

Connectedness of PBIB Designs

カルガリス 小川潤次郎

創価大・至 池田真雄

任意の処理対が connected であるとき, そのデザインが connected であるという. PBIB デザインが connected であるための必要十分条件は, 行列 $C = rI_v - k^T NN'$ の階数が $v-1$ であることは, よく知られている. ここでは, connectedness の必要十分条件を, より具体的にデザインあるいはアソシエーションのパラメータに関する条件として求めたい.

いま, m -class PBIBD を考え, その association matrices を $A_0, A_1, \dots, A_m$ とし, これらによって生成される代数の中における orthogonal idempotents を $A_0 = \frac{1}{v}I_v, A_1^\#, \dots, A_m^\#$ とする. そうすると $\sum_{i=0}^m A_i^\# = I_v$ で, $i=$

$$(1) \quad NN' = \sum_{i=0}^m p_i A_i^\#, \quad p_0 = rk$$

であるから

$$(2) \quad C = rI_v - \frac{1}{k} NN' = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m (rk - p_i) A_i^\#$$

が成り立つ。

アソシエーションのパラメータ p_{iu}^j のつく行列 $P_u = \|p_{iu}^j\|$ の固有根と $z_{0u}, z_{1u}, \dots, z_{mu}$ とおくと, $u=0, 1, \dots, m$ に対して共通な正則行列 Q が存在して, z を適当に配列すれば

$$(3) \quad Q P_u Q = \text{Diag}(z_{0u}, z_{1u}, \dots, z_{mu}), \quad u=0, 1, \dots, m.$$

また, $P_i = \sum_{u=0}^m \lambda_u z_{iu}$, $i=0, 1, \dots, m$, であるから, $P_0 = rk$,

$P_1, \dots, P_m$ は行列

$$(4) \quad P = \sum_{u=0}^m \lambda_u P_u$$

の固有根であることがわかる。

$$(5) \quad |P - \theta I_{m+1}| = (rk - \theta) |P^* - \theta I_m|$$

より

$$(6) \quad P^* = \|p_{ij}^*\| = \|r\delta_{ij} + \lambda_1 p_{i1}^j + \dots + \lambda_m p_{im}^j - n_i \lambda_i \delta_{ij}\|, \quad (\delta_{ij}: \text{Kronecker's } \delta)$$

となるので, $P_1, P_2, \dots, P_m$ は行列 P^* の固有根であることがわかる。

(2) 式から, 同値関係

$$(7) \quad \text{rank}(C) = v-1 \Leftrightarrow p_i \neq rk, \quad i=1, \dots, m$$

が成り立つので,

$$(8) \quad |P^* - rk I_m| \neq 0 \Leftrightarrow \text{connectedness}$$

を得る。したがって、 $|P^* - r(k)I_m| = 0$ という条件は、PBIBD が disconnected であるための必要十分条件であることがわかる。

さて、 m -class DBIBD デザインで、会合数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ がすべて正であれば、デザインが connected であることは明らかであるので

$$(9) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0 < \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_m$$

の場合を考える。このとき、行列式 $|P^* - r(k)I_m|$ は次のようになる。

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{1u}^1 - r(k-1) & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{1u}^2 & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{1u}^s & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{1u}^{s+1} & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{1u}^m \\ \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{2u}^1 & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{2u}^2 - r(k-1) & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{2u}^s & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{2u}^{s+1} & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{2u}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{su}^1 & \dots & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{su}^s - r(k-1) & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{su}^{s+1} & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{su}^m \\ \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{s+1u}^1 - n_{s+1}\lambda_{s+1} & \dots & \dots & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{s+1u}^{s+1} - r(k-1) - n_{s+1}\lambda_{s+1} & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{s+1u}^m - n_{s+1}\lambda_{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{mu}^1 - n_m\lambda_m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{mu}^m - r(k-1) - n_m\lambda_m \end{vmatrix}$$

そこで、 $1 \leq i \leq s$ なる任意の i について

$$(11) \quad \sum_{s+1}^m \lambda_u p_{iu}^i - r(k-1) = 0$$

とおいてみると、関係式

$$(12) \quad r(k-1) = \sum_{u=1}^m \lambda_u n_u, \quad n_u = \sum_{j=0}^m p_{ju}^i$$

