

Fiber 上で与えられた有理型函数の

その近傍への拡張について.

名古屋市 教養部 岡野 節

§1, 序.

ある空間の細い集合上で与えられた解析函数, 有理型函数
又は form 等はどの程度その細い集合を含む近傍まで引け
事が出来るだろうか。

ここでは complex analytic な compact fiber をもつ fiber
space の一つの fiber 上で与えられた有理型函数の拡張につい
て考える。

今, X と Y は normal で connected な complex space とし, π
は X から Y の上への fiber が irreducible になる proper な
正則な写像とする。一つの fiber $\pi^{-1}(y)$ 上の有理型函数は必
ずしもその近傍の有理型函数の $\pi^{-1}(y)$ への制限とは限らない。
この事は X や Y や π に好ましい条件, たとえば "regularity"
などの条件を与えなくても本質的な障害がある事は
torus の family の例から推定される。

ここでは単に次の様な問題に一つの解答を与えようとする。
い。

「一つの fiber X_t の近傍の有理型函数の制限になっている
 X_t 上の有理型函数に depend している X_t 上の有理型
函数は必ず X_t の近傍にまで"のぼ"せるだろうか？」

この問題に対して次の様な形で答える事が出来る。

「 $f_1, f_2, \dots, f_s$ を X 上の有理型函数とする。このとき
 Y の部分集合 $Y_1 = \{t \in Y \mid X_t \text{ 上の有理型函数で } f_1, \dots, f_s$
の X_t 上の制限に depend しているものは必ず X_t の近傍ま
で"のぼ"せる} を考えれば $Y - Y_1$ は Y の nowhere dense な
集合である。」

さらにこの事を用いれば、次の事が容易に求められる。

今

$K_t =$ fiber X_t 上の有理型函数全体のなす体。

$K'_t =$ K_t の元で X_t の近傍の有理型函数の X_t 上の制限に
なっている全体のなす K_t の部分体。

とおく。

「 $Y_0 = \{t \in Y \mid K'_t \text{ は } K_t \text{ で代数的に閉じている}\}$ は
 Y の nowhere dense な集合である。」

§2. Fiber space と有理型函数についての 2, 3 の注意

今 $V, W \in \text{complex space} \in \mathbb{C}$. $\sigma \in V \rightarrow W$ の proper な正則写像とする。このとき σ の fiber の connected component の全体の集合, V' に次の条件をみたす topology と complex structure を入れる事が出来る。

(1) $V \xrightarrow{\sigma_1} V' \xrightarrow{\sigma_2} W$ はともに正則写像である。

(2) Z は任意の complex $\in \mathbb{C}$, $\tau \in V'$ から Z への map として

$\tau \circ \sigma_1: V \xrightarrow{\sigma_1} V' \xrightarrow{\tau} Z$ が holomorphic ならば τ は V' 上の holomorphic である。

この時得られる $V \xrightarrow{\sigma_1} V' \xrightarrow{\sigma_2} W$ を与えられる Steín 分解とよんでゐる。 ([6])。

Prop 1. $X \in \text{compact な complex space}$ $f_1, f_2, \dots, f_n \in X$ 上の有理型函数とする。 X から $\mathbb{P}^n (= \overset{\text{mero}}{X} \mathbb{P}^1)$ への map $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$ のグラフ $G \in \mathbb{C}$, G の normalization $\tilde{G} \xrightarrow{\mu} G \in \mathbb{C}$ 。

$\tilde{G} \xrightarrow{h_1} H \xrightarrow{h_2} \mathbb{P}^n \in \tilde{G} \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \mathbb{P}^n$ の Steín 分解と可する。

今 $g \in f_1, \dots, f_n$ に depend する X 上の有理型函数とすれば H 上の有理型函数 g' があり $g = g' \circ h_1^{-1} \circ \mu^{-1} \circ F^{-1}$ となる。
 $F: \tilde{G} \rightarrow X$ は G から X への natural proj を表わす。

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G} & \xrightarrow{h_1} & H \xrightarrow{h_2} \mathbb{P}^n \\
 \downarrow F & & \downarrow g' \\
 X & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

Prop 2. V を complex projective space $\mathbb{P}^n$ の analytic subspace (Chow の定理により algebraic) とするとき、 V 上の有理型函数は $\mathbb{P}^n$ の有理函数の V への制限である。

Prop 3. X は normal な complex space $\pi \in X$ から complex space Y への proper holomorphic mapping とする。このとき、集合 $\{t \in Y \mid \pi^{-1}(t) \text{ は locally irreducible ではない}\}$ は Y の nowhere dense set である。

Prop 3 の証明は Thimm の方法 [P], [q] によって示される。なお、この証明より単に nowhere dense set である事にとどまらず、ある程度の解析性をもった集合となっている事が分る。証明は少し長くなるので省略。

Theorem (Grauert and Remmert [h]).

