

Feferman 集合論の超準化と Conservation Theorem

鹿児島大 理 河合 徹

箱根シンポジウム('80年3月)において, *nonstandard analysis* を展開することができ, その集合論的基礎付けとなっている *nonstandard set theory* NST を提示した ([1]).

一方 *category theory* では *class* や *class* の集まりを扱う必要があり, そのためのいろいろの方法が提起されている. ここでそれらの中から Feferman の system ([2]) をとり, これと NST に基づいて超準化する. *Nonstandard methods* は *category theory* にも応用され始めたので, *class* やその集まりを含む *nonstandard set theory* と与えることを試みるわけである.

なお数理解析研究所の研究集会で発表したものに, 置換公理と正則性公理の代り(下記の公理 4)を付け加えて強化した形で公理系を述べる.

§1. Feferman の set theory ZFC/m ^注

ZFC に constant symbol m を付け加える.

ZFC/m の公理は次の (1)~(5) である.

(1) ZFC の公理.

(2) $\exists x [x \in m]$.

(3) $\forall x \forall y [x \in y \wedge y \in m. \rightarrow x \in m]$.

(4) $\forall x \forall y [x \subset y \wedge y \in m. \rightarrow x \in m]$.

(5) Free variable $x_1, \dots, x_n$ をもつ ZFC の formula Φ に対して
 $\forall x_1, \dots, x_n \in m [\Phi^m(x_1, \dots, x_n) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n)]$.

ここで Φ^m は Φ の m への relativization である.

$a \in m$ は a が small set であることを意味する.

ZFC/m は ZFC の conservative extension である. ([2] p. 212).

§2. Theory NST/M

NST/M の nonlogical symbol は, predicate $\in$ (membership relation) と constant S, I, M である. これらはそれぞれ次のことを意味する.

注. Feferman は [2] で $ZFC/\in$ と書いているが, ここでは S を別の記号として使用するので, 混乱を避けるために ZFC/m と書くことにする.

$A \in S$ A は standard.

$A \in I$ A は internal.

$A \in M$ A は small set.

この節では ZFC/ m の variable は小文字, NST/ M の variable は大文字で表わすことにする.

Φ は ZFC/ m の formula とする. Φ の variable を NST の variable また S, I の元を動く variable に置き換え, $m \in M$ に置き換えてできる NST/ M の formula をそれぞれ ${}^S\Phi, {}^I\Phi, {}^M\Phi$ で表わす.

NST/ M の公理は次の公理1から公理9までである.

公理1. $M \in S$.

公理2. Φ が ZFC/ m の公理ならば Φ は NST/ M の公理である.

公理3. Φ が正則性公理以外の ZFC の公理ならば Φ は NST/ M の公理である.

公理4. $\forall A [A \neq 0 \wedge A \cap I = 0. \rightarrow \exists x \in A [x \cap A = 0]]$.

公理5. $S \subset I$.

公理6. $\forall A \forall B [A \in B \wedge B \in I. \rightarrow A \in I]$.

公理7. Transfer principle.

Free variable $x_1, \dots, x_n$ をもつ ZFC/ m の formula $\Phi(x_1, \dots, x_n)$

に対して

$$\forall x_1, \dots, x_n \in S [{}^S\Phi(x_1, \dots, x_n) \equiv {}^I\Phi(x_1, \dots, x_n)].$$

公理 8. Axiom of standardization.

$$\forall A [\exists T = S \mid A \cap S \subset T] \rightarrow \exists B = S \forall X \in S [X = A \equiv X = B].$$

定義 K is finite $\equiv \exists A$ (standard natural number) $\exists F [F: A \rightarrow K, (1, \text{onto})]$.

定義 D has S -size $\equiv \exists F [F: S \rightarrow D, (\text{onto})]$.

公理 9. Axiom schema of saturation.

Free variable $a, b, x_1, \dots, x_n$ をもつ ZFC/ m の formula

$\Phi(a, b, x_1, \dots, x_n)$ に対して

$$\forall D (D \text{ has } S\text{-size}) \forall x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\left[\begin{array}{l} \forall K \in I [K \text{ is finite} \wedge K \subset D. \rightarrow \exists B \in I \forall A \in K {}^I\Phi(A, B, x_1, \dots, x_n)] \\ \rightarrow \exists B \in I \forall A \in D \cap I {}^I\Phi(A, B, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right].$$

§ 3. Conservation theorem

Φ が NST/M の定理ならば Φ は ZFC/ m の定理である.

