

Remarks on the Asymptotic Behaviour for Elliptic Equations with Critical Growth

東大理 石村 直之 (NAOYUKI ISHIMURA)

1. INTRODUCTION

次の問題を考える。

$$(I) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda(\epsilon)u = N(N-2)u^{p-\epsilon} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで Ω は $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 3$) の単位球、 $p = (N+2)/(N-2)$, $\epsilon \geq 0$, また $\lambda(\epsilon)$ は ϵ の given function とする。

本講演では (I) の解 u_ϵ の $\epsilon \rightarrow 0$ のときの振舞いを問題にする。

まず知られている事実を述べる。

- (1) (I) の解は球対称、単調減少である ([GNN])。
- (2) $\epsilon > 0$ のとき (I) は任意の $\lambda(\epsilon) < \lambda_0$ に対して解を持つ。 $\epsilon = 0$ のとき (I) は

$$\lambda(0) \in (0, \lambda_0) \quad N \geq 4$$

$$\lambda(0) \in \left(\frac{1}{4}\lambda_0, \lambda_0\right) \quad N = 3$$

のとき、そのときに限り解を持つ。ここで λ_0 は $-\Delta$ の単位球における主固有値である ([BN])。

- (3) $\lambda(\epsilon) \equiv 0$ のとき、 u_ϵ の極限での振舞いは次で与えられる。

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1/2} \cdot u_\epsilon(0) = \left(\frac{2\sigma_N}{N-2}\right)^{1/2} \left(\frac{N(N-2)}{S_N}\right)^{N/4} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/2} \cdot u_\epsilon(x) = \\ \quad = \left(\frac{2\sigma_N}{N-2}\right)^{-1/2} \left(\frac{N(N-2)}{S_N}\right)^{-N/4} \cdot (N-2)\sigma_N G(x) \quad x \neq 0. \end{cases}$$

ここで

$G(x)$ は単位球における $-\Delta$ の Green's function,

$\sigma_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ は $\mathbf{R}^N$ における単位球の表面積,

$S_N = \pi N(N-2) \left(\frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right)^{2/N}$ は best Sobolev constant

である ([AP])。彼らは ODE の方法を用いている。

- (4) $N = 3, \lambda(\epsilon) \equiv \lambda$ independent of ϵ のとき、 u_ϵ の極限での振舞いは次で与えられる。

$0 \leq \lambda < \lambda_0/4 = \pi^2/4$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1/2} u_\epsilon(0) = \left(\frac{32}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}}{\tan \sqrt{\lambda}} \right)^{1/2} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/2} u_\epsilon(x) = \left(\frac{32}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}}{\tan \sqrt{\lambda}} \right)^{-1/2} \cdot 4\pi G_\lambda(x) \quad x \neq 0. \end{cases}$$

ここで $G_\lambda(x)$ は $-\Delta - \lambda$ の Green's function:

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \left\{ \cos(\sqrt{\lambda}|x|) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}|x|)}{\tan \sqrt{\lambda}} \right\}.$$

$\lambda = \pi^2/4$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1/4} u_\epsilon(0) = (8\pi^2)^{1/4} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/4} u_\epsilon(x) = (8\pi^2)^{-1/4} \cdot 4\pi G_{\pi^2/4}(x) \quad x \neq 0. \end{cases}$$

どちらの場合でも

$$u_\epsilon(0) \cdot u_\epsilon \rightarrow 4\pi G_\lambda \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega)$$

が成り立つ ([BP])。彼らは PDE の方法を用いている。

本講演では general $\lambda(\epsilon)$ に対する解の振舞いを論じる。
簡単のため次の場合の考察に限定する。

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= \frac{\pi^2}{4} & \text{if } N = 3 \\ \lambda(0) &= 0 & \text{if } N \geq 4. \end{aligned}$$

また、次の記法を用いる。

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon) &= \frac{\pi^2}{4} + \lambda_\epsilon & \text{if } N = 3 \\ \lambda(\epsilon) &= \lambda_\epsilon & \text{if } N \geq 4. \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda_\epsilon \rightarrow 0$ とする。さらに、

$$\mu_\epsilon^{-(N-2)/2} = \|u_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = u_\epsilon(0)$$

と書く。ここで

$$\mu_\epsilon \rightarrow 0 \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0$$

に注意する。

2. RESULTS AND THE SKETCH OF THE PROOF

次の asymptotic relations を証明する。この関係式が極限での振舞いを決定する。

PROPOSITION. $\epsilon \rightarrow 0$ のとき次が成り立つ。

(A) $N = 3$ のとき。

$$\frac{\pi^2}{8} \cdot \epsilon = -2\pi\lambda_\epsilon\mu_\epsilon + \pi^4\mu_\epsilon^2 + o(\epsilon) + o(\mu_\epsilon^2) + o(\lambda_\epsilon\mu_\epsilon).$$

(B) $N = 4$ のとき。

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi^2 \cdot \epsilon = & -2\pi^2\lambda_\epsilon\mu_\epsilon^2 \log \frac{1}{\mu_\epsilon^2} + 8\pi^2\mu_\epsilon^2 + \\ & + o(\epsilon) + o(\mu_\epsilon^2) + o(\lambda_\epsilon\mu_\epsilon^2 \log \frac{1}{\mu_\epsilon^2}). \end{aligned}$$

