

1 次元テセレーションオートマタの完全性

東北大 通研 那須正和

本多波雄

はしがき, 「任意の有限パターンがテセレーションオートマトンの並列変換を順次施すことにより, 原始パターンから生成することが出来るかどうか」という問題が[1]により提起されたテセレーションオートマトン(以後TAという)の完全性の問題である。部分的な解答は[1],[2],[3],[4]において得られている。1次元の場合に限る、例えば、2シンボル中2のTAは不完全であり[1], 全ての $k \geq 2$ と $n \geq 3$ に対し、 k シンボル中 n のTAは完全であることが知られている[3][4]。今までに得られた完全性に関する結果においては、パターンの生成は一般に単調ではない方法により与えられていた。尚[1]において、2シンボル中3のTAの場合、強単調生成できない2シンボルパターンの存在が示されている。

この報告においては、 $k \geq 3$ ならば、任意の長さが2以上の k シンボルパターンは、 k シンボル中2のTAにより、

強単調生成されるということと、ゼロパターンを除く任意の 2 シンボルパターンは、2 シンボルでの TA によって単調生成されるということを示す。これらの証明は [5][6] に用いられたグラフ的方法によってなされる。

1. 準備

Σ をシンボルの有限集合とする。静止シンボルといわれる特別なシンボル 0 が Σ に含まれているものとする。 Σ^* は空系列 Λ を含む全ての Σ の元の有限系列の集合とする。任意の $x \in \Sigma^*$ に対して、 $\bar{0}x\bar{0}$ は左右両方向にのびる次のような無限系列 $---000x000---$ をあらわすものとする。このような無限系列を Σ 上の有限パターン、あるいは単にパターンという。 $\bar{0}\Lambda\bar{0}$ をゼロパターンという。全ての Σ 上のパターンの集合を Σ^P であらわす。 $\Sigma^k = (\Sigma - \{0\})\Sigma^*(\Sigma - \{0\})$ とおく。任意の $p \in \Sigma^P$ に対して、 $p = \bar{0}x\bar{0}$ となるような $x \in \Sigma^k \cup \{\Lambda\}$ がただ一つ存在するが、この x を p の核ということにする。 $x \in \Sigma^*$ に対して、 $|x|$ は x の長さを示す。 $p \in \Sigma^P$ の長さは p の核の長さであると定義し、それを $|p|$ であらわす。

Σ 上の中 n の TA の局所写像 ϕ とは、 Σ^n から Σ への写像で、 $\phi(0^n) = 0$ を満足するものである。このような写像を、 Σ 上の中 n の局所写像と略していうことにする。 Σ 上の中 n の局所写像 ϕ の並列写像 ϕ_0 とは次のように定められる Σ^P から Σ^P

への写像である。 $f_\delta(\bar{0} a_1 a_2 \dots a_m \bar{0}) = \bar{0} \delta(0^{n-1} a_1) \delta(0^{n-2} a_1 a_2) \dots \delta(0 a_1 \dots a_{m-1}) \delta(a_1 a_2 \dots a_m) \delta(a_2 \dots a_{m+1}) \dots \delta(a_{m-m+1} \dots a_m) \delta(a_{m-m+2} \dots a_m 0) \dots \delta(a_m 0^{n-1}) \bar{0}$

但し $a_i \in \Sigma$ ($1 \leq i \leq n$)。 $p, q \in \Sigma^P$ に対して, $q = f_\delta(p)$ ならば q は p のサクセサーといい, p は q のプレディセサーという。 A を Σ 上の局所写像の集合とする。 $p, q \in \Sigma^P$ に対して, $p = q$ であるか, あるいは Σ^P の元の列 $p_0, p_1, \dots, p_\ell$ 及び A の元の列 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell$ が存在して, $p_0 = p$, $f_{\sigma_i}(p_{i-1}) = p_i$ ($1 \leq i \leq m$) かつ $p_\ell = q$ となるとき, q は p より A によって生成されるという。このとき $|p_{i-1}| \leq |p_i|$ ($1 \leq i \leq \ell$) であるならば q は p より A によって単調に生成されるという。 $|p_{i-1}| < |p_i|$ ($1 \leq i \leq \ell$) ならば q は p から A によって単調に生成されるという。

$\Sigma = \{0, 1, \dots, k-1\}$ とする。 Σ 上の n の局所写像の集合を L_n^k とおく。 k シンボル中 n TA の完全性問題とは「任意の $p \in \Sigma^P$ は $\bar{0}1\bar{0}$ より L_n^k によって生成されるか」という問題である。

