

整礎集合上の述語の微分について

新潟大学経済学部 西澤輝泰

与えられた正規集合から，その微分 (derivative) を次々ととって行ってその正規集合を受理する有限オートマトンを構成する手法は 1 つの自動プログラミング手法であり，自動プログラミングの研究にとってこうした微分なる概念を拡張することは有益であると思われる。実際 [2] では明確に定式化してはいないけれどもそうした考え方を using LISP プログラムの自動合成システムを与えている。微分の拡張は様々な方向があり得ると思われるが，ここでは 1 つの拡張例を述べる。

§1. 131 数の場合の記号列による微分

W を整礎集合， H を W の部分集合で W の極小元を含まないものとし， $B = \{B_\sigma; \sigma \in \Sigma\}$ を H の有限分割，関数 $f: H \rightarrow W$ を， $(\forall x \in H) f(x) \neq x$ を満たすもの

とする。また、 P を W 上の 1 引数述語とする。

P が W の部分集合 S 上で一定値をとるとき、その値を $P(S)$ で表す。

定義 1 P が 系 (B, f) に関して $\sigma \in \Sigma$ により微分可能であるとは、任意の $x \in W$ に対し、もし $f^{-1}(x) \cap B_\sigma$ が空でなければその上で P の値が一定であることという。(ただし、 $f^{-1}(x) = \{y \in H; f(y) = x\}$ である。)

また、 $\Gamma = (B, f)$ に関して P が任意の $\sigma \in \Sigma$ により微分可能であるときは、単に、 Γ に関して微分可能という。

以後 $f^{-1}(x) \cap B_\sigma$ を $G_\sigma(x)$ で表し、系 (B, f) を Γ で表す。

定義 2 P が Γ に関して $\sigma \in \Sigma$ により微分可能であるとき、 Γ に関する P の、 σ による微分 $\partial_\sigma^\Gamma P$ を、

$$\partial_\sigma^\Gamma P(x) \longleftrightarrow G_\sigma(x) \neq \emptyset \wedge P(G_\sigma(x))$$

により定める。

命題 1 P が Γ に関して微分可能であるとき、任意の $x \in H$ に対し

$$P(x) \longleftrightarrow \bigvee_{\sigma \in \Sigma} (x \in B_\sigma \wedge \partial_\sigma^\Gamma P(f(x)))$$

[証明] $x \in H$ に対し

$$P(x) \wedge x \in B_\sigma \longleftrightarrow P(G_\sigma(f(x))) \longleftrightarrow \partial_\sigma^\Gamma P(f(x))$$

により明か。

定義3 Γ に関する P の, $u \in \Sigma^*$ による微分可能性と, その微分 $\partial_u^\Gamma P$ とを次のように帰納的に定める。

Γ に関して,

(1) P は ε (空語) により微分可能であり, $\partial_\varepsilon^\Gamma P = P$

(2) P が $u \in \Sigma^*$ により微分可能であるとす, $\sigma \in \Sigma$ に対し $\partial_u^\Gamma P$ が σ により微分可能であれば P は $u\sigma$ により微分可能であって, $\partial_{u\sigma}^\Gamma P = \partial_\sigma^\Gamma (\partial_u^\Gamma P)$ である。

P が Γ に関して任意の $u \in \Sigma^*$ により微分可能であるとす, P は Γ に関して任意に微分可能である。という。

命題2 各 $\sigma \in \Sigma$ に対し, $f|B_\sigma$ が 1対1であれば, 任意の P は Γ に関して任意に微分可能である。

定義4 P が Γ -正規述語であるとは, P が Γ に関して任意に微分可能であって, Γ に関する P の微分が有限個しかない。

いことという。

以後 σ は Σ の元, u, v, w は Σ^* の元を表わすものとする。

定理 1 P, Q は Γ -正規な述語とすると, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ は Γ -正規であり, 更にもし任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し $f|B_\sigma$ が onto であれば $\neg P$ も Γ -正規である。