から

$$(13) \quad p_{iu}^i = n_u, \quad p_{ju}^i = 0 \quad (j \neq i; j=1, 2, \dots, m)$$

が得られ、 $n_i p_{iu}^i = n_i p_{iu}^j$ が成立することから、行列式 (10) の i 行目の成分はすべて 0 であることがわかる。したがってこのとき行列式の値は 0 になる。

いま、条件 $A_1, A_2, \dots, A_s$ を

$$A_1: \quad p_{2u}^1 = 0, p_{3u}^1 = 0, \dots, p_{su}^1 = 0, \quad p_{s+1u}^1 = 0, \dots, p_{mu}^1 = 0, \quad (u \geq s+1)$$

$$A_2: \quad p_{1u}^2 = 0, \quad p_{3u}^2 = 0, \dots, p_{su}^2 = 0, \quad p_{s+1u}^2 = 0, \dots, p_{mu}^2 = 0, \quad (u \geq s+1)$$

$$(14) \quad A_3: \quad p_{1u}^3 = 0, p_{2u}^3 = 0, \quad \dots, p_{su}^3 = 0, \quad p_{s+1u}^3 = 0, \quad \dots, p_{mu}^3 = 0, \quad (u \geq s+1)$$

$$A_s: \quad p_{1u}^s = 0, p_{2u}^s = 0, \quad \dots, \quad p_{s+1u}^s = 0, \quad \dots, p_{mu}^s = 0, \quad (u \geq s+1)$$

とおくと、これらの論理和 $\bigcup_{i=1}^s A_i$ は disconnectedness の十分条件を与える。したがって、その否定

$$(15) \quad \overline{\bigcup_{i=1}^s A_i} = \bigcap_{i=1}^s \overline{A_i}$$

は connectedness の必要条件であることがわかる。これから、

connectedness の必要十分条件は、条件 (15) の中から求まる：とわかる。

この必要十分条件を一般の m に対して求めることは困難であるので、 $m=2, 3, 4$ の場合について求めてみよう。

(1°) $m=2, s=1$ の場合 ($\lambda_1=0, \lambda_2>0$)

$$(16) \quad A_1: p'_{22} = 0$$

となるので

$$(17) \quad \bar{A}_1: p'_{22} \neq 0.$$

これか、connectedness の十分条件であることはすぐわかるので、(17) は connectedness の必要十分条件を与える。(Mohan (1981), Kageyama (1981)).

(2°) $m=3, s=1$ の場合 ($\lambda_1=0 < \lambda_2, \lambda_3$)

このときは、(14) は

$$(18) \quad A_1: p'_{iu} = 0, (i, u \geq 2)$$

となるので

$$(19) \quad \bar{A}_1: p'_{iu} > 0 \quad (\text{ある } i \text{ と } u \text{ に対して, } (i, u \geq 2))$$

となり、これか connectedness の必要十分条件を与える。

(3°) $m=3, s=2$ の場合 ($\lambda_1=\lambda_2=0 < \lambda_3$)

このときは、(14) は

$$(20) \quad A_1 = B_1 \cap C_1, \quad A_2 = B_2 \cap C_2$$

$$\text{但し } B_1: p_{33}^1 = 0, \quad C_1: p_{23}^1 = 0$$

$$B_2: p_{33}^2 = 0, \quad C_2: p_{13}^2 = 0$$

となり

$$(21) \quad \overline{A_1 \cup A_2} = (\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{C_2}) \cup (\overline{B_2} \cap \overline{C_1}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$$

の各条件は

$$\overline{B_1} \cap \overline{B_2} : p_{33}^1 > 0, p_{33}^2 > 0$$

$$\overline{B_1} \cap \overline{C_2} : p_{33}^1 > 0, p_{13}^2 > 0$$

(22)

$$\overline{B_2} \cap \overline{C_1} : p_{33}^2 > 0, p_{23}^1 > 0$$

$$\overline{C_1} \cap \overline{C_2} : p_{23}^1 > 0 (\Leftrightarrow p_{13}^2 > 0)$$