X, Y は complex space とし、 $\sigma \in X$ から Y への proj space $\mathbb{P}^n$ の直積 $\mathbb{P}^n \times Y$ への discrete fiber をもつ proper ^(hol) mapping とする。今 $\sigma \in Y$ の relatively compact な Stein open set とすれば、 $X|_{\sigma}$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^N$ の subspace と考えられる。ここに N はある自然数である。

証明) $\mathcal{O}_X$ は X の structure sheaf $\mathcal{O}$ は $\mathbb{P}_0 \times Y$ の structure sheaf である。 $\mathcal{O}_X(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ -coherent-algebra である。 $\Sigma = \mathbb{Z}$ の結果を用いれば 自然数 n に対し $\mathcal{H}^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(n))$ は $\mathbb{P}_0 \times Y$ 上の global section $f_0, \dots, f_N$ で generate される。 この section $f_0, \dots, f_N$ を用いて $X \cap U$ の $\mathbb{P}_0 \times U \times \mathbb{P}_N \cap$ の 1 近辺のみを得られる。

§3. Fiber 上の有理型函数。

以後われわれは次の条件を満たす complex fiber space $X \xrightarrow{\pi} Y$ を fix に考える。

- (1) X, Y は normalかつ connected complex space,
- (2) π は X から Y への nowhere degenerated な ([m] の意味で) proper surjective な 正則写像。
- (3) 各 fiber $\pi^{-1}(t)$ は irreducible である。

Lemma $f_1, f_2, \dots, f_\ell \in X$ 上の有理型函数とする。 今一定 t に近づく。 $f_1, f_2, \dots, f_\ell$ の fiber X_t 上の制限 $f_{1,t}, f_{2,t}, \dots, f_{\ell,t}$ が (X_t 上で) 独立であるならば t に近い t' でも $f_{1,t'}, \dots, f_{\ell,t'}$ は $X_{t'}$ 上で independent である。

Theorem I. $f_1, f_2, \dots, f_\ell \in X$ 上の有理型函数, $\sigma \in X$ から

$\mathbb{P}^d \times Y$ への meromorphic map $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_\ell \times \pi$, $G \in \sigma$ のグラフ. $\tilde{G} \xrightarrow{\mu} G \in G$ の normalization とする. 今 $t \in Y$ に対して.

(I) $\tilde{G}$ の X_t 上の制限 $\tilde{G}|X_t$ が locally irreducible.

とする. このとき, t の近傍 U があって, X_t 上の有理型函数 g について $f_{1,t}, \dots, f_{\ell,t}$ に depend してゐるものは必ず $\pi^{-1}(U)$ の有理型函数の制限になる.

(証明) 今 $G_t \in f_{1,t} \times f_{2,t} \times \dots \times f_{\ell,t}: X_t \rightarrow \mathbb{P}^d$

のグラフとし. $\tilde{G}_t \xrightarrow{\mu_t} G_t \in G_t$ の normalization とする.

条件 (I) から $\tilde{G}|X_t$ と $\tilde{G}_t$ が weakly biholomorphic であることが示される.

今 $\tilde{G} \xrightarrow{h_1} H \xrightarrow{h_2} \mathbb{P}^d \times Y \in \tilde{G} \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \mathbb{P}^d \times Y$ の Stein factorization $\tilde{G}_t \xrightarrow{h_{1,t}} H_t \xrightarrow{h_{2,t}} \mathbb{P}^d \in \tilde{G}_t \rightarrow G_t \rightarrow \mathbb{P}^d$ の Stein factorization とすれば $H_t = h_{1,*}(\tilde{G}|X_t)$ と考えられる.

