

s -cobordism theorems for S^1 -manifolds

阪大理 川久保勝夫 (Katsuo Kawakubo)

s -cobordism theorem は、微分位相幾何学において、基本定理の一つであると言った方がよい。コンパクト・リー群 G が作用する場合への拡張は [2] で述べられた。この拡張された G - s -cobordism theorem においては、各部分群 H の不動点集合の次元の間に、ギャップがあるという仮定のもとに示された。

一方そのギャップの仮定を取らなくとも、反例が存在することから、[10]。

この talk ではコンパクト・リー群として S^1 を考え、作用の仕方として“半自由” (semi-free) と仮定すると、次元のギャップなしに s -cobordism theorem が成り立つことを示す。詳しい証明は [15] を参照。

定理を述べるために準備をしよう。

W をコンパクトな S^1 多様体とする。 W の境界を ∂W と書き、二つの閉多様体 X, Y の disjoint union

$$\partial W = X \amalg Y$$

とする。

今 $\hookrightarrow$ の包含写像

$$i_X : X \hookrightarrow W, \quad i_Y : Y \hookrightarrow W$$

が S^1 -homotopy equivalence があるとすると、このとき、triple

$$(W; X, Y)$$

のことを S^1 -h-cobordism と呼ぶことにしよう。

このとき、松本-塩田の提案による [1], Illman [5] の意味の equivariant Whitehead torsion

$$\tau_{S^1}(W, X) \text{ が定義される。}$$

この様に定義された torsion が消える時、つまり

$$\tau_{S^1}(W, X) = 0$$

のとき、triple $(W; X, Y)$ を S^1 -s-cobordism と呼ぶことにする。

さて、 S^1 -action が 半自由 (semi-free) とは各点の アイソトロピー-群が、単位群 $\{e\}$ か又は全体 S^1 になるときに言う。

ここに アイソトロピー-群 G_x ($x \in W$) とは、一般に

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

で与えられる G の部分群のことを言う。(今は $G = S^1$)

準備ができたので定理を述べよう。

Theorem. $(W; X, Y)$ を S' - S -cobordism とする。 W 上の作用は半自由で、不動点集合の各 component の次元が 5 以上であるとすると、そのとき

$$W \cong X \times I$$

が成り立つ。特に

$$X \cong Y$$

が成り立つ。

ここで $\cong$ は S' -diffeomorphism を表わし、 I は interval $[0, 1]$ 上の trivial action をもつものである。

§1 証明の idea

詳しい証明を予える前に、証明の idea を述べよう。

そのためにまず G - S -cobordism theorem の証明の idea を振り返ってみておくことにする。

まず G -manifold W のうまい分解を求め、この分解に従って inductive に証明するということである。

そのとき、不動点集合の次元に関するギャップの仮定は 2つの理由で用いられる。

その一つは、 G -deformation retractions の性質がこの分解の各々に遺伝することを示すためであり、もう一つは同変 Whitehead torsion の消滅という性質が、やはりこの分解の各々に遺伝することを示すためである。

このギャップの仮定はテクニカルに必要なだけでなく、もしこの仮定がないと G -s-cobordism theorem の反例が構成される。そこでは G -deformation retract の遺伝性が否定されることから導かれる。

今我々が考えている場合は、semi-free S^1 -manifold の不動点集合に沿って blow up することによって、上で述べた二つの性質が遺伝することを示す。

つまり codim 2 の問題は semi-free S^1 -manifold の場合は blow up することによって解消されるのである。

§2 軌道空間の deformation retractions の excision.