次に〔6〕で導入した局所写像の遷移グラフを定義する。 G_n^k は k^{n-1} 個の節と k^n 個の有向弧を持つ連結グラフである。 G_n^k の各節は Σ^{n-1} の元によってラベルされており, 各節とそのラベルとは 1 対 1 に対応している。 k^n 個の有向弧は次のように節を

結んでいる。ラベルがそれぞれ $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ と $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ であるような2つの節 v_i と v_j は $C_2 C_3 \dots C_{n-1} = d_1 d_2 \dots d_{n-1}$ であるときかつそのときに限り、 v_i を始端とし、 v_j を終端とする弧 (v_i, v_j) によって結ばれている。さらに G_n^k の各弧 (v_i, v_j) には、 v_j のラベルの右端のシンボルがその弧のプレディセクサーシンボルとして割りあてられる。弧 e のプレディセクサーシンボルを $\delta(e)$ とかく。 $\sigma \in L_n^k$ に対して、 $G_n^k[\sigma]$ は G_n^k の各弧 (v_i, v_j) にプレディセクサーシンボルとは別に、 Σ の元をサクセクサーシンボルとして割りあてたものである。弧 (v_i, v_j) に対して、 v_i, v_j のラベルがそれぞれ $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_2, C_3, \dots, C_n$ であるとき、 (v_i, v_j) のサクセクサーシンボル $\lambda((v_i, v_j))$ は $\sigma(C_1 C_2 \dots C_n)$ であると約束する。 $\sigma \in L_n^k$ と $G_n^k[\sigma]$ との間には1対1の対応が存在することは明らかである。

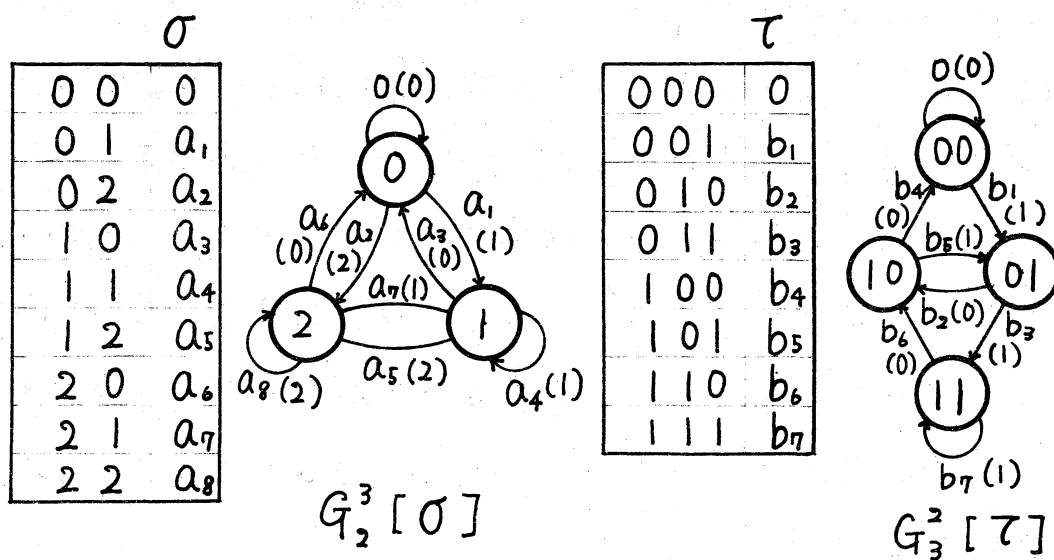


図 1

図1に任意の $\sigma \in L_2^3$ と $\tau \in L_3^2$ に対する $G_2^3[\sigma]$ と $G_3^2[\tau]$ が描かれている。この図において、各節は円であらわされており、円の中にその節のラベルがかけられている。各弧の上に、それぞれのサクセサーシンボルとプレディセサーシンボル（括弧がつけられている）が示されている。プレディセサーシンボルは、その弧の終端節のラベルにより決まるから、図示する際には、以後省略される。

$\sigma \in L_m^k$ の遷移グラフ $G_m^k[\sigma]$ において、ラベルが 0^{n-1} であるような節を v_0 とおくと、弧 (v_0, v_1) のサクセサーシンボルは、全ての σ に対して 0 である。 $G_m^k[\sigma]$ の道 $S = e_1 e_2 \dots e_m$ (e_i ($1 \leq i \leq m$) は $G_m^k[\sigma]$ の弧) に対して、 S のプレディセサー列 $\delta(S)$ 及びサクセサー列 $\lambda(S)$ を次のように定める。

$$\delta(S) = \delta(e_1) \delta(e_2) \dots \delta(e_m) \quad \lambda(S) = \lambda(e_1) \lambda(e_2) \dots \lambda(e_m)$$

