

解の一樣安定性と概周期解

東北大 理 中島文雄

§1. まえがき

概周期系における解の安定性と概周期性との関連について、多くの人々により研究されて来た。特に周期系では次の結果が知られている[5]、

周期系において、一樣安定かつ有界な解が存在すれば、概周期解が存在する。

以下、上の問題が概周期系でも成立するかという事を考えよう。先づ、上の結果は一般の概周期系では成立しない。即ち、ある次元の非線型系では、一樣安定かつ有界な解は存在するか、概周期解は存在しない。この事は§6で述べる。しかし、特殊な場合、例えば線型系や一次元の系では成立する。この事は§3～§5で述べる。以上の結果は、Favard[1]、[2]、Opial[3]の諸定理と密接に関連している。

§2. 記号と定義.

R^n を n 次元ユークリッド空間とし, $R^1 = R$ と表す. $x \in R^n$ に対し, $|x|$ でそのユークリッド norm を示す. A, B を位相空間とした時, $C(A, B)$ で A から B への連続関数の全体を表す.

次の微分方程式系を考える

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

ここで, $t \in R, x \in R^n$ かつ $f(t, x) \in C(R \times R^n; R^n)$ である.

(*) の解で, $(t_0, x_0) \in R \times R^n$ を通る任意の解を $x(t, t_0, x_0)$ と表し, $x(t, t_0, x_0)$ がすべての $t \in R$ で定義されている時,

$$\sup_{t \in R} |x(t, t_0, x_0)| < \infty \text{ ならば "有界 (on } R\text{)" },$$

$$\sup_{t \geq 0} |x(t, t_0, x_0)| < \infty \text{ ならば "有界 (} t \geq 0 \text{)" }$$

と表す.

(*) の解 $x(t)$ (defined on R) に対し, 2種類の安定性を定義し更に, それらが独立な概念であることを示す.

定義1. $X(t)$ が一様安定 (uniformly stable) であるとは,
 $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が定まり $|X(t_0) - X_0| < \delta$ for some
 $t_0 \in \mathbb{R}$ ならば

$$|X(t) - X(t, t_0, X_0)| < \varepsilon \quad \text{for } t \geq t_0.$$

定義2. $X(t)$ が Favard の意味で安定とは,
 $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が定まり, $|X(0) - X_0| < \delta$ ならば,

$$|X(t) - X(t, 0, X_0)| < \varepsilon \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

特に, 定義2において $X(t)$ が有界 (on $\mathbb{R}$) ならば, $X(t, 0, X_0)$ も有界 (on $\mathbb{R}$) となり, 有界な解は唯一つではない。以下, 簡単のため一様安定, Favardの意味での安定を, 各々 $u.s$, F -安定 と略記する。

$u.s$ と F -安定を意味しない例を述べる。

$$(**) \quad \frac{dx}{dt} = \alpha(t)x,$$

ここで, $x, t \in \mathbb{R}$ で $\alpha(t)$ は概周期関数で, 負値とする。すると $(**)$ の 0 -解は $u.s$ であるが, 有界 (on $\mathbb{R}$) な解は 0 -解, 唯一つしかないから, F -安定ではない。

次に, ρ -安定が u.s. を意味しない例を述べる。

Favard の結果 [1, p48] によれば, ある概周期関数 $\alpha(t)$ が存在して, これに対し (***) を考えると, その任意の解

$x(t, t_0, x_0)$ は有界 (on R) となる。従って, 0-解は ρ -安定である。他え, 次の事も成立する

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0.$$

従って, 0-解は u.s. ではない。

最後に, 概周期関数 $f(t)$ に対し, 関数族 $H(f)$ を定義する。
定義 3.

$$H(f) = \{ g(t); f(t+t_k) \rightarrow g(t) \text{ as } k \rightarrow \infty$$

uniformly on R for some sequence $\{t_k\}$.

$H(f)$ を f の closed hull と呼ぶ。

§ 3. 線型概周期系.

我々の目的とする結果は定理 3.1 である。実は, その定理の仮定は Favard の定理の仮定の特殊な場合となっていることを示す。この事により, u.s. は後者の定理の仮定の具体例として促される。

次の線型概周期系を考える

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

ここで $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A(t)$ は $n \times n$ 行列, $f(t)$ は n -vector で, その成分は概周期関数とする。

定理 3.1. 系 (3.1) が u.s. な有界な解 ($t \geq 0$) を持てば,
系 (3.1) は概周期解を持ち, その module は $A(t)$ と $f(t)$ の
module の和に含まれる.