G 空間 X に対し、 X/G を軌道空間、 X^G を不動点集合を表わすことにする。

$(W; X, Y)$ を S^1 - h -cobordism と W は semi-free S^1 -manifold であるとする。

この S^1 -manifold W の不動点集合を

$$W^{S^1} = W_a^{S^1} \cup W_b^{S^1}$$

というように分解する。但しここで $W_a^{S^1}$ (resp. $W_b^{S^1}$) は codim が 2 より大きい (resp. 丁度 2) の不動点集合のコンポーネントの和集合である。

その時、次の様に記号をおく、

$$X_a^{S^1} = W_a^{S^1} \cap X$$

$$X_b^{S^1} = W_b^{S^1} \cap X.$$

明らかに $X_a^{S^1}$ (resp. $X_b^{S^1}$) は $W_a^{S^1}$ (resp. $W_b^{S^1}$) の deformation retract である。

$W_a^{S^1}$ の W における 2 重バントルを $\mathcal{U}_a$ と書くことにし、 $\mathcal{U}_a$ と $W_a^{S^1}$ の W における S^1 -invariant tubular neighborhood とを同一視することにする。

今 $\mathcal{U}_a$ 上の S^1 -invariant Riemannian metric $\langle, \rangle$ を固定する。この metric に関して、

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \text{for } v \in \mathcal{U}_a$$

とおき、

$$\mathcal{U}_a(1) = \{ v \in \mathcal{U}_a \mid \|v\| \leq 1 \},$$

$$S\mathcal{U}_a(1) = \{v \in \mathcal{U}_a \mid \|v\| = 1\},$$

$$\dot{\mathcal{U}}_a(1) = \{v \in \mathcal{U}_a \mid \|v\| < 1\}$$

とおく。このとき、上の同一視のもとに、

$$W_1 = W - \dot{\mathcal{U}}_a(1)$$

$$X_1 = W_1 \cap X$$

とおく。

W_1 は コンパクト S^1 -manifold の 角 をとち、

X_1 は コンパクト S^1 -manifold の 境界 をとつ。

その時、我々は次の lemma を得る。

Lemma X_1/S^1 は W_1/S^1 の deformation retract である。

証明の outline. $\mathcal{U}_a$ は semi-free S^1 -action の 不動点集合の法バンドルであまから、 $\mathcal{U}_a$ は S^1 の作用が スカラー積になるような複素ベクトル・バンドルの構造が入る。

$W_{a\mu}^{S^1}$ は $W_a^{S^1}$ の 各成分を表わし、

$$\mathcal{U}_{a\mu} = \mathcal{U}_a \mid W_{a\mu}^{S^1}$$

$$X_{a\mu}^{S^1} = W_{a\mu}^{S^1} \cap X$$

とおく。

$\mathcal{L}_{a\mu}$ に同伴する複素射影空間バンドルを

$$\pi : \mathbb{CP}(\mathcal{L}_{a\mu}) \longrightarrow W_{a\mu}^{S^1}$$

とする。このバンドルのファイバーは複素射影空間 $\mathbb{CP}^m$

($m \geq 1$) であり、 $\mathbb{CP}(\mathcal{L}_{a\mu})$ は自然に軌道空間

$S\mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1$ と同一視される。

他方、次のファイバー・バンドル

$$\pi : \mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1 \longrightarrow W_{a\mu}^{S^1}$$

を考えよ。このバンドルのファイバーは複素射影空間

$\mathbb{CP}^m$ 上の cone $C\mathbb{CP}^m$ に他ならない。

この二つのバンドルより、ホモトピー完全列と inclusions より誘導される準同型写像からなる次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{CP}^m) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{CP}(\mathcal{L}_{a\mu})) & \longrightarrow & \pi_1(W_{a\mu}^{S^1}) & \longrightarrow \pi_0(\mathbb{CP}^m) \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \downarrow \\ \longrightarrow & \pi_1(C\mathbb{CP}^m) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1) & \longrightarrow & \pi_1(W_{a\mu}^{S^1}) & \longrightarrow \pi_0(C\mathbb{CP}^m) \longrightarrow \\ & & & & & & \\ & \pi_1(\mathbb{CP}^m) \cong \pi_0(\mathbb{CP}^m) \cong \pi_1(C\mathbb{CP}^m) \cong \pi_0(C\mathbb{CP}^m) \cong \{1\} & & & & & \end{array}$$