とくに ZFC が無矛盾ならば ZFC/ m も, したがって NST/M も無矛盾である.

この conservation theorem は NST/M の応用の根拠となるものである.

以下に conservation theorem の証明を与える.

NST/M の中で公理 2 からの ${}^S\Phi_1, \dots, {}^S\Phi_k$ および公理 1, 公理 3~9 によって Φ が証明されたと仮定し, 以下 ZFC/ m において Φ と証明する.

ZFC/ $\mathcal{M}$ における reflection principle によって 次のような集合 R が存在する. すなわち

$$\mathcal{M} \in R,$$

$$\forall X \forall Y [X \subseteq Y \wedge Y \in R \rightarrow X \in R],$$

$$\forall X \forall Y [X \subset Y \wedge Y \in R \rightarrow X \in R],$$

$$(\bar{\Psi} \equiv \bar{\Psi}^R) \wedge \bar{\Psi}_1^R \wedge \dots \wedge \bar{\Psi}_k^R.$$

J は R のすべての有限部分集合の集合とし

$$t(j) = \{i \in J \mid j \subset i\} \quad (j \in J)$$

とおく. $\{t(j) \mid j \in J\}$ は finite intersection property をもつから

$\{t(j) \mid j \in J\} \subset \mathcal{F}$ とする J 上の ultrafilter $\mathcal{F}$ が存在する.^注

λ は $\text{cf}(\lambda) > |R|$ なる limit ordinal とする. 例え $\lambda = 2^{|R|}$ とすれば十分である. ここで $|R|$ は R の cardinal である.

$\mathcal{W}_0 = R$, $\varepsilon_0 = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in R \wedge a \in b \}$, $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}$ とおき structure $\mathcal{W}_0 = [\mathcal{W}_0, \varepsilon_0, \mathcal{M}^0]$ を定義する. 次に $\mu \leq \lambda$ なる μ に対して structure $\mathcal{W}_\mu = [\mathcal{W}_\mu, \varepsilon_\mu, \mathcal{M}^\mu]$ と $2 \leq \mu \leq \lambda$ なる $2, \mu$ に対して injection $k_\mu^\mu: \mathcal{W}_2 \rightarrow \mathcal{W}_\mu$ を超限帰納法で定義する. $2 < \mu$ なる 2 に対して $\mathcal{W}_2$ と $\{k_\mu^\mu\}_{2 \leq \mu}$ が定義されたとする.

注 この予は A. Robinson に基づいて釜江哲朗氏が enlargement を構成するために考へたものである. ここではその上の ultralimit により saturated model を構成するが, この方法は adequate ultralimit によるよりも簡単である.

successor ordinal $\mu = \lambda + 1$ に対して

$W_{\lambda+1}$ は W_λ の子上の ultrapower,

$k_\lambda^{\lambda+1}: W_\lambda \rightarrow W_{\lambda+1}$ は canonical embedding,

$\lambda < \mu$ なる λ に対して $k_\lambda^\mu = k_\lambda^{\lambda+1} \circ k_\lambda^\lambda$,

$k_{\lambda+1}^\mu: W_{\lambda+1} \rightarrow W_\mu$ は 恒等写像.

と定義する.

μ が limit ordinal のとき $\langle \{W_\lambda\}_{\lambda < \mu}, \{k_\lambda^\mu\}_{\lambda < \mu} \rangle$ の direct limit
を $\langle W_\mu, \{k_\lambda^\mu\}_{\lambda < \mu} \rangle$ とする.

また k_μ^μ は W_μ 上の 恒等写像,

$$\begin{array}{ccc} W_\lambda & \xrightarrow{k_\lambda^\mu} & W_\mu \\ & \searrow k_\lambda^\mu & \downarrow k_\lambda^\mu \\ & & W_\mu \end{array}$$

$m^\mu = k_\lambda^\mu(m^\lambda)$ ($\lambda < \mu$) とする. W_μ 上の 2 項関係 E_μ は

$$\langle x, y \rangle = E_\mu \text{ iff } \exists \lambda < \mu \exists a, b \in W_\lambda [x = k_\lambda^\mu(a) \wedge y = k_\lambda^\mu(b) \wedge \langle a, b \rangle \in E_\lambda]$$

によって定義する. W 上で $\{W_\mu\}_{\mu \leq \lambda}$ と $\{k_\lambda^\mu\}_{\lambda \leq \mu \leq \lambda}$ が定義され,
 $\lambda \leq \mu \leq \lambda$ ならば k_λ^μ は W_λ から W_μ への elementary embedding である.