Farvard は次の結果を示している [1, p59].

定理 3.2. $A(t)$ の closed hull $H(A)$ の任意の元 $B(t)$ に
対し, 次の系を考える

$$(3.2) \quad \frac{dx}{dt} = B(t)x.$$

系 (3.2) の有界な解 (on $\mathbb{R}$) $x(t)$ は 0-解でないならば

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| \neq 0$$

と仮定する. このとき, 系 (3.1) が有界な解 ($t \geq 0$) を持てば,
系 (3.1) は概周期解を持ち, その module は $A(t)$ と $f(t)$ の module
の和に含まれる.

以下、定理 3.1 の仮定は定理 3.2 の仮定を意味することを示す。系 (3.2) の有界な解 (mR) で一次独立なものの次元を $m (\leq n)$ とする。その一組みを $\{x_j(t)\}_{j=1}^m$ で表す。 $B(t)$ の概周期性より数列 $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して、 $k \rightarrow \infty$ の時、

$$t_k \rightarrow -\infty, \quad \text{かつ} \quad B(t+t_k) \rightarrow B(t)$$

uniformly on R

となる。他方、 $x_j(t)$ の有界性から $\{x_j(t+t_k)\}_{k=1}^\infty$ は R の任意の compact set 上で一様収束すると仮定して良い。その極限を、各々 $y_j(t)$ とすると、 $y_j(t)$ は系 (3.2) の有界な解となる。 $\{y_j(t)\}_{j=1}^m$ が一次独立であることを示す。

ある定数 $\{c_j\}_{j=1}^m$ に対して

$$\sum_{j=1}^m c_j y_j(0) = 0$$

とする。

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j(t_k) \rightarrow 0 \quad \text{as } t_k \rightarrow -\infty$$

となる。今、 $\sum_{j=1}^m c_j x_j(t)$ は系 (3.2) の解であり、その 0-解

も、やはり U.S. であるので

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j(t) \equiv 0.$$

すると $\{x_j(t)\}_{j=1}^m$ の一次独立性より

$$c_1 = \dots = c_m = 0.$$

従って、 $\{y_j(t)\}_{j=1}^m$ の一次独立性が示された。故に、系 (3.2) の有界な解 (on $\mathbb{R}$) $x(t)$ は

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j(t) \quad \text{for some constants } \{\lambda_j\}$$

と表わされる。今、 $x(0) \neq 0$ とすると、

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j(t_k) \rightarrow x(0) \quad \text{as } t_k \rightarrow -\infty$$

であるから、ある正数 $\varepsilon > 0$ が取れて、十分大なる k_0 に対し

$$\left| \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j(t_{k_0}) \right| \geq \varepsilon > 0.$$

系(3.2)の0-解は u.s.であるから, ある $\delta' > 0$ が存在して

$$\left| \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j(t) \right| \geq \delta' > 0 \quad \text{for } t \leq t_k.$$

故に, $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j(t) \right| = \lim_{t_k \rightarrow -\infty} \left| \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j(t + t_k) \right| \geq \delta'.$$

従って

$$|x(t)| \geq \delta' \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

これで, 定理3.2の仮定が導かれた。

§ 4. 一階単独の概周期系.

次の一階単独の概周期系を考える

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (n=1),$$

ここで $t, x \in \mathbb{R}$, $f(t, x) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ で, $f(t, x)$ は $x \in \mathbb{R}$ に対し一様に t の概周期関数であり, 次の意味でリプシュッツ条件を満たすとする, 即ち, $\forall M > 0$ に対し, 定数 $L = L(M) > 0$ が存在して

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad \text{for } t \in \mathbb{R}, |x|, |y| \leq M.$$

である. 系 (4.1) における概周期解の存在について次の結果が知られている。

定理 4.1, [3]. 系 (4.1) において $f(t, x)$ は x について 単調減少 (あるいは増加) とする。このとき系 (4.1) が有界な解 ($\text{on } \mathbb{R}$) を持てば, それは概周期解であり, その module は $f(t, x)$ の module に含まれる。