今 $g \in X_t$ の有理型函数について $f_{1,t}, \dots, f_{\ell,t}$ に depend してゐるものとする. Prop 1 により $H_t = h_{1,*}(\tilde{G}|X_t)$ 上での有理型函数 g' があり, $g = g' \circ h_{1,t} \circ \mu^{-1} \circ \tilde{F}_t^{-1}$ とする. 右辺 $\circ \tilde{F}_t^{-1}$ は G_t から $\mathbb{P}^d$ への proj とする.

$Z = Z'' \cup U$ は $t \in U$ 含む Y の Stein neighborhood になる。

$H \rightarrow \mathbb{P}^n \times Y$ は finite map であるから §2 の Theorem 6''

より $H|_U \subset \mathbb{P}^n \times U \times \mathbb{P}^N$ と考えられる。さらに $t \in U$ に対して

$H_t \subset \mathbb{P}^n \times t \times \mathbb{P}^N$ である。 $Z = Z''$ Prop 21 により $\mathbb{P}^n \times t \times \mathbb{P}^N$

の有理型函数 g'' があり $g''|_{H_t} = g'$ となる。この g''

は $\mathbb{P}^n \times U \times \mathbb{P}^N$ まで平行にのびた有理型函数 $\tilde{g}''$ とせ

よ。 Z は $\tilde{g}' = \tilde{g}''|_{H|U}$ とおける。 Z は Y には

$\tilde{g} = \tilde{g}'' \circ h_1^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \gamma$ は $X|U$ 上の有理型函数で

$\tilde{g}|_{X_t} = g$ である。 γ は G から X の natural

projection を表す。

Q.E.D.

Remark 1. $\tilde{g}$ の作り方から 次の事が云える。

U 上の正則函数 $\tilde{g}$ を次数 $\leq s$ の変数多項式

$$p(t)(X_0, X_1, \dots, X_s)$$

$$= p_s(t)(X_1 \dots X_s)X^s + p_{s-1}(t)(X_1 \dots X_s)X^{s-1} + \dots$$

があり $p(t)(\tilde{g}, f_1, \dots, f_s) \equiv 0$ on U である。

かつ $p_s(t)(f_1 \dots f_s) \neq 0$ かつ $p(t_0)(X_0 \dots X_s) \neq 0$

となる。つまり $\tilde{g}$ は $X_t = Z''$ は $f_{1,t}, \dots, f_{s,t}$ に depend

しているから $\tilde{g}$ は $f_{1,t}, \dots, f_{s,t}$ に代数的に depend

しているから $\tilde{g} \in U$ 上に analytic に depend した意味で $f_1, \dots, f_s$

は algebraic に depend している。

Corollary $f_1, f_2, \dots, f_n \in X$ 上の有理型函数。 $t \in Y$ に対し、 $K_t''(f) \in (\text{本 } \mathbb{C}(f_1, t), \dots, f_n, t)$ の体 K_t での algebraic closure とする。このとき集合

$\{t \in Y \mid K_t''(f) \not\subset K_t\}$ は Y の nowhere dense set である。

• (証明) Theorem I の 条件 (I) をみたす。又 $t \in Y$ は Prop 3 により Y の nowhere dense set である。よって直ちに Cor は証明される。

今、 $Y(k) = \{t \in Y \mid \exists \emptyset \neq \mathcal{U} \text{ such that } \forall t' \in \mathcal{U}, \text{tr. deg of } K_{t'}' = k\}$ とおく。

そうすると $Y(0) \cup Y(1) \cup \dots \cup Y(m)$ は Y の dense open set をなしている。 $k=0$ 。 Theorem I の Cor をあわせて

Theorem II $Y_0 = \{t \in Y \mid K_t' \text{ は } K_t \text{ で代数的に閉している}\}$ とおけば Y_0 は Y で nowhere dense である。

さらに Theorem I と同じ方法で次の事が云える。

Theorem III $\text{tr. degree of } K_t' = \text{tr. degree } K_t$ ならば $K_t' = K_t$ である。

Remark Theorem I では条件 (I) を必要とした。この事は E と $\wedge$ は f が X 上の有理型で X_t 上の $\mathcal{O}_t$ が X 上の singular であっても X_t の制限 $f|_t$ は X 上の正則になりうるという事実等によるものと思われる。