S_m^k を $(v_0, v_{i_1})(v_{i_1}, v_{i_2}) \dots (v_{i_m}, v_0)$ の形をとり、 $v_{i_1} \neq v_0$ かつ $v_{i_m} \neq v_0$ を満足するような全ての G_m^k (あるいは $G_m^k[\sigma]$) の道の集合とする。任意の $S \in S_m^k$ に対して、ある $x \in \Sigma^k$ が存在し $\delta(S) = x 0^{n-1}$ となる。逆に任意の $x \in \Sigma^k$ に対して、 $\delta(S) = x 0^{n-1}$ となるような $S \in S_m^k$ がただ一つ存在する。 $G_m^k[\sigma]$ の定め方から明らかのように、任意の $p \in \Sigma^p$ に対して、その核が x であり、 $\delta(S) = x 0^{n-1}$ ($S \in S_m^k$) であるとするとき、 $f_\sigma(p) = \bar{0} \lambda(S) \bar{0}$ となる。

補題, 任意の $\sigma \in L_n^k$ と核 $x \neq \Lambda$ を持つ $p \in \Sigma^p$ に対し, p が長さ $|p|$ より ν だけ小さい t_σ によるプレディセサーを持つということと, $G_n^k[\sigma]$ において, ある $s \in S_n^k$ が存在して, $\lambda(s) = 0^i x 0^j$ かつ $\nu = n-1-i-j$ となることは同じである。

[証明] ある $s \in S_n^k$ に対し, $\lambda(s) = 0^i x 0^j$ かつ $\nu = n-1-i-j$ とする。ある $y \in \Sigma^k$ に対し $\delta(s) = y 0^{n-1}$ かつ t_σ $(\bar{0} y \bar{0}) = \bar{0} x \bar{0} = p$ $|\delta(s)| = |\lambda(s)|$ であるから, $|p| - |\bar{0} y \bar{0}| = |x| - |y| = n-1-i-j = \nu$ 。逆も同様にしていえる。

この節の最後には $\sigma \in L_m^k$ と $\sigma' \in L_m^k$ の積 $\sigma\sigma' \in L_{m+n-1}^k$ を定義しておく。 $\sigma\sigma'(a_1 a_2 \dots a_{m+n-1}) = \sigma'(\sigma(a_1 a_2 \dots a_m) \sigma(a_2 a_3 \dots a_{m+1}) \dots \sigma(a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}))$ 但し $a_i \in \Sigma$ ($1 \leq i \leq m+n-1$)

2 $k \geq 3$ シンボルマシンのオートマトンの完全性

$\Sigma = \{0, 1, \dots, k-1\}$, 但し $k \geq 3$ とする。 $\sigma_0 \in L_2^k$ を次のように定める。 $\sigma_0(ii) = 0$ ($i \in \Sigma$) $\sigma_0(ij) = j$ ($i \in \Sigma$, $j \in \Sigma - \{0\}$, $i \neq j$) $\sigma_0(i0) = i$ ($i \in \Sigma - \{0\}$)。

$G_0 = G_2^k[\sigma_0]$ とおく。 G_0 は $0, 1, 2, \dots, k-1$ でラベルされた k 個の節とそれぞれがある。 $0 \leq i, j \leq k-1$ に対し, ラベルが i である節から, ラベルが j である節へ向う弧があるような k^2 個の弧からなりたっている。任意の $v_i \neq v_j$ であるよ

うな G_0 の節 v_i に対し、弧 (v_0, v_i) と (v_i, v_0) のサクセサーシンボルは 0 ではない。したがって任意の $s \in S_2^k$ に対し、 $\lambda(s)$ は Σ^k の元である。 $R_0 = \{\lambda(s) \mid s \in S_2^k\}$ とおくと、 R_0 の元を核とするような任意のパターン $p \in \Sigma^P$ は $|P|$ より長さが 1 だけ小さい f_0 によるプレディセサーを持つことが補題からいえる。

さらに、 G_i ($1 \leq i \leq k-1$) を次のように定める。 G_0 において、0 でラベルされた節のラベルを i とし、 i でラベルされていた節のラベルを 0 とする。その他の節のラベル及び各弧のサクセサーシンボルは G_0 と同じとする。図 2 に $k=3$ の場合の G_i ($0 \leq i \leq k-1$) が描かれている。