定理 4.2, [2]. 系 (4.1) において有界な解 (on $\mathbb{R}$) $\chi(t)$ が存在して, $\chi(t)$ は γ -安定で, 更に $\chi(0)$ は [注, 4.1] の意味で単調な点とする。このとき, $\chi(t)$ は概周期解であり, その module は $f(t, \chi)$ の module に含まれる。

[注, 4.1]

(i) $f(t, \chi)$ が χ について単調減少とは, $\chi \geq \gamma$ ならば

$$f(t, \chi) \leq f(t, \gamma) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}$$

となることである。単調増加も同様に定義する。

(ii) $\chi(0)$ が単調な点であるとは, $\forall \chi_0 \in \mathbb{R}$ に対し

$$M(\chi_0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \chi(t, 0, \chi_0)$$

$$m(\chi_0) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \chi(t, 0, \chi_0)$$

とすると, $\chi_0 < \chi(0) < \gamma_0$ ならば

$$M(\chi_0) < M(\chi(0)) < M(\gamma_0)$$

かつ

$$m(\chi_0) < m(\chi(0)) < m(\gamma_0) .$$

[注, 4.2] 定理 4.1 の仮定は特殊な場合を除いて定理 4.2 の仮定を意味する。特殊な場合とは, 系 (4.1) が有界な解 $(\in R)$ を唯一つしか持たない場合である。その場合, 概周期解の存在は明らかである。

我々は定理 4.1, 4.2 を次の定理に統一できる。

定理 4.3. もし系 (4.1) が u.s な有界な解 $(\in R)$ を持てば, それは概周期解であり, その module は $f(t, x)$ の module に含まれる。

定理 4.3 の略証は次のように述べる。定理 4.1, 4.2, 4.3 の関連について述べる。先づ, 定理 4.1 の仮定から定理 4.3 の仮定が導かれることは明らかである ($f(t, x)$ が単調増加の時は, 時刻 t を負の向きに考えれば良い)。次に定理 4.2 の仮定が定理 4.3 の仮定を意味することを示す。

定理 4.4. 定理 4.2 における解 $x(t)$ は u.s である。

証明には次の補題が必要である。

補題. 定理4.2の解 $x(t)$ に対し次の事が成立する

4
 $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して, ある $t_0 \in \mathbb{R}$ で
 $|x(t_0) - x_0| < \delta$ ならば

$$(4.2) \quad |x(0) - x(0, t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

補題の証明を行う。 $x(t_0) > x_0$ の場合を示す。 $x(t_0) < x_0$ の場合も同様である。 Favard は次の事を示している [2, p93]

有界な解 $y(t) (\neq x(t))$ に対し

$$(4.3) \quad \inf_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)| \neq 0.$$

$x(t)$ の不-安定性より, $x(0)$ の十分近くに $x_1 < x(0)$ を取ると $x(t, 0, x_1)$ は有界 ($\text{on } \mathbb{R}$) で, 更に (4.3) より定数 $\gamma > 0$ が存在して

$$x(t, 0, x_1) + \gamma < x(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

$\delta(\varepsilon) < \gamma$ と取ると, ある $t_0 \in \mathbb{R}$ で

$$0 < \chi(t_0) - \chi_0 < \delta'$$

ならば, $\chi(t, t_0, \chi_0)$ は $\forall t \in \mathbb{R}$ で定義されて

$$\chi(t, 0, \chi_1) < \chi(t, t_0, \chi_0) < \chi(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

今, 補題が成立しないとすると, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\forall$ 自然数 k に対し, $t_k, \chi_k \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(4.4) \quad 0 < \chi(t_k) - \chi_k < \frac{1}{k}$$

かつ

$$\varepsilon_0 < \chi(0) - \chi(0, t_k, \chi_k).$$

系(4.1)の解 $y(t)$ で, $y(0) = \chi(0) - \frac{\varepsilon_0}{2}$ なるものを考えると, (4.3)より, $\varepsilon_1 > 0$ が取れて

$$y(t) < \chi(t) - \varepsilon_1 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}$$