[証明] $\sigma \in \Sigma$ とし σ は $\vee$ とすると,

$$\begin{aligned} \partial_\sigma^\Gamma(P \circ Q)(x) &\longleftrightarrow G_\sigma(x) \neq \emptyset \wedge (P \circ Q)(G_\sigma(x)) \\ &\longleftrightarrow (G_\sigma(x) \neq \emptyset \wedge P(G_\sigma(x))) \circ (G_\sigma(x) \neq \emptyset \wedge Q(G_\sigma(x))) \\ &\longleftrightarrow \partial_\sigma^\Gamma P(x) \circ \partial_\sigma^\Gamma Q(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \partial_\sigma^\Gamma(P \circ Q) = \partial_\sigma^\Gamma P \circ \partial_\sigma^\Gamma Q$$

よって任意の $u \in \Sigma^*$ に対し $\partial_u^\Gamma(P \circ Q) = \partial_u^\Gamma P \circ \partial_u^\Gamma Q$ であるから $P \circ Q$ の微分は有限個であり $P \circ Q$ は Γ -正規である。

次に, $f|B_\sigma$ が onto であれば, 任意の $x \in W$ に対し $G_\sigma(x) \neq \emptyset$ であるから, $\partial_\sigma^\Gamma P(x) \longleftrightarrow P(G_\sigma(x))$ であり,

$$\partial_\sigma^\Gamma(\neg P)(x) \longleftrightarrow \neg P(G_\sigma(x)) \longleftrightarrow \neg \partial_\sigma^\Gamma P(x)$$

即ちやはり任意の u に対して $\partial_u^\Gamma(\neg P) = \neg \partial_u^\Gamma P$ であるから

$\neg P$ の微分は有限個しかなく, $\neg P$ も Γ -正規である。

定義 5 P が Γ に関して任意に微分可能とする。 Σ^* 上の同値関係 R が Γ の下で P と整合である。とは、 R が任意の $u, v \in \Sigma^*$ に対し、

$$u R v \rightarrow (\forall x \in W-H) [\partial_u^\Gamma P(x) \equiv \partial_v^\Gamma P(x)]$$

をみたすことという。

この定義により直ちに次のような Myhill-Nerode の定理の拡張が成り立つ。

定理 2 P が Γ に関して任意に微分可能であるとき、 P が Γ -正規であるための必要十分条件は、 Σ^* 上の同値関係 R が、 P と整合、有限指数 (i.e. 同値類が有限個) かつ右不変 (i.e. $u R v \rightarrow (\forall w \in \Sigma^*) u w R v w$) なものが存在することである。

[証明] 必要性: P が Γ -正規であるとき、 Σ^* 上の同値関係 R を、 $u R v \leftrightarrow \partial_u^\Gamma P = \partial_v^\Gamma P$ で定めれば、 R は所定の条件をみたす。

十分性: P と整合、右不変かつ有限指数であるような Σ^* 上の同値関係 R が存在したとする。今、 $u, v \in \Sigma^*$ が $u R v$ をみたすとし、 $x \in W$ を任意にとる。 x に対し

$x \in B_{\sigma_1} \wedge f(x) \in B_{\sigma_2} \wedge \dots \wedge f^{k-1}(x) \in B_{\sigma_k} \wedge f^k(x) \in W-H$
 なる Σ^* の元 $z = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ が唯一存在する。($x \in W-H$ なら $k=0$, $z=\varepsilon$, $f^k(x)=x$ である。) この z に対し, 命題 1 の反復適用により

$$\alpha_u^\Gamma P(x) \leftrightarrow \alpha_{uz}^\Gamma (f^k(x)) \quad , \quad \alpha_v^\Gamma P(x) \leftrightarrow \alpha_{vz}^\Gamma (f^k(x))$$

が成り立ち, また R の右不変性により $uz \mathrel{R} vz$ である。

R が P と整合で, $f^k(x) \in W-H$ であるから,

$$\alpha_{uz}^\Gamma P(f^k(x)) \leftrightarrow \alpha_{vz}^\Gamma P(f^k(x))$$

よって, $\alpha_u^\Gamma P(x) \leftrightarrow \alpha_v^\Gamma P(x)$ を得る。即ち,

$uRv \rightarrow \alpha_u^\Gamma P = \alpha_v^\Gamma P$ が成り立つ。 R は有限指数であるから P の微分は有限個しかなく, P は Γ -正規である。

