $\iff \{ \mu_j \mid j=1, \dots, n \} \subseteq \bigcup_{0, 1}$. //

ここに注意すべきことは, (5) は $T(\mu_1, \dots, \mu_n)$ を単に線形変換と考える場合には $|\mu_j - 1| \leq 1$ ($j=1, \dots, n$) の条件下で “ $n \times n$ -行列として” 収束して $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の元を定める。しかし $T(\mu_1, \dots, \mu_n) \in A$ と見做す場合には $x_1^{z_1} \cdots x_n^{z_n} \mapsto (\mu_1^{z_1} \cdots \mu_n^{z_n}) \cdot x_1^{z_1} \cdots x_n^{z_n}$ ($|z_i| \geq 1$) の全てについて考慮するので, Lem. 15 の条件となる。また, (5) は収束する時には $\in D$ で, $\sum_{i=1}^n (\log \mu_i) x_i \partial_i$ を表わす。(Lem. 12 参照。)

§4. $\exp D$ の特徴付け

Prop. 2 で述べたように $\exp : D \rightarrow A$ は全射ではない。そこで A 内での $\exp D$ の特徴付けが欲しくなる。

Lem. 16 1) $\varphi, \gamma \in A$ について, $\varphi \in \exp D \iff \gamma_* \varphi := \gamma \varphi \gamma^{-1} \in \exp D$.

2) $A \ni \varphi = {}^\lambda \varphi {}^\omega \varphi (= {}^\omega \varphi {}^\lambda \varphi)$ を乗分解とし, $g_i {}^\lambda \varphi \in GL$ の固有値の組を $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ($\mu_i \in \mathbb{C}^\times$) とする。Prop. 9-2) により $\exists \gamma \in A$, $\gamma_* {}^\lambda \varphi : \alpha_i \mapsto \mu_i \alpha_i$ ($i=1, \dots, n$) となるが, この時, ${}^\lambda (\gamma_* \varphi) = \gamma_* {}^\lambda \varphi$ かつ ${}^\omega (\gamma_* \varphi) = \gamma_* {}^\omega \varphi$. 従って, この $\gamma_* {}^\lambda \varphi$ を T_μ と表わし, $\gamma_* {}^\omega \varphi$ を U と表わすと, 1) により, “ $\varphi \in \exp D$ or not” を調べるには, $\varphi = T_\mu U (= U T_\mu)$ と仮定してよい。

証明は 1) は明白。2) は Lem. 8, Prop. 9 と mJd の一意性からわかる。//

以下 Lem. 16-2) の記号を用い, $\varphi = T_\mu U (= U T_\mu)$, $T_\mu \in {}^\lambda A$, $U \in {}^\omega A$, について “ $\varphi \in \exp D$ or not” を調べる。

Prop. 17 $\exp^{-1}(T_\mu) := \{\delta \in D \mid \exp \delta = T_\mu\}$, $N := \log U \in {}^\omega D$ (Th. 11 により一意的に存在する), $\text{ad } N : D$

$\rightarrow D; \delta \mapsto [N, \delta]$ (いわゆる Lie カッコ), とおく。

$$\varphi \in \exp D \iff \exp^{-1}(T_\mu) \cap \text{Ker ad } N \neq \emptyset.$$

証明) $\Rightarrow$ $\exists \delta \in D, \exp \delta = \varphi$ とする。 $\delta = S + N, S \in {}^{\mathfrak{a}}D, N \in {}^{\mathfrak{np}}D$, $\notin \mathfrak{aId}$ とすると, $[S, N] = 0$ により, $\varphi = \exp(S+N) = \exp S \exp N = \exp N \exp S$, かつ $\exp S \in {}^{\mathfrak{a}}A$, $\exp N \in {}^{\mathfrak{np}}A$. (Lem. 8 と Prop. 9 参照。) かつ $\mathfrak{mId}$ の一意性から ${}^{\mathfrak{a}}\varphi = \exp S, {}^{\mathfrak{np}}\varphi = \exp N$. よして $S \in \exp^{-1}({}^{\mathfrak{a}}\varphi) = \exp^{-1}(T_\mu)$, $0 = [N, S] = \text{ad } N(S)$, かつ $S \in \exp^{-1}(T_\mu) \cap \text{Ker ad } N$, 左辺 $\neq \emptyset$ となる。]

