

作用素の η 乗根と周期的な自己同型写像

東北大学 教養 岡 田 隆 照

C^* -代数の周期的な自己同型写像 (involution を保つ) の構造を調べたいのだが思うに太かせたい。以下幾つかの "ふたふた" 結論を述べることにする。

1. 作用素の η 乗根 我々は Banach 空間の上の、ある好都合な条件を満たしている作用素についてはその η 乗根をほぼ完全に記述することが出来る。特に Banach $*$ -代数の周期的な自己同型写像の構造をみることが出来る。

定理 1. S を Banach 空間 X の上の有界作用素とする。

(a) 原点から $2, 2, \dots$ 無限遠点に向う、自分自身と交わらない曲線 C が次の条件を満たすとする:

$$S_p(s) \cap C = \emptyset \quad \text{且} \quad e^{\frac{2\pi i}{n}} C \cap C = \{0\}.$$

このとき S と恒等作用素 I が生成する、 X 上の作用素の閉可

環の中は S の n 乗根 $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$ 2. $S_p(R_k) \subset D_k$ と満足するものがある. しかしこの条件を満足して S と可換な $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$ は一意である. 2.1 = 各 D_k は, 原点から出ている n 本の曲線 $\{z^{\frac{1}{n}} : z \in \mathbb{C}, \neq 0\} \cup \{0\}$ の隣り合った 2 つを境界とする領域である.

(6) 更に X 上の作用素 T が $T^n = S$ と満足して いれば, X 上の S に直交し, S と可換な等作用素 $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ 2. $\sum_{k=0}^{n-1} E_k = I$ と満足するものが存在して $T = \sum_{k=0}^{n-1} R_k E_k$ である.

系. Banach $*$ -代数 A の有界な自己同型写像 α が周期 n としたものの必要十分条件は, 1 の n 乗根 ζ_k と添字とする, 線型独立な A を張る A の部分空間 $A_{\zeta_0}, A_{\zeta_1}, \dots, A_{\zeta_{n-1}}$ 2.

$$A_{\zeta_i} A_{\zeta_j} \subseteq A_{\zeta_i \zeta_j} \quad \text{且} \quad A_{\zeta_i}^* \subseteq A_{\bar{\zeta}_i}$$

と満足している存在して

$$\alpha(x) = \zeta_k x \quad \text{for } x \in A_{\zeta_k}$$

と成ることを示す.

§ 2. C^* -代数の周期的な自己同型写像. 定理 1 は C^* -代数の A patial な自己同型写像の周期的なものを示す 2 次のように $T^n = I = T^n$ が成り立つ形に示す: α は Hilbert

空間に作用している C^* -代数 A の自己同型写像 α が周期的
 とき、作用 π 上で定義される $\pi \circ \alpha$ と π と U の spectrum
 が "切れる" ならば、 α は恒等作用素 I の π 乗積で定義される。
 一般にはどうだろうか。 α が weakly inner ならばよいこ
 とはわかる:

定理 2. π の Hilbert 空間に作用している C^* -代数の
 weakly inner なる自己同型写像 α が周期的でないとき、 $\pi \circ \alpha$ は恒
 等作用素 I の π 乗積によって定義される。

実は著者はこれを最初 GCR の permanently weakly inner
 なる自己同型写像について述べたのであるが、上の形によ
 りことを松本不二洋教授 (数理解析研究所) の御指摘によつて
 知った。