定義 6 P が Γ に関して任意に微分可能であるとす, P に Γ -随伴な Σ 上の言語 $\sqcup_P^\Gamma$ を次により定める。

$$\sqcup_P^\Gamma = \{ u \in \Sigma^* ; (\exists x \in W-H) \alpha_u^\Gamma P(x) \equiv \text{true} \}$$

この定義により Γ -正規言語と正規集合との対応についての定理が得られる。

定理 3 P が Γ -正規であれば, $\sqcup_P^\Gamma$ は Σ 上の正規集合である。また, P が Γ に関して任意に微分可能で, P の任意の

微分が $W-H$ 上で一定値をとるならば, この逆も成り立つ。

[証明] P が Γ に関して任意に微分可能とする。 Σ^* 上の任意の同値関係 R について, R が P と整合なれば $\mathcal{U}_P^\Gamma$ と整合 (i.e. $uRv \rightarrow (u \in \mathcal{U}_P^\Gamma \equiv v \in \mathcal{U}_P^\Gamma)$) であり, また Γ に関する P の任意の微分が $W-H$ 上で一定値をとるときは, 逆に, R が $\mathcal{U}_P^\Gamma$ と整合なれば P と整合であることと示せばよい。 R が P と整合なれば, $u, v \in \Sigma^*$ が uRv とすると, $(\forall x \in W-H) [\mathcal{Q}_u^\Gamma P(x) \leftrightarrow \mathcal{Q}_v^\Gamma P(x)]$, よって, $[(\exists x \in W-H) \mathcal{Q}_u^\Gamma P(x) \equiv \text{true}] \leftrightarrow [(\exists x \in W-H) \mathcal{Q}_v^\Gamma P(x) \equiv \text{true}]$, 即ち $u \in \mathcal{U}_P^\Gamma \leftrightarrow v \in \mathcal{U}_P^\Gamma$ が成り立つ。 R は $\mathcal{U}_P^\Gamma$ と整合である。 また, P の任意の微分が $W-H$ 上で一定値をとるときは, R が $\mathcal{U}_P^\Gamma$ と整合なれば, uRv とすると $\mathcal{Q}_u^\Gamma P(W-H) \equiv \text{true} \leftrightarrow \mathcal{Q}_v^\Gamma P(W-H) \equiv \text{true}$ により $(\forall x \in W-H) [\mathcal{Q}_u^\Gamma P(x) \leftrightarrow \mathcal{Q}_v^\Gamma P(x)]$ が成り立ち, R は P と整合である。

系 W が最小元 ω をもち, $H = W - \{\omega\}$ であれば, Γ に関して任意に微分可能な P に対し,

P が Γ -正規述語 $\leftrightarrow \mathcal{U}_P^\Gamma$ が正規集合。

さて, P が Γ に関して任意に微分可能とする。 P の任意の微分が $W-H$ 上で一定値をとる, ということが成り立たないとき, $W-H$ の有限分割 $\mathcal{C} = \{C_\delta; \delta \in \Delta\}$ (ただし, $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$) を仮定し, Γ に関する任意の微分が各 C_δ 上で一定値をとる, という条件を考へ, これを, P は $(\Gamma, \mathcal{C})$ に関して任意に微分可能, ということにし, このとき, $u \in \Sigma^*$, $\delta \in \Delta$ に対し $\alpha_u^\Gamma P(C_\delta)$ を $\alpha_{u\delta}^\Gamma P$ で表す。 $\alpha_{u\delta}^\Gamma P$ は定数である。 これにより,

定理 4 P が $(\Gamma, \mathcal{C})$ に関して任意に微分可能である

とき, P が Γ -正規であるための必要十分条件は

$$\forall_P^{\Gamma, \mathcal{C}} = \{u\delta; u \in \Sigma^*, \delta \in \Delta, \alpha_{u\delta}^\Gamma P = \text{true}\}$$