とあるから、次の同型が成り立つ：

$$\pi_1(\mathbb{CP}(\mathcal{L}_{a\mu})) \cong \pi_1(\mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1) \cong \pi_1(W_{a\mu}^{S^1}).$$

さて次の分解を考えよう。

$$W/S^1 = (W - \mathcal{L}_{a\mu}(1))/S^1 \cup \mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1.$$

この分解の共通部分は

$$(W - \mathcal{L}_{a\mu}(1))/S^1 \cap \mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1 = S\mathcal{L}_{a\mu}(1)/S^1 = \mathbb{CP}(\mathcal{L}_{a\mu})$$

であるから, van Kampen の定理によ, 2,

$$\pi_1(W/S^1) \cong \pi_1((W - \dot{J}_{a_\mu(1)})/S^1)$$

が導かれる。

この論法を続けよことによ, 2

$$\pi_1(W/S^1) \cong \pi_1(W_1/S^1)$$

が結論づけられる。

全く同様に

$$\pi_1(X/S^1) \cong \pi_1(X_1/S^1)$$

が成り立つ。

仮定より X は W と S^1 -homotopy equivalent であるから,

$$\pi_1(X/S^1) \cong \pi_1(W/S^1)$$

である。

以上の結果を全部まとめると,

$$\pi_1(X_1/S^1) \cong \pi_1(W_1/S^1)$$

が示される。

さ, 次は W/S^1 上の local coefficients の system $\mathcal{L}$ を任意に与えよう。この時, 次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_*(X_1/S^1; \mathcal{L}) & \rightarrow & H_*(X/S^1; \mathcal{L}) & \rightarrow & H_*(X/S^1, X_1/S^1; \mathcal{L}) & \rightarrow \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_3 & \\ \rightarrow H_*(W_1/S^1; \mathcal{L}) & \rightarrow & H_*(W/S^1; \mathcal{L}) & \rightarrow & H_*(W/S^1, W_1/S^1; \mathcal{L}) & \rightarrow \end{array}$$

水平の列は完全であり、仮定より γ_2 は同型である。

この excision 同型定理と five lemma を使って γ_3 が同型であることが示される。

従って再び five lemma によって γ_1 も同型であることが分る。

以上の結果から Whitehead [14] の定理を用いると、包含写像

$$X_1/S' \rightarrow W_1/S'$$

は homotopy equivalent であることが分る。従って

X_1/S' は W_1/S' の deformation retract である。

以上で Lemma の証明の outline は終る。

§3 Codim 2 の不動点集合に沿う blowing up

$W_b^{S'}$ の W_1 における法バネールを $\mathcal{L}_b$ としよ。

S' 不変な Riemannian metric を適当にとり、 $\mathcal{L}_b(1)$, $S\mathcal{L}_b(1)$, $\mathring{\mathcal{L}}_b(1)$ 等を以下の如く定義する。そして

$$W_2 = W_1 - \mathring{\mathcal{L}}_b(1)$$

$$X_2 = W_2 \cap X_1$$

とおく。 W_2 (resp X_2) はコンパクトな S' -manifold の角 (resp. 境界) をもつ。

この時、次が成り立つ。

Lemma X_2 は W_2 の S^1 -deformation retract である。

証明の outline.