かつ,

$$\chi(0, t_k, \chi_k) < y(0)$$

であるから

$$\chi(t, t_k, \chi_k) < \gamma(t) \quad \text{on } \mathbb{R}.$$

従って,

$$\chi(t, t_k, \chi_k) < \chi(t) - \varepsilon_1 \quad \text{on } \mathbb{R}.$$

$t = t_k$ とおくと,

$$\varepsilon_1 < \chi(t_k) - \chi_k.$$

(4.4) より $\frac{1}{k} > \varepsilon_1$ となり, k は任意であるから矛盾。

以上で補題の証明は終る。次に定理 4.4 の証明を行う。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta(\varepsilon)$ を補題に現れた定数, $\delta(\varepsilon)$ を η -安定の定数とする。 $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta_0(\varepsilon) = \delta(\delta(\varepsilon))$ と置くと, ある $t_0 \in \mathbb{R}$ で, $|\chi(t_0) - \chi_0| < \delta_0(\varepsilon)$ ならば補題より

$$|\chi(0) - \chi(0, t_0, \chi_0)| < \delta(\varepsilon).$$

すると, Φ -安定性より

$$|\chi(t) - \chi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \text{on } R.$$

従って, $\chi(t)$ は u.s. である。証明を終る。

§5. 定理4.3の証明.

定理4.3の証明を述べる。証明の前半は本質的に [2] あるいは [3] の議論に依る。

系(4.1)において、与えられた u.s. な有界な解 (on R) を $g(t)$ とする。 $\forall g \in H(\Phi)$ に対し次の系を考える

$$(5.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

(5.1)の解のある集合 $\mathcal{F}(g)$ を定義する,

$\mathcal{F}(g) \ni \chi(t)$ とは, ある数列 $\{t_k\}$ が存在して
 $k \rightarrow +\infty$ の時,

$$f(t+t_k, x) \rightarrow g(t, x) \quad \text{uniformly on } R \times [a, b]$$

$\varphi(t+t_k) \rightarrow \chi(t)$ uniformly on any compact set in $\mathbb{R}$.

ここで

$$a = \inf_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t), \quad b = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t).$$

すると $\mathcal{F}(g)$ は広義一様収束の意味で compact となり, その元はすべて U.S となる。

$\mathcal{F}(g)$ の minimal solution を定義する,

$$h = \inf \{ M(\chi(0)) - m(\chi(0)); \chi(t) \in \mathcal{F}(g) \}$$

と置く。ここで $M(\chi(0)), m(\chi(0))$ は [注, 4.1] の記号である。今、相空間は一次元であり, かつ $\mathcal{F}(g)$ は compact であるから, ある $\chi(t) \in \mathcal{F}(g)$ が存在して

$$M(\chi(0)) - m(\chi(0)) = h$$

となる。このような $\chi(t)$ の中で $m(\chi(0))$ が最小なものを $\mathcal{F}(g)$ の minimal solution と呼ぶ。 $\mathcal{F}(g)$ の元は U.S であるから minimal solution は唯一つしか存在しない。それ故に、

次の事が知られる。 $\mathcal{F}(f)$ の minimal solution $\phi(t)$ に対し、
次の条件を満たす任意の数列 $\{t_k\}$ を考える

$k \rightarrow +\infty$ の時,

$$f(t+t_k, x) \rightarrow g(t, x) \quad \text{uniformly on } \mathbb{R} \times [a, b]$$

かつ

$$\phi(t+t_k) \rightarrow \phi^*(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } \mathbb{R}.$$

すると、 $\phi^*(t)$ は $\mathcal{F}(g)$ の minimal solution となる。

これは $\{\phi(t+t_k)\}$ の正規性を意味する。従って $\phi(t)$ の概周期性が示されたことになる。

最後に $\varphi(t) \equiv \phi(t)$ を示す。仮りに $\varphi(0) > \phi(0)$ とする。
($\phi(0) > \varphi(0)$ の場合も同様である)。 $\varphi(t)$ の u.s より $\varepsilon > 0$ が存在して

$$(5.2) \quad \varphi(t) > \phi(t) + \varepsilon \quad \text{for } t \leq 0.$$

他方、 $\phi(t) \in \mathcal{F}(f)$ より

$$a \leq \phi(t) \leq b \quad \text{on } \mathbb{R}.$$

$$\delta = \inf_{t \in \mathbb{R}} (\varphi(t) - \psi(t)) \geq 0$$

と置く、

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) \geq \delta + \inf_{t \in \mathbb{R}} \psi(t).$$