なる集合が 正規集合となることである。

[証明] W に新たな要素 $\perp$ を最小元としてつけ加えて $W' = W \cup \{\perp\}$ とし, P を W' 上の述語 P' に, $P'(\perp) \equiv \text{false}$ とし て拡張する。 $H' = W$, $B' = B \cup \mathcal{C}$ とおき, 関数 $f': H' \rightarrow W'$ を, $f'(x) = \text{if } x \in H \text{ then } f(x) \text{ else } \perp$ とし て定め, 系 $\Gamma' = (B', f')$ を考へる。 定理の条件から P' は Γ' に関して任意に微分可能である。 Γ' に関する P' の微分は

$$u \in \Sigma^*, \delta \in \Delta, v \in (\Sigma \cup \Delta)^+ \text{ に対し}$$

$$\begin{cases} \partial_u^{\Gamma'} P'(x) \leftrightarrow \text{if } x \in W \text{ then } \partial_u^{\Gamma} P(x) \text{ else false} \\ \partial_{u\delta}^{\Gamma'} P'(x) \leftrightarrow \text{if } x \in W \text{ then false else } \partial_{u\delta}^{\Gamma} P \\ \partial_{u\delta v}^{\Gamma'} P'(x) \leftrightarrow \text{false} \end{cases}$$

となり, P の微分が有限個でありかつそのとそに限り P' の微分は有限個, 即ち P' は Γ' -正規であり, そのための必要十分条件は定理3の系により $\mathcal{L}_{P'}^{\Gamma'}$ が正規集合となることである。 $w \in \mathcal{L}_{P'}^{\Gamma'} \leftrightarrow \partial_w^{\Gamma'} P'(\perp) \equiv \text{true} \leftrightarrow w = u\delta \wedge \partial_{u\delta}^{\Gamma} P = \text{true} \leftrightarrow w \in \mathcal{V}_P^{\Gamma, \mathbb{C}}$ により $\mathcal{V}_P^{\Gamma, \mathbb{C}} = \mathcal{L}_{P'}^{\Gamma'}$ であるから定理が得られる。

P が $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して任意に微分可能でありかつ Γ -正規であれば, P の有限個の微分 $Q_0, Q_1, \dots, Q_m$ について,

$$\begin{matrix} i=0 \\ \vdots \\ m \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} Q_i(x) \leftrightarrow \bigvee_{\sigma \in \Sigma} (x \in B\sigma \wedge \partial_{\sigma}^{\Gamma} Q_i(f(x))) \vee \bigvee_{\delta \in \Delta} (x \in C\delta \wedge \partial_{\delta}^{\Gamma} Q_i) \end{array} \right.$$

が成り立ち, $Q_0 = P$ とすると, これは P を計算するプログラムである。 $\{Q_0, \dots, Q_m\} \cup \{\text{true}, \text{false}\}$ を状態集合にとり, Q_0 を初期状態, true を受理状態にとり, 状態遷移関数 M を, $M(Q_i, \sigma) = \partial_{\sigma}^{\Gamma} Q_i$ ($\sigma \in \Sigma$), $M(Q_i, \delta) = \partial_{\delta}^{\Gamma} Q_i$ ($\delta \in \Delta$), $M(\text{true}, \xi) = \text{true}$ ($\xi \in \Sigma \cup \Delta$) として定めれば, この有限オートマ

トンは $V_P^{\Gamma, C}$ を受理する。

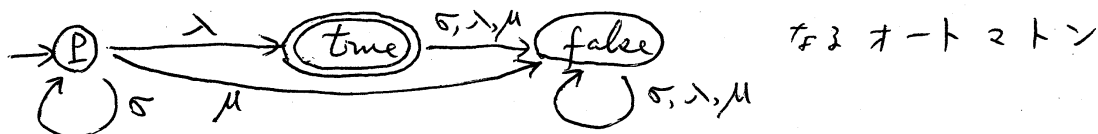
例 $W = \{a, b, c\}^*$ において, $x \leq y$ 且, 「 x は y の部分を何ヶ所か (0ヶ所でも可) 消去して得られる」 ことをもって定め, 半順序 $\leq$ の下での整礎集合 W を与える。