まず第一に $W_b^{S^1}$ に沿って W_1 を blow up する。

S^1 -manifold W_3 を

$$W_3 = W_2 \cup (S\mathcal{U}_b(1) \times I)$$

により、 $\mathcal{U}$ を定義する。この $\mathcal{U}$ の同一視により、 $\mathcal{U}$ を張り合せる。

$$x \in S\mathcal{U}_b(1) \subset W_2 \iff (x, 1) \in S\mathcal{U}_b(1) \times I$$

W_3 上の free S^1 -action は W_2 と $S\mathcal{U}_b(1)$ 上の action から自然に導入される。従って、 $\mathcal{U}$ 軌道空間 W_3/S^1 は自然に smooth structure を持つ。

このとき S^1 -写像

$$p: W_3 = W_2 \cup (S\mathcal{U}_b(1) \times I) \longrightarrow W_1 = W_2 \cup \mathcal{U}_b(1)$$

を

$$p|_{W_2} = \text{id}|_{W_2}$$

$$p(x, t) = tx \quad \text{for } x \in S\mathcal{U}_b(1), t \in I$$

により、 $\mathcal{U}$ を定義する。

$W_b^{S^1}$ の W_1 における codim は 2 であるから、又

S^1 は $W_1 - W_0^{S^1}$ 上に free に act するから、
軌道空間 W_1/S^1 は 角をもち smooth manifold
の構造をもち、上の写像 p は diffeomorphism

$$p/S^1 : W_3/S^1 \rightarrow W_1/S^1$$

を誘導する。

明らかに S^1 -diffeomorphism

$$W_2 \cong W_3$$

が成り立ち、次の diffeomorphisms を得る。

$$W_2/S^1 \cong W_3/S^1 \cong W_1/S^1$$

全く同様に diffeomorphism

$$X_2/S^1 \cong X_1/S^1$$

が存在する。

故に前節の Lemma を用いると、 X_2/S^1 は
 W_2/S^1 の deformation retract であることが分る。

そこで、次の principal S^1 -bundles と bundle map
を考へよう。

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \longrightarrow & W_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2/S^1 & \longrightarrow & W_2/S^1 \end{array}$$

ファイバー・バンドルのホモトピー性質より、 X_2 は
 W_2 の S^1 -deformation retract であることが分る。

§4 同変 Whitehead torsions の消滅の遺伝性

G - S -cobordism theorems の証明において、同変 Whitehead torsions の消滅が遺伝することを次のギャップを用いて示した。しかし今はその論法は使えない。のど、全く違う方法を示さなければならぬ。

Lemma $\tau_{S'}(W, X) = 0$ ならば
 $\tau(W/S', X/S') = 0$ が成立立つ。ここで
 $\tau(\quad, \quad)$ は 古典的 Whitehead torsion を表す。

証明の idea. 同変 Whitehead torsion の定義から
 $\tau_{S'}(W, X) = 0$ は
 $\tau(W/S', X/S') = 0$
 を意味する。

ここで Whitehead torsions の sum theorem [3],
 ファイバー・バンドルの全空間の Whitehead torsions [1],
 基本群の同型写像は Whitehead group の同型を導く,
 等の性質を用いることにより Lemma の証明が
 与えられる。

詳しくは [15] を見よ。

§ 5 semi-free S^1 -manifolds の s -cobordism theorem.

$(W; X, Y)$ を S^1 - s -cobordism とする. $\therefore$ W 上の S^1 -action は semi-free とする. 又不動点集合 W^{S^1} の各成分の次元は 5 より大きいとする.

仮定 $\tau_{S^1}(W; X) = 0$ は, 同様に

$$\tau(W^{S^1}, X^{S^1}) = 0$$

を意味する. 古典的 s -cobordism theorem を適用すると, diffeomorphism

$$W^{S^1} \cong X^{S^1} \times I \quad \text{rel } X^{S^1}$$

を得る.

S^1 アクター・バンドルのホモトピー-性質より,

S^1 アクター・バンドルの同型

$$\mathcal{U}_a \cong (\mathcal{U}_a | X_a^{S^1}) \times I$$

$$\mathcal{U}_b \cong (\mathcal{U}_b | X_b^{S^1}) \times I$$

が等される. 従って, S^1 -diffeomorphisms

$$(*) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_a(1) \cong (\mathcal{U}_a | X_a^{S^1})(1) \times I \\ \mathcal{U}_b(1) \cong (\mathcal{U}_b | X_b^{S^1})(1) \times I \\ S\mathcal{U}_a(1) \cong S(\mathcal{U}_a | X_a^{S^1})(1) \times I \\ S\mathcal{U}_b(1) \cong S(\mathcal{U}_b | X_b^{S^1})(1) \times I \end{cases}$$

がある.

