

任意次数微分方程式の数値計算

都田 艶子 (Tsuyako Miyakoda) *

Department of Applied Physics
Graduated School of Engineering
Osaka University, Suita 565-0871 Japan

1 はじめに

任意次数の微分をとり扱うために、はじめに N-Fractional Calculus を定義する。[1]

曲線 C と領域 D は、 $C = \{C_-, C_+\}$, $D = \{D_-, D_+\}$ と書いて、 C_- または C_+ , そして D_- または D_+ をとるものとする。 C_- は 2 点 z と $-\infty + iIm(z)$ を結ぶカットに沿った曲線、 C_+ は 2 点 z と $\infty + iIm(z)$ を結ぶカットに沿った曲線、 D_- は C_- の内側の領域、 D_+ は C_+ に囲まれた内側の領域とする。

N-fractional operator N^ν を次のように定義する。

$$N^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_C \frac{(\cdot)d\zeta}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \quad (\nu \notin \mathbf{Z}^-), \quad (1)$$

そして

$$N^{-m} = \lim_{\nu \rightarrow -m} N^\nu \quad (m \in \mathbf{Z}^+), \quad (2)$$

そして $f = f(z)$ が D で正則な関数とすると、

$$f_\nu(z) = N^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} d\zeta \quad (3)$$

$$(f)_{-m} = \lim_{\nu \rightarrow -m} (f)_\nu \quad (m \in \mathbf{Z}^+), \quad (4)$$

とする。ここで

$$-\pi \leq \arg(\zeta-z) \leq \pi \quad \text{for } C_-,$$

$$0 \leq \arg(\zeta-z) \leq 2\pi \quad \text{for } C_+,$$

$$\zeta \neq z, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \nu \in \mathbf{R},$$

Γ ; Gamma 関数

*email: miyakoda@ap.eng.osaka-u.ac.jp

である。このとき、 $|(f)_\nu| < \infty$ がなりたつならば、この $(f)_\nu$ を z に関する f の任意次数 ν の Fractional Differentiation と定義する。

演算子 $\circ$ は次のように定義する。

$$N^\beta \circ N^\alpha f = N^\beta N^\alpha f = N^\beta (N^\alpha f) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}), \quad (5)$$

するとさらに次のことがいえて

$$N^\beta (N^\alpha f) = N^{\beta+\alpha} f \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}), \quad (6)$$

つぎの集合

$$\{N^\nu\} = \{N^\nu | \nu \in \mathbf{R}\}, \quad (7)$$

は Abelian product group であるといえる。

2 任意次数の微分方程式

いま任意次数 ν は有理数で、 $\frac{m}{n}$ と書けるものとしたとき、以下のような微分方程式を考える。

$$\varphi_{m/n} + \varphi \cdot a = f \quad (a \neq 0, m < n, m, n \in \mathbf{Z}^+) \quad (8)$$

このとき定数 a と $f(z)$ は与えられ、関数 φ は $\varphi \in \wp^\circ = \{\varphi | 0 \neq |\varphi_\nu| < \infty, \nu \in \mathbf{R}\}$ 、そして $f \in \wp^\circ$ であるとする。ここで $\varphi = \varphi_0$ である。

この微分方程式を満たす $\varphi(z)$ は、この式の両辺に対して順次、演算子 $N^{m/n}, N^{2m/n}, \dots, N^{(n-1)m/n}$ を作用させることにより

$$\varphi_m - \varphi \cdot (-a)^n = g \quad (9)$$

なる m 次の微分方程式を解けばいいことに帰着される [3]。ここで g は

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} f_{km/n} \cdot (-a)^{n-1-k}$$

である。

既知関数への Fractional Calculus に変換できたといっても、その定義が複素積分であるため、計算は単純にはいかない。複雑さを避けるために常に主値を取ることにする。そして右辺の既知関数への Fractional Calculus は [1] の結果を適用することを考える。

次の結果（主値）に注目する。

1.

$$(e^{ax})_\nu = a^\nu e^{ax},$$

2.

$$(e^{-ax})_\nu = e^{-i\pi\nu} a^\nu e^{-ax} \quad \text{for } a \neq 0$$

3.

$$(\cos ax)_\nu = a^\nu \cos(ax + \frac{\pi}{2}\nu) \quad (a \neq 0)$$

4.

$$(\sin ax)_\nu = a^\nu \sin(ax + \frac{\pi}{2}\nu) \quad (a \neq 0)$$

これらを適用することにより、任意の関数が三角多項式、フーリエ級数などに展開されるならば、右辺の既知関数への Fractional Calculus はあらためて積分計算をすることもなく計算できる。

3 数値例

ここで、初期値問題を解くことを試みる。

右辺の既知関数が三角多項式に展開されたとすると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^N (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \quad (10)$$

と書ける。 ν 次の微分は

$$f_\nu(x) = \sum_{j=1}^N (a_j j^\nu \cos(jx + \frac{\pi}{2}\nu) + b_j j^\nu \sin(jx + \frac{\pi}{2}\nu)) \quad (11)$$

である。常微分方程式の数値解法としてよく知られた解法 Runge-Kutta 法を用いて、任意次数の微分方程式の解を求める。

(8) 式で、 $m/n = 1/2$, $a = 2$, $f(z) = x/2$, $z \in \mathbf{R}$ とする。このとき、解くべき式は

$$\varphi_1 - \varphi \cdot (-2)^2 = g$$

g は

$$g = -a \cdot f + f_{(\frac{1}{2})}.$$

となる。これを初期条件 $\varphi(0) = 0$ として x が 0 から 1 まで解く。

Runge-Kutta 4 次公式による計算結果を表に示す。表中の N は 0 から 1 の間の分点の数、 M は既知関数 $f(x)$ の展開項数である。

References

- [1] K. Nishimoto, Fractional Calculus, Vol.1(1984), Vol.2(1987), Vol.3(1989), Vol.4(1991), Vol.5(1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.
- [2] T. Miyakoda and K. Nishimoto, N-method to fractional differential equations, *J. Fractional Calculus*, 15, 7-12 (1999).

Table 1: Runge-Kutta 法 (4 次公式) による結果

x	N=25, M=24	N=50, M=24	N=50, M=30
0.16	0.0937	0.0952	0.0950
0.32	0.2645	0.2725	0.2718
0.48	0.5809	0.6052	0.6036
0.64	1.1739	1.2325	1.2292
0.80	2.2919	2.4184	2.4119
0.96	4.4061	4.6637	4.6513

- [3] T. Miyakoda, Fractional Calculus の数値計算への応用, 数理解析研究所講究録, 1145, 130-134 (2000).
- [4] K. Diethelm, An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, *Electronic transactions on Numerical Analysis*, 5, 1-6, (1997).
- [5] R. Hilfer (Ed.), Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).