$H = W a W \cap W b W \cap W c W$, $\Sigma = \{\sigma\}$, $B_\sigma = H$,
 $C = \{C_\lambda, C_\mu\}$, $C_\lambda = \{\varepsilon\}$, $C_\mu = W - H - \{\varepsilon\}$ 且,
 関数 $f: H \rightarrow W$ 且, $f(x)$ は x における最左の a, b, c を
 そのまま消去したものとして定める。 $\Gamma = (B, f)$, $B = \{B_\sigma\}$
 且, $P(x) \leftrightarrow [x \text{ に含まれる } a, b, c \text{ の個数が } 0 \text{ 個と同じ}]$
 なる述語 P を与える。 P は (Γ, C) に関して任意に微分可
 能である。 ($\because \partial_\sigma^\Gamma P = P$, $\partial_\lambda^\Gamma P = \text{true}$, $\partial_\mu^\Gamma P = \text{false}$.)

P のプログラムは

$P(x) = \text{if } x \in B_\sigma \text{ then } P(f(x)) \text{ else if } x = \varepsilon \text{ then}$
 true else false

また, $V_P^{\Gamma, C} = \{u\lambda; u \in \Sigma^*\}$ であって, これは,



なるオートマトン

で受理される。

§2. 多引数の場合への拡張

$W, H, B, \Sigma, f, \mathbb{C}, \Delta$ は前節と同じとする。

定義7 $P \in W$ 上の n 引数述語とする。任意の $\vec{a} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n) \in W^{n-1}$ に対し,

$$Q_{\vec{a}}^{(k)}(x) \longleftrightarrow P(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

なる 1 引数述語 $Q_{\vec{a}}^{(k)}$ を得る。任意の $\vec{a} \in W^{n-1}$ に対し

$Q_{\vec{a}}^{(k)}$ が $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して任意に微分可能であるとき,

$P(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ は $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して引数 x_k について任意に微分という。このとき, $u \in \Sigma^*, \delta \in \Delta$ に対し

$$\partial_{u, x_k}^{\Gamma} P \quad \text{と} \quad \partial_{u\delta, x_k}^{\Gamma} P \quad \text{を,}$$

$$\partial_{u, x_k}^{\Gamma} P(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \longleftrightarrow \partial_u^{\Gamma} Q_{\vec{a}}^{(k)}(a_k)$$

$$\partial_{u\delta, x_k}^{\Gamma} P(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \longleftrightarrow \partial_{u\delta}^{\Gamma} Q_{\vec{a}}^{(k)}$$

により定める。

P が任意の引数について $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して任意に微分可能であることは, 単に, $(\Gamma, \mathbb{C})$ に関して任意に微分可能という。

定義8 W 上の述語の系 $\{P_1, \dots, P_m\}$ が $(\Gamma, \mathbb{C})$ の下で微分に関して閉じている, とは, 定数 (0 引数) でないどの P_i についても, P_i の ある 引数 x_k について任意の

$\in \Sigma \cup \Delta$ に対し $\alpha_{\sigma, x_{k_i}}^{\Gamma} P_i \in \{P_1, \dots, P_m\}$ とするこをいう。

定義 9 W 上の述語 P が $(\Gamma, \mathcal{C})$ -有理的であるとは、
 P を含む述語の系 $\{P_1, \dots, P_m\}$ が存在して、 $(\Gamma, \mathcal{C})$ の下で
 微分に関して閉じていることである。