特に, 次の軌道空間の diffeomorphism が得られる.

$$(**) \begin{cases} S\mathcal{L}_a(I)/S^1 \cong S(\mu_a|X_a^{S^1})(I)/S^1 \times I \\ S\mathcal{L}_b(I)/S^1 \cong S(\mu_b|X_b^{S^1})(I)/S^1 \times I \end{cases}$$

§4 の Lemma によると

$$\tau(W_1/S^1, X_1/S^1) = 0$$

である.

§3 の考察により, 容易に

$$\tau(W_2/S^1, X_2/S^1) = 0$$

であることが分る.

W_2/S^1 は smooth manifold であり, 古典的 S -cobordism theorem によって, diffeomorphism

$$W_2/S^1 \cong X_2/S^1 \times I$$

が得られる. しかも上の diffeomorphisms $(**)$ の拡張であるようにとれる.

すなわち,

$$W_2 \longrightarrow W_2/S^1$$

は principal S^1 -bundle であり, S^1 -diffeomorphism

$$W_2 \cong X_2 \times I \quad \text{rel } X_2$$

である, 上の S^1 -diffeomorphism $(*)$ の拡張であることが存在する.

このようにして上と下とあることによって,

求めよ S^1 -diffeomorphism

$$W \cong X \times I \quad \text{rel } X$$

が得られぬ。

以上の定理の証明の outline は 終る。

§6 A concluding remark.

semi-free S^1 -manifold という仮定のもとに
定理を証明したが、この仮定は取り除くことは
出来ない。この仮定がないと成立しない例が
構成されるのである。

このことに関しは後の機会にまわすことに
しよう。

References

- [1] D. R. Anderson, The Whitehead torsion of the total space of a fiber bundle, *Topology* 11(1972), 179-194.
- [2] S. Araki and K. Kawakubo, Equivariant s-cobordism theorems (to appear).
- [3] M. Cohen, A course in simple homotopy theory, Graduate Texts in Math., 10, Springer-Verlag, 1973.
- [4] W. Y. Hsiang, On the unknottedness of the fixed point set of differentiable circle group action on spheres: P. A. Smith Conjecture, *Bull. A. M. S.*, 70(1965), 678-680.
- [5] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1* 588(1974), 199-220.
- [6] S. Illman, Smooth equivariant triangulations of G -manifolds for G a finite group, *Math. Ann.*, 233(1978), 199-220.
- [7] S. Illman, Actions of compact Lie groups and equivariant Whitehead torsion, to appear in *Osaka J. Math.*.
- [8] K. Kawakubo, Compact Lie group actions and fiber homotopy type, *J. Math. Soc. Japan*, 33(1981), 295-321.
- [9] K. Kawakubo, AG -structure of G -vector bundles and groups $KO_G(X)$, $KSp_G(X)$ and $J_G(X)$, *Osaka J. Math.*, 19(1982), 695-715.
- [10] K. Kawakubo, Stable equivalence of G -manifolds, *Homotopy Theory and Related Topics*, Advanced Stud. in Pure Math., 9(1986), 27-40.
- [11] T. Matumoto and M. Shiota, Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications, (to appear).

- [12] J. Milnor, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. of Math.*, 74(1961), 575-590.
- [13] J. B. Wagoner, Diffeomorphisms, K_2 , and analytic torsion, *Proc. symp. in Pure Math.*, A. M. S., 32(1978), 23-33.
- [14] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy, I, *Bull. A. M. S.*, 55(1949), 213-245.
- [15] K. Kawakubo, *An s -cobordism theorem for semi-free S^1 -manifolds (to appear).*