となる。このうち、最初の3条件は十分条件と与えるが、最後の条件は、これだけでは十分条件と与えない。したがって、 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 < \lambda_3$ なる 3-class PBIB デザインが connected であるための必要十分条件は、 $\{p_{33}^1 > 0, p_{33}^2 > 0\}$, $\{p_{33}^1 > 0, p_{13}^2 > 0\}$, $\{p_{33}^2 > 0, p_{23}^1 > 0\}$ のいずれか1つで与えられることとなる。

(4°) $m=4, s=1$ の場合 ($\lambda_1=0 < \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$)

このときは、条件

$$(23) \quad p_{iu}^1 > 0 \quad (\text{ある } i, u (=2, 3, 4) \text{ に対して})$$

が、必要十分条件と与える。

(5°) $m=4, s=2$ の場合 ($\lambda_1=\lambda_2=0<\lambda_3, \lambda_4$)

このとき (14) の条件は

$$(24) \quad A_1 = B_1 \cap C_1, \quad A_2 = B_2 \cap C_2$$

但し

$$B_1: p'_{3u}=0, p'_{4u}=0, \quad B_2: p'_{3u}=0, p'_{4u}=0, \\ C_1=C_2: p'_{2u}=p'_{1u}=0, \quad (u \geq 3)$$

となり、

$$(25) \quad \overline{A_1 \cup A_2} = (\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{C_2}) \cup (\overline{B_2} \cap \overline{C_1}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2}).$$

そこで

$$(26) \quad \begin{aligned} \overline{B_1} \cap \overline{B_2}: & p'_{iu} > 0, p'_{i'u'} > 0, (\text{ある } i, u, i', u' (=3,4) \text{ について}) \\ \overline{B_1} \cap \overline{C_2}: & p'_{iu} > 0, p'_{i'u'} > 0, (\text{ある } i, u, u' (=3,4) \text{ について}) \\ \overline{B_2} \cap \overline{C_1}: & p'_{iu} > 0, p'_{i'u'} > 0, (\text{ある } i, u, u' (=3,4) \text{ について}) \\ \overline{C_1} \cap \overline{C_2}: & p'_{2u} > 0 (p'_{1u} > 0), (\text{ある } u (=3,4) \text{ について}). \end{aligned}$$

この最初の3条件が connectedness の必要十分条件となることかわかる。

(6°) $m=4, s=3$ の場合 ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0<\lambda_4$)

この場合は

$$(27) \quad A_1 = B_1 \cap C_1, \quad A_2 = B_2 \cap C_2, \quad A_3 = B_3 \cap C_3$$

但し

$$B_1: p'_{44}=0, \quad C_1: p'_{24}=0, p'_{34}=0$$

$$B_2: p_{44}^2 = 0, \quad C_2: p_{14}^2 = 0, \quad p_{34}^2 = 0$$

$$B_3: p_{44}^3 = 0, \quad C_3: p_{14}^3 = 0, \quad p_{34}^3 = 0.$$

よって,

$$(28) \quad \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{C}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_2) \\ \cup (\bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_1) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) \cup (\bar{B}_2 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_3) \\ \cup (\bar{B}_3 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3)$$

よって, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$

$$(29) \quad \begin{aligned} \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3: & p_{44}^1 > 0, p_{44}^2 > 0, p_{44}^3 > 0 \\ \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{C}_3: & p_{44}^1 > 0, p_{44}^2 > 0, [p_{14}^3 > 0 \text{ or } p_{24}^3 > 0] \\ \bar{B}_1 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_2: & p_{44}^1 > 0, p_{44}^3 > 0, [p_{14}^2 > 0 \text{ or } p_{34}^2 > 0] \\ \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{C}_1: & p_{44}^2 > 0, p_{44}^3 > 0, [p_{24}^1 > 0 \text{ or } p_{34}^1 > 0] \\ \bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3: & p_{44}^1 > 0, [p_{14}^2 > 0 \text{ or } p_{34}^2 > 0], [p_{14}^3 > 0 \text{ or } p_{24}^3 > 0] \\ \bar{B}_2 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_3: & p_{44}^2 > 0, [p_{24}^1 > 0 \text{ or } p_{34}^1 > 0], [p_{14}^3 > 0 \text{ or } p_{24}^3 > 0] \\ \bar{B}_3 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2: & p_{44}^3 > 0, [p_{24}^1 > 0 \text{ or } p_{34}^1 > 0], [p_{14}^2 > 0 \text{ or } p_{34}^2 > 0] \\ \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3: & [p_{24}^1 > 0 \text{ or } p_{34}^1 > 0], [p_{14}^2 > 0 \text{ or } p_{34}^2 > 0], [p_{14}^3 > 0 \text{ or } p_{24}^3 > 0] \end{aligned}$$