従って、 $a \geq \delta + a$ となり、 $\delta = 0$ が結論される。故に、

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0$$

であるが、(5.2)より

$$\inf_{t \geq 0} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0.$$

$\varphi(t)$ の u.s より

$$(5.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0.$$

今、数列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ とある関数 $\varphi^*(t)$ が取れて、 $k \rightarrow +\infty$ の時

$$s_k \rightarrow -\infty,$$

$$f(t+s_k, x) \rightarrow f(t, x) \quad \text{uniformly on } \mathbb{R} \times [a, b].$$

$$\psi(t+s_k) \rightarrow \psi(t) \quad \text{uniformly on } \mathbb{R}$$

$$\varphi(t+s_k) \rightarrow \varphi^*(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } \mathbb{R}.$$

すると $\varphi^*(t) \in \mathcal{F}(f)$ となり, (5.2) より

$$(5.4) \quad \varphi^*(t) \geq \psi(t) + \varepsilon \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

(5.3) より

$$(5.5) \quad \varphi^*(t) > \varphi(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

(5.5) より, ある $\delta' > 0$ が取れて

$$(5.6) \quad \varphi^*(t) \geq \varphi(t) + \delta' \quad \text{for } t \leq 0.$$

他に,

$$b = \sup_{t \leq 0} \varphi(t)$$

が

$$b = \sup_{t > 0} \varphi(t)$$

であるか

前者の場合は、(5.6)に矛盾する。後の場合は(5.5)より

$$b = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \varphi(t)$$

となり、(5.3)より

$$b = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \psi(t) .$$

すると(5.4)より

$$b \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi^*(t) \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} \psi(t) + \varepsilon = b + \varepsilon .$$

これは $\varepsilon > 0$ に矛盾する。以上で $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ が証明された。

[注, 5.1] 定理 4.3 の仮定において解の一般安定性が
落せないことは、Opial の例 [4] より知られる。

§ 6. 概周期解を持たない概周期系。

次の概周期系を考える。

$$(6.1) \begin{cases} (1) \cdots \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha(t)y \\ \frac{dy}{dt} = \alpha(t)x \end{cases} \\ (2) \cdots \frac{dz}{dt} = \begin{cases} 1 - (x^2 + y^2) & \text{for } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{for } x^2 + y^2 > 1, \end{cases} \end{cases}$$

ここで

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

次の事が成立する。系(6.1)はu.sな有界な解(on R)は持つが概周期解は持たない。

先づ, (1)は0-解以外に概周期解を持たないことを示す。
系(1)において, $x + iy = w \in \mathbb{C}$ とおくと(1)は次の方程式
と同値である

$$\frac{dw}{dt} = i\alpha(t)w \quad (i = \sqrt{-1})$$

この基本解は

$$(6.2) \quad W(t) = \exp \left(i \int_0^t \alpha(s) ds \right).$$

Farard は次の事を示している。

(6.2) が概周期的である必要十分条件は

$$\int_0^t \alpha(s) ds = ct + \text{概周期関数}$$

の形に表現されることである。ここで c は $\alpha(t)$ の平均値である。

今の場合、 $\alpha(t)$ の平均値は 0 であり ($c=0$)、その積分は非有界であるから上の事は成立しない。即ち (6.2) は概周期的ではない。従って (イ) は 0-解以外に概周期解を持たない。

次に (6.1) は概周期解を持たない事を示す。もし (6.1) が概周期解 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ を持てば、 $\{x(t), y(t)\}$ は (イ) の概周期解となるから $x(t) = y(t) = 0$ on R となる。すると (12) より

$$\frac{dz}{dt} = 1$$

となり、 $z(t)$ の概周期性 (実は有界性) に矛盾する。

最後に, (6.1)の解 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ で,

$$x^2(0) + y^2(0) > 1$$

なる解を考える。するとこの解に対し (6.1) は次の系となる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha(t)y \\ \frac{dy}{dt} = \alpha(t)x \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

従って, $\{x(t), y(t), z(t)\}$ は有界 ($\text{on } R$) で, その十分近くから出る解に対し u.s. である。

参考文献

- [1]. J. Favard, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques, Act. Math., 51 (1928), 31-81.
- [2]. ———, Sur les équations différentielles scalaires presque périodiques, Journ. de Math., 1964, (87-97).
- [3]. Z. Opial, Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier et du second ordre, Ann. Polon. Math., 7 (1959), 51-61.
- [4]. ———, Sur une équation différentielle presque-périodique sans solution presque-périodique, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 9 (1961), 673-676.
- [5]. T. Yoshizawa, Some remarks on the existence and stability of almost periodic solutions, Stud. Appl. Math. 5.