$V_0 = W_\lambda$, $E_0 = E_\lambda$, $m_0 = m^\lambda$ とおき, V_0 は structure $[V_0, E_0, m_0]$
すなわち W_λ とする. R は transitive だから W_0 で extensionality が
成り立ち, k_0^λ は W_0 から V_0 への elementary embedding だから V_0
において extensionality が成り立つ.

すべての ordinal α に対して structure $V_\alpha = [V_\alpha, E_\alpha, m_\alpha]$ と $\beta \leq \alpha$
なるすべての ordinal の組 α, β に対して injection $p_\beta^\alpha: V_\beta \rightarrow V_\alpha$
を次のように定義する. $\beta < \alpha$ なる β に対して V_β と $\{p_\gamma^\beta\}_{\gamma \leq \beta}$ が
定義されたと仮定する.

α が successor ordinal, $\alpha = \beta + 1$ のとき

$$V_{\beta+1} = P(V_\beta) \text{ (power set),}$$

$$p_{\beta+1}^{\beta+1}: V_{\beta+1} \rightarrow V_{\beta+1} \text{ は恒等写像,}$$

$$p_\beta^{\beta+1}(a) = \{b \in V_\beta \mid \langle b, a \rangle \in e_\beta\} \quad (a \in V_\beta),$$

$$\gamma < \beta \text{ なる } \gamma \text{ に対して } p_\gamma^{\beta+1} = p_\beta^{\beta+1} \circ p_\gamma^\beta,$$

$$e_{\beta+1} = \{\langle a, b \rangle \in V_{\beta+1} \times V_{\beta+1} \mid \exists c \in V_\beta [a = p_\beta^{\beta+1}(c) \wedge c \in b]\},$$

$$m_{\beta+1} = p_\beta^{\beta+1}(m_\beta)$$

と定義する。

α が limit のとき $\langle \{V_\beta\}_{\beta < \alpha}, \{p_\gamma^\beta\}_{\beta < \gamma < \alpha} \rangle$ の direct limit を $\langle V_\alpha, \{p_\beta^\alpha\}_{\beta < \alpha} \rangle$ と定義する。また $p_\alpha^\alpha: V_\alpha \rightarrow V_\alpha$ は恒等写像, $m_\alpha = p_\beta^\alpha(m_\beta)$ ($\beta < \alpha$) とする。 V_α 上の 2 項関係 e_α を

$$\langle x, y \rangle \in e_\alpha \iff \exists \beta < \alpha \exists a, b \in V_\beta [x = p_\beta^\alpha(a) \wedge y = p_\beta^\alpha(b) \wedge \langle a, b \rangle \in e_\beta]$$

で定義する。

以上のように超限帰納法によって $\{V_\alpha\}_\alpha$ と $\{p_\beta^\alpha\}_{\beta < \alpha < \omega}$ が定義され
各 V_α は extensionality を満たし

$$\beta \leq \alpha, a, b \in V_\beta \text{ に対して } \langle p_\beta^\alpha(a), p_\beta^\alpha(b) \rangle \in e_\alpha \equiv \langle a, b \rangle \in e_\beta$$

となる。

$\langle \{V_\alpha\}_\alpha, \{p_\beta^\alpha\}_{\beta < \alpha < \omega} \rangle$ の direct limit を $\cup, \{g_\alpha\}_\alpha$ とする ($\cup$ は class).
 $v_\alpha = [V_\alpha, E_\alpha, M]$ を injection g_α によって $v_\alpha = [V_\alpha, e_\alpha, m_\alpha]$ に対応する structure とし, $E = \cup E_\alpha$ とおくと E は $\cup$ 上の 2 項関係 (class) である。