$(\Gamma, \mathcal{C})$ -有理的な述語 P に関してはそれを計算する次の
 ようなプログラムが得られる。即ち、 $P = P_1$ として、

$$i=1 \left\{ \begin{array}{l} P_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \longleftrightarrow \bigvee_{\sigma \in \Sigma} (x_{k_i} \in B_{\sigma} \wedge \alpha_{\sigma, x_{k_i}}^{\Gamma} P_i(x_1, \dots, x_{k_i-1}, \\ f(x_{k_i}), x_{k_i+1}, \dots, x_{n_i})) \vee \bigvee_{\delta \in \Delta} (x_{k_i} \in \mathcal{C}_{\delta} \wedge \\ \alpha_{\delta, x_{k_i}}^{\Gamma} P_i(x_1, \dots, x_{k_i-1}, x_{k_i+1}, \dots, x_{n_i})) \end{array} \right.$$

m (ただし、 $\alpha_{\sigma, x_{k_i}}^{\Gamma} P_i$, $\alpha_{\delta, x_{k_i}}^{\Gamma} P_i$ は $\{P_1, \dots, P_m\}$ のうちのど
 れかに一致する。)

このプログラムはいわゆる多テープオートマトン [3] に
 他ならない。即ち $P_1, \dots, P_m$ を状態とみれば、状態 P_i は
 k_i 番目のテープを読む状態であり、このとき記号 $\sigma \in \Sigma \cup \Delta$
 を読むと状態は $\alpha_{\sigma, x_{k_i}}^{\Gamma} P_i$ に遷移する。 $\delta \in \Delta$ はテープの終
 端記号であり、これを読みこしたあとはこのテープは空にな
 る。 [3] により次の命題が明らかである。

命題3 $(\Gamma, \mathcal{C})$ -有理的な述語 φ すべてからなる族 $\mathcal{A}$, 否定に閉じては閉じていないが, 論理和や論理積に閉じては閉じていない。

また, 次の命題も明らかである。

命題4 述語 P が $(\Gamma, \mathcal{C})$ に閉じた有限個の微分 $P_1, \dots, P_m$ が存在して, $\{P, P_1, \dots, P_m\}$ が $(\Gamma, \mathcal{C})$ の下で微分に閉じて閉じていゝとす, かつそのとき限り P は $(\Gamma, \mathcal{C})$ -有理的である。

§3. 述語による微分

$\overline{W}, H, \Delta, \mathcal{C}$ は前節までの通りとする。

$f_1, f_2: H \rightarrow \overline{W}$ と, $f_i(x) \neq x$ ($i=1, 2$) なる2つの同教とする。 $F = (f_1, f_2)$ とかく。

定義10 P, Q を $\overline{W}$ 上の1引数述語とする。 Q が F に閉じて P により微分可能であるとは, 任意の $x \in \overline{W}$ に対し集合 $E_P(x) = \{y \in H; P(f_1(y)) \wedge f_2(y) = x\}$ の上で

Q の値が一様であることという。このとき, F に関する Q の

P による微分 $\partial_P^F Q$ は

$$\partial_P^F Q(x) \longleftrightarrow E_P(x) \neq \emptyset \wedge Q(E_P(x))$$

により定まる。

命題5 $Q, P_1, \dots, P_m \in W$ 上の1引数述語とし, 任意の $x \in W$ に対し $P_1(x) \vee \dots \vee P_m(x) \longleftrightarrow \text{true}$ であるとする。このとき, F に関して Q が各 P_i により微分可能であることは, 任意の $x \in H$ に対し,

$$Q(x) \longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^m (P_i(f_i(x)) \wedge \partial_{P_i}^F Q(f_i(x)))$$

[証明] $x \in H$ が $P_i(f_i(x))$ を満たすとする。このとき $x \in E_{P_i}(f_i(x))$ である。従って

$$Q(x) \longleftrightarrow Q(E_{P_i}(f_i(x))) \longleftrightarrow \partial_{P_i}^F Q(f_i(x))$$

を得て命題は明らかである。

以上で多引数の場合には拡張すれば次のようになる。

定義11 $P, Q \in W$ 上の n 引数述語とする。 Q が F に関する n 引数 x_k について P により微分可能であるとは, 任意の

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in W^n \text{ に対し}$$

集合 $E_p^{(k)}(\vec{x}) = \{ (x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) \in W^n ;$

$$y \in H \wedge P(x_1, \dots, x_{k-1}, f_1(y), x_{k+1}, \dots, x_n) \wedge f_2(y) = x_k \}$$