$\Leftarrow$ $\exists \delta_0 \in \exp^{-1}(T_\mu) \cap \text{Ker ad } N$ とすると, $\exp \delta_0 = T_\mu, [N, \delta_0] = 0$. $\delta_0 = S + N_0, S \in {}^{\mathfrak{a}}D, N_0 \in {}^{\mathfrak{np}}D, \notin \mathfrak{aId}$ とすると, 上と同じ理由によって, ${}^{\mathfrak{np}}(T_\mu) = \exp N_0 \in {}^{\mathfrak{np}}A$. しか $T_\mu \in {}^{\mathfrak{a}}A$ だから 左辺 = id . つまり $N_0 = \log \text{id} = 0 (\in {}^{\mathfrak{np}}D)$, $\delta_0 = S$ となる。 $\delta := \delta_0 + N = S + N \in {}^{\mathfrak{a}}D + {}^{\mathfrak{np}}D \subseteq D$ とおくと, $[N, S] = [N, \delta_0] = 0$ だから, $\exp \delta = \exp(S+N) = \exp S \exp N = \exp \delta_0 \cdot U = T_\mu U = \varphi$, かつ $\varphi \in \exp D$. //

Prop. 17 は一般の $\varphi \in A$ に対しても, 右辺の条件を " $\exp^{-1}({}^{\mathfrak{a}}\varphi) \cap \text{Ker ad } \log {}^{\mathfrak{np}}\varphi \neq \emptyset$ " とおきかえて成立つ。

Lem. 18 $\lambda_i \in \mathbb{C} (i=1, \dots, n)$ を $e^{\lambda_i} = \mu_i$ とする 1 つの区

定された値, $C_A(\mu) := \{\theta \in A \mid \theta T_\mu = T_\mu \theta\}$ (T_μ の A における中心化群), とおくと, 次式が成り立つ。

$$\exp^{-1}(T_\mu) = \bigcup_{z=(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n} \left\{ \theta_* \sum_{i=1}^n (\lambda_i + z_i i 2\pi) x_i \partial_i \mid \theta \in C_A(\mu) \right\},$$

但し, i は虚数単位。

証明は省略する。//

Th. 19 以上の記号及び, $S(z) := \sum_{i=1}^n (\lambda_i + z_i i 2\pi) x_i \partial_i$,
を用いると,

$$\varphi(=T_\mu \cup) \in \exp D \iff \exists z \in \mathbb{Z}^n, \exists \theta \in C_A(\mu); \theta_* S(z) \cdot N = N \cdot \theta_* S(z).$$

証明は Prop. 17 と Lem. 18 から明白。//

Rem. 20 $A \ni \psi : x_i \mapsto g_i(x) = \sum_{|\alpha| \geq 1} g_{i,\alpha} x^\alpha$, について,
Prop. 10-2) と同様の考察によつて, $\psi \in C_A(\mu)$
 $\iff \forall i=1, \dots, n, \forall |\alpha| \geq 1$ に対し " $g_{i,\alpha} \neq 0 \Rightarrow \mu_i = \mu^\alpha$
 $= \mu_1^{\alpha_1} \dots \mu_n^{\alpha_n}$."

Th. 19 は Prop. 17 の言い換えだが, 他にも 2, 3 の言い換えの仕方がある。しかし本質的には Prop. 17 以上のことは著者にはわかっていない。(§0. 参照。)

Cor. 21 ([St]参照) 以上の記号を用い, 更に $\lambda_i(z) := \lambda_i + z_i i 2\pi$ ($z \in \mathbb{Z}^n$) とおく。また次の条件: “ $\exists z \in \mathbb{Z}^n, \forall k=1, \dots, n, \forall \alpha (|\alpha| \geq 1)$ に対し, $\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) \alpha_i \notin i 2\pi (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.” を (LS) と表わすと, $\varphi = T_\mu U$ に対し (LS) が成立 $\Rightarrow \varphi \in \exp D$.