$\mu \geq \lambda$ なる μ に対して $h_\mu = g_0 \circ k_\mu^\wedge$ とおき $\mathcal{U}^\mu = [\mathcal{U}^\mu, E^\mu, M^\mu]$ は h_μ によって $\mathcal{W}_\mu$ に対応する structure とする. このとき $\mathcal{W}_\mu$ は $\mathcal{U}^\mu$ に isomorphic である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 R = \mathcal{W}_0 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathcal{W}_\mu & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathcal{W}_\lambda \\
 & \searrow k_0^\wedge & & & \searrow k_\mu^\wedge & & & & \parallel \\
 & & & & & & \mathcal{V}_0 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathcal{V}_\alpha & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \nearrow h_\mu & & \nearrow g_0 & & & & \nearrow g_\alpha & & \\
 & & & & & & \mathcal{U}^0 & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{U}^\mu & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{U}_\alpha & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{U}
 \end{array}$$

$S = g_1(k_0^\wedge[R])$, $I = g_1(\mathcal{V}_0)$, $M = h_0(m)$, $\mathcal{U} = [\mathcal{U}, E, S, I, M]$ によって structure $\mathcal{U}$ を定義する.

NST の formula を structure $\mathcal{U}$ によって解釈し, $\mathcal{U}$ において $\exists_1^R, \dots, \exists_n^R$, 公理1, 公理3~9 が成り立つことを確かめる.

$X \in \mathcal{U}$ に対して $\langle X, S \rangle \in E$ と $X = \mathcal{U}^0$ は同値だから $\exists_1^R, \dots, \exists_n^R$ から $\mathcal{U} \models \exists_1^R, \dots, \mathcal{U} \models \exists_n^R$ が得られる.

$A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{U}_{\alpha+1}$ とすれば

$$\langle A, B \rangle \in E \quad \text{iff} \quad A \in \mathcal{U}_\alpha \wedge g_\alpha^{-1}(A) \in g_{\alpha+1}^{-1}(B).$$

これから $\mathcal{U}$ が 公理3~6 を満たすことが証明される.

公理1 は $m \in R$ から, 公理7 は $\mathcal{U}_0$ が $\mathcal{U}^0$ の elementary extension であることから, 公理8 は R の元の部分集合は R の元であることからすべて $\mathcal{U}$ で成り立つことがわかる.

最後に公理9を確かめる. $D \subset \mathcal{U}_0$, $F: \mathcal{U}^0 \rightarrow D$ (onto), $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{U}_0$ と仮定する.

$|D| \leq |D^0| = |R| < cf(\lambda)$, $D \subset D_0 = \bigcup_{\tau < \lambda} D^\tau$ だから

$$\tau < \lambda, D \subset D^\tau, x_1, \dots, x_n \in D^\tau$$

なる ordinal τ が取れる. $j \in J$ とすると $j = \{r_1, \dots, r_k\} \subset R$,

$$U^A \models (\exists b) [\Phi[F(h_0(r_1), b, x_1, \dots, x_n)] \wedge \dots \wedge \Phi[F(h_0(r_k), b, x_1, \dots, x_n)]],$$

U^A は U^τ の elementary extension で

$$F(h_0(r_1)), \dots, F(h_0(r_k)), x_1, \dots, x_n \in D^\tau$$

だから同じことが U^τ で成り立つ. したがって $b \in W_b^\tau$ が存在して

$$j \in J, r \in j \text{ ならば } U^\tau \models \Phi[F(h_0(r), h_\tau(h(j)), x_1, \dots, x_n)].$$

$A \in D$ とする. $A = F(h_0(r))$ なる $r \in R$ とすると

$$t(\{r\}) \subset \{j \in J \mid U^\tau \models \Phi[F(h_0(r), h_\tau(h(j)), x_1, \dots, x_n)]\}.$$

左辺は ultrafilter 子に属すから 右辺も子に属し, 7.6 の定理によって $U^{ul} \models \Phi[A, h_{ul}(h(j)), x_1, \dots, x_n]$.

ゆえに U^A すなわち U_0 において同じことが成り立ち, 公理 9 が確かめられた.

以上のように U において ${}^S\Phi, \dots, {}^S\Psi$, 公理 1, 公理 3~9 が成り立つから $U \models {}^S\Psi$. したがって Ψ^R . これから Ψ が得られる. これは ZFC/ $\mathcal{M}$ における Ψ の証明をさへ, conservation theorem が証明された.

文 献

- [1] Kawai, T. ; Axiom systems of nonstandard set theory,
to appear.
- [2] Feferman, S. ; Set-theoretical foundations of category
theory (with an appendix by G. Kreisel), Reports of
the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in
Math. 106, Springer 1969, PP. 201 - 247.