の上で Q の値が一定であることとする。このとき、 F に関する

Q の、 x_k についての P による微分 $\partial_{P, x_k}^F Q$ と、

$$\partial_{P, x_k}^F Q(\vec{x}) \longleftrightarrow Q(E_p^{(k)}(\vec{x}))$$

により定める。

命題 6 $Q, P_1, \dots, P_m \in W$ 上の n 引数述語とし、任意

の $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in W^n$ に対し、 ~~$x_k \in H$ ならば~~

$P_1(\vec{x}) \vee \dots \vee P_m(\vec{x})$ が真であるとする。このとき F に関し

て Q が $P_1, \dots, P_m$ により引数 x_k について微分可能であれば、

任意の $x_k \in H$ に対し

$$Q(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$\longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^m (P_i(x_1, \dots, x_{k-1}, f_1(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$\wedge \partial_{P_i, x_k}^F Q(x_1, \dots, x_{k-1}, f_2(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n))$$

定義 12 W 上の述語の系 $\{P_1, \dots, P_m\}$ が (F, C) の F

で微分に関して閉じている。とは、定数でないどの $P_i(x_1, \dots, x_n)$

(n 引数) についても、ある引数 x_k について次のことが成

立することとする。

(1) $P_1, \dots, P_m$ の中にある n 引数述語の系 $P_{i_1}, \dots, P_{i_s}$ が

(ただし $i=0, \dots, m$ と $j=1, \dots, \rho_i$ に対し $Q_j^{(i)} \in \mathcal{F}_{Q_j^{(i)}, x_{k_i}} P_i$ は $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ に属す.)

なるプログラムで計算できる。

さて, $\varphi \in \{f_1, f_2\}^*$ に対し部分関数 $\tilde{\varphi}: W \rightarrow W$ を,

$$\begin{cases} \varphi = \varepsilon & \text{なら} \quad \tilde{\varphi}(x) = x. \\ (f_i \varphi)^{\sim}(x) = \text{if } \tilde{\varphi}(x) \in H \text{ then } f_i(\tilde{\varphi}(x)) \text{ else undefined} \end{cases}$$

により帰納的に定め, $x \in W$ に対し $|x|$ を,

$$|x| = \max \{ \text{length}(\varphi) ; \tilde{\varphi}(x) \in W - H \} \quad \text{と置く.}$$

($\text{length}(\varphi)$ は φ の長さとしての長さを表す.)

$$\vec{x} \in W^n \quad \text{に対し} \quad |\vec{x}| = \max \{ |x_i| ; i=1, \dots, n \}$$

(ただし $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$) と定める。これにより, 上記のプログラムが次の命題を明かすのである。

命題 7 任意の $x \in W$ に対し, $x \in H?$, $x \in C_\delta$ ($\delta \in \Delta$)? の判定と, $f_1(x)$, $f_2(x)$ の計算が, いずれも x に依存して一定時間内で計算できるのは, (P, C) -有理性を引数還元語 P は, $\vec{x} \in W^n$ について $P(\vec{x})$ が $2^{a|\vec{x}|+b}$ 時間 (a, b は定数) 内で計算できる。

この3節は, 特に $W = \langle \text{LISPの} \delta \text{式の集合} \rangle$, $f_1 = \text{car}$,

$f_2 = \text{cdr}$, $H = \langle \text{アトムでないう} \rangle$ をモデルと念頭において一般般に述べたものであることをお断りしておく。このモデルの場合については [1] で具体的に述べられている。(ただし微分可能性の条件を考慮に入れたわけではないが。)

参考文献

- [1] 西澤輝泰 : '正規述語について — プログラム合成のための一概念', 1979~1980年文部省科研費総合研究(A)「知識の表現とこれを利用する情報検索システムの研究」(研究代表者 有川節夫) 報告書, 1981年3月
- [2] M. Nagai & T. Nishizawa : 'A System for Automatically Synthesizing Pure LISP Programs', Proceedings of The 6-th IBM Symposium on MFCS (Logical Aspect of Programs), May, 1981
- [3] P.C. Fischer & A.L. Rosenberg : 'Multitape One-way Nonwriting Automata', JCSS, vol. 2, pp. 88-101, 1968.