略証) (LS) が成立すると仮定し, 条件中の z を 1 つ固定すると, $\forall k=1, \dots, n, \forall \alpha (|\alpha| \geq 1)$ について, “ $\mu_k = \mu^\alpha \Rightarrow \lambda_k(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) \alpha_i$ ” が成立する。このことから $\text{Ker ad } S(z) = \{ \delta \in D \mid T_\mu \delta = \delta T_\mu \}$ がわかる。 $T_\mu U = U T_\mu$ だから, $T_\mu N = T_\mu \cdot \log U = T_\mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (U - \text{id})^k = \log U \cdot T_\mu = N T_\mu$, つまり $N \in \text{Ker ad } S(z)$, 言いかえると, $S(z) \in \text{Ker ad } N$. $\therefore z \in \mathcal{D} = \text{id} \in C_A(\mu)$ とおけば, $\exists z \in \mathbb{Z}^n, \exists \theta \in C_A(\mu), \theta_* S(z) \cdot N = N \cdot \theta_* S(z)$ となり, Th. 19 の右辺の条件がみたされる。 //

上の条件 (LS) は [St] p.455 で述べられている。Sternberg はこの条件は Lewis (1940 頃) によると書いているが著者はまだ確認していない。Sternberg は [St] の中で “(LS) は necessary”, つまり $\varphi \in \exp D \Rightarrow (LS)$ と述べているようである (著者の読みまちがいかも知れない) が, これには次のような簡単な反例がある。

Prop. 22 (LS) は $\varphi \in \exp D$ の必要条件ではない。

証明) (LS) の否定 $\neg(LS)$: " $\forall z \in \mathbb{Z}^n, \exists k=1, \dots, n, \exists |\alpha| \geq 1;$
 $\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) \alpha_i \in i2\pi(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ " が成立つ
 うな $\varphi \in \exp D$ の例を与える。

$T_\mu : x_1 \mapsto -x_1, x_i \mapsto x_i (i=2, \dots, n)$, つまり
 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) = (-1, 1, \dots, 1)$ とおく。対応する λ_i (
 Lem. 18 参照) を, $\lambda_1 = i\pi, \lambda_i = 0 (i=2, \dots, n)$ とする。
 $\forall z \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $\lambda_1(z) = \lambda_1 + z_1 i2\pi = (1+2z_1) i\pi, \lambda_i(z)$
 $= \lambda_i + z_i i2\pi = 2z_i i\pi, (i=2, \dots, n)$.

さて, $k=1, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (3, 0, \dots, 0) (|\alpha| = 3 \geq 1)$
 とおく, $\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) \alpha_i = \lambda_1(z) - 3\lambda_1(z) = -2\lambda_1(z)$
 $= -2(1+2z_1) i\pi = -(1+2z_1) (i2\pi), -(1+2z_1) \neq 0$
 だから, この (k, α) に対し $\lambda_k(z) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) \alpha_i \in i2\pi(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.
 かつ $\varphi = T_\mu$ に対しては $\neg(LS)$ が成立つ。一方
 明らかに $\varphi = T_\mu (= T_\mu \cdot id) = \exp(i\pi x_1 \partial_1) \in \exp D$. //

§5. 参考論文

[F] FRANÇOISE, J.-P. : Singularités de champs isochores,
Duke Math. J. 47(1980), 465-485

[GL] GÉRARD, R. et LEVELT, A.H.M. : Sur les con-
 nexions à singularités régulières dans le cas
 21

de plusieurs variables, Funkc. Ekvac. 19 (1976),
149-173

[Sa] SAITO, K.: Quasihomogene isolierte singularitäten
von Hyperflächen, Invent. Math. 14 (1971), 123-141

[Sc] SCHEINBERG, S.: Powerseries in one variable,
J. M. A. A. 31 (1970), 321-333

[St] STERNBERG, S.: Infinite Lie groups and the formal
aspects of dynamical systems, J. Math. Mech.
10 (1961), 451-474

以上.

(1984-1-11)