(C) $N \geq 5$ のとき。

$$\begin{aligned} \frac{(N-2)^3}{2} \left(\frac{S_N}{N(N-2)} \right)^{N/2} \cdot \epsilon = & -2\sigma_N a_N \lambda_\epsilon \mu_\epsilon^2 + (N-2)^2 \sigma_N \mu_\epsilon^{N-2} + \\ & + o(\epsilon) + o(\mu_\epsilon^{N-2}) + o(\lambda_\epsilon \mu_\epsilon^2), \end{aligned}$$

ここで

$$a_N = \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}} dr < \infty.$$

これらの関係式の直接の結果が次である。

THEOREM 1. $N = 3, q > 2, C > 0$ とする。 u_ϵ を、以下のもとの (I) の解とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 < q < 4 \text{ のとき、} \\ \lambda(\epsilon) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{16} C^2 \cdot \epsilon^{1-2/q} \\ q = 4 \text{ のとき、} \\ \lambda(\epsilon) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8\pi^2 - C^4}{16C^2} \pi \cdot \epsilon^{1/2} \\ q > 4 \text{ のとき、} \\ \lambda(\epsilon) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{2} C^2 \cdot \epsilon^{2/q}. \end{array} \right.$$

このとき、 u_ϵ の asymptotic behaviour は

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1/q} \cdot u_\epsilon(0) = C \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/q} \cdot u_\epsilon(x) = C^{-1} \cdot 4\pi G_{\pi^2/4}(x) & x \neq 0 \end{cases}$$

で与えられる。

THEOREM 2. $N \geq 5, q > 4/(N-2), C > 0$ とする。 u_ϵ を以下のもとでの (I) の解とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} 4/(N-2)q < 2 \text{ のとき、} \\ \lambda(\epsilon) = -\frac{(N-2)^3}{4\sigma_N a_N} \left(\frac{S_N}{N(N-2)} \right)^{N/2} C^{4/(N-2)} \cdot \epsilon^{1 - \frac{4}{(N-2)q}} \\ q > 2 \text{ のとき、} \\ \lambda(\epsilon) = \frac{(N-2)^2}{2a_N} C^{-2(N-4)/(N-2)} \cdot \epsilon^{\frac{2(N-4)}{(N-2)q}} \\ q = 2 \text{ のとき、} \\ \lambda(\epsilon) = r(C) \cdot \epsilon^{\frac{N-4}{N-2}}, \end{array} \right.$$

ただし、 $r(C)$ は次の方程式の解である：

$$\frac{(N-2)^3}{2} \left(\frac{S_N}{N(N-2)} \right)^{N/2} C^2 = (N-2)^2 \sigma_N - 2r(C) \cdot \sigma_N a_N C^{\frac{2(N-4)}{N-2}}.$$

このとき、 u_ϵ の asymptotic behaviour は

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1/q} \cdot u_\epsilon(0) = C \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1/q} \cdot u_\epsilon(x) = C^{-1} \cdot (N-2) \sigma_N G(x) \quad x \neq 0 \end{array} \right.$$

で与えられる。

以下 Proposition の証明の概略を述べる。

[BP] に従い、Pohozaev identity：

$$\frac{N(N-2)^3}{2N - (N-2)\epsilon} \cdot \epsilon \int_{\Omega} u_\epsilon^{p+1-\epsilon} dx = \int_{\partial\Omega} (x, n) \left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right)^2 - 2\lambda(\epsilon) \int_{\Omega} u_\epsilon^2 dx.$$

の左右各項を評価する。そのとき PDE methods を用いるが、ここでは詳しくは立ち入らない。

左辺の評価。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon^{p+1-\epsilon} dx = \left(\frac{S_N}{N(N-2)} \right)^{N/2}.$$

右辺の評価。まず、

$$\mu_\epsilon^{-(N-2)/2} u_\epsilon(x) \rightarrow (N-2) \sigma_N G_N(x) \quad \text{in } W^{1,q}(\Omega) \text{ for } q < N/(N-2)$$

を示す。その後、今簡単のため $N \geq 5$ に限るが、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (x, n) \left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} \right)^2 &= (N-2)^2 \sigma_N \mu_\epsilon^{N-2} + o(\mu_\epsilon^{N-2}) \\ 2\lambda(\epsilon) \int_{\Omega} u_\epsilon^2 dx &= 2\sigma_N a_N \lambda_\epsilon \mu_\epsilon^2 + o(\lambda_\epsilon \mu_\epsilon^2) \end{aligned}$$

を示す。

REFERENCES

- [AP] F.V. Atkinson and L.A. Peletier, *Elliptic equations with nearly critical growth*, J. Diff. Eqs. **70** (1987), 349-365.
- [BN] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.
- [BP] H. Brezis and L.A. Peletier, *Asymptotics for elliptic equations involving critical growth*, "Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Essays in Honor of E. De Giorgi," Birkhäuser, 1989, pp. 149-192.
- [GNN] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.