まず, 最初の条件 $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3$ は十分条件. 次に, 次の3条件は, 合計6個の条件に分解されるが, そのどれも十分条件を与えることか確かめられる. 第5の条件 $\bar{B}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3$ は, 次の4条件に分解される.

$$(30) \quad \begin{aligned} (i) & p_{44}^1 > 0, p_{14}^2 > 0, p_{14}^3 > 0, \quad (ii) p_{44}^1 > 0, p_{14}^2 > 0, p_{24}^3 > 0 \\ (iii) & p_{44}^1 > 0, p_{34}^2 > 0, p_{14}^3 > 0, \quad (iv) p_{44}^1 > 0, p_{34}^2 > 0, p_{24}^3 > 0 \end{aligned}$$

この 4 条件のうち、最初の 3 条件は十分条件であるが、条件 (iv) は十分ではない。同様の考察が $\bar{B}_2 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_3$, $\bar{B}_3 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$ に対してもできる。

最後に $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3$ は 8 条件に分解されるが、そのどれも十分であるとは言えない。

以上をまとめ、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 < \lambda_4$ なる 4-class PBIBD が connected であるための必要十分条件は、次の条件のどれか一つといえる。

- (1) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{44} > 0$, (2) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{34} > 0$
- (3) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{24} > 0$, (4) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{14} > 0$
- (5) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{34} > 0$, (6) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{24} > 0$
- (7) $p'_{44} > 0, p''_{44} > 0, p'''_{14} > 0$, (8) $p'_{44} > 0, p''_{14} > 0, p'''_{34} > 0$
- (9) $p'_{44} > 0, p''_{14} > 0, p'''_{24} > 0$, (10) $p'_{44} > 0, p''_{34} > 0, p'''_{14} > 0$
- (11) $p'_{44} > 0, p''_{24} > 0, p'''_{14} > 0$, (12) $p'_{44} > 0, p''_{24} > 0, p'''_{34} > 0$
- (13) $p'_{44} > 0, p''_{34} > 0, p'''_{24} > 0$, (14) $p'_{44} > 0, p''_{24} > 0, p'''_{34} > 0$
- (15) $p'_{44} > 0, p''_{34} > 0, p'''_{14} > 0$, (16) $p'_{44} > 0, p''_{14} > 0, p'''_{34} > 0$

もちろん、これらの条件は互に排反ではない。

一般の m, s に対しては、まだ必要十分条件の決定的な形は求まっていない。

参考文献

- Kageyama, S. (1981): Connectedness of two-associate PBIB designs, Statist. Res. Group, Hiroshima Univ., Tech. Rep. 54.
- Mohan, N. R. (1981): A criterion for connectedness in two-associate class PBIB designs, J. Statist. Planning Inf., 5, 211-2.
- Ogawa, J. (1974): Statistical Theory of the Analysis of Experimental Designs, Marcel Dekker, New York,

(註)

一般の m, s に対する必要十分条件は, 2α 後 下記の論文で与えられる。

- Ogawa, J., Ikeda, S. and Kageyama, S. (1984). Connectedness of PBIB designs with applications. To appear in the Proceedings of the Seminar on Combinatorics and Applications (14-17 Dec. 1982) in honour of Professor S. S. Shrikhande.
- Ogawa, J., Ikeda, S. and Kageyama, S. (1983). Connectedness of some 3-associate PBIB designs. Technical Report No. 91, Statistical Research Group of Hiroshima University, June.

(岡山三平記)