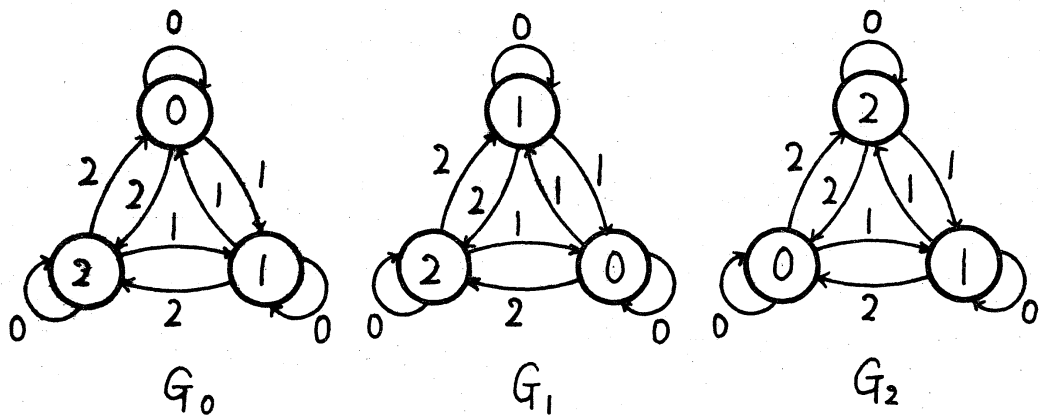


図 2

G_0 の弧で (v_i, v_j) のような形を持つもののサクセサーシンボルは全て 0 であるから、 G_i はある $\sigma_i \in L_2^k$ の遷移グラフ

とみなすことができる。 S_i を次のような形を持つ道の全つの集合とする。 $(v, v_{j_1})(v_{j_1}, v_{j_2}) \cdots (v_{j_{m-1}}, v_{j_m})(v_{j_m}, v)$
 $(m \geq 1)$ 但し, v は G_0 においてラベル i を持つ。(したがって v は G_i を考えると, ラベル 0 を持ち, S_i は S_2^k に等しくなる)
 G_0 において, $v_i \neq v_j$ であるような任意の v_i と v_j に対して, 弧 (v_i, v_j) 及び (v_j, v_i) のサクセサーシンボルはそれぞれ 0 ではないから, S_i の全つの元のサクセサー列は Σ^k の元である。
 $R_i = \{\lambda(s) \mid s \in S_i\}$ とおくと, 補題より, R_i の元を核とするような任意のパターンは f_{0i} により, 長さ 0 だけ小さいプレディセサーを持つことがわかる。そこで $R = \bigcup_{i=0}^{k-1} R_i$ とおき, R がどのような集合であるかを考える。

G_0 をオートマトン A_0 の遷移グラフと考えることにする。すなわち $0 \leq i \leq k-1$ でラベルされた節は A_0 の状態 i に対応するものとし, それぞれ i, j でラベルされた節 u, v に対して $\lambda(u, v) = l$ であるときかつそのときに限り, A_0 において入力シンボル $l \in \Sigma$ に対する, 状態 i から状態 j への遷移が行われるものとする。このように考えると, R_i は A_0 において初期状態と最終状態を i とするような有限オートマトンにより, 受理される Σ^k の元の集合ということになる。 $[i]$ を A_0 の状態集合 $Q = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ から Q への写像で $[i](j)$ は A_0 が状態 j から入力シンボル i により, 遷移する状態であるとし

で定められるものとする。(G_0 の定義より A_0 の遷移は決定性であるから, $[i]$ は上のように定義してさしつかえない)。

$[i_1, i_2, \dots, i_u]$ を $[i_1], [i_2], \dots, [i_u]$ の写像としての積とする。

すなわち, $j \in Q$ に対し $[i_1, i_2, \dots, i_u] = [i_u]([i_{u-1}] \dots ([i_2]([i_1](j)) \dots)))$, $i_t \in \Sigma$ ($1 \leq t \leq u$) とする。一般に写像

$g: Q = \{0, 1, 2, \dots, k-1\} \rightarrow Q$ を $\begin{pmatrix} 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ g(0), g(1), g(2), \dots, g(k-1) \end{pmatrix}$ とあらわすことにすると,

G_0 の定義から, $[0] = \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k-1 \\ 0, 1, \dots, k-1 \end{pmatrix}$ (恒等写像),

$$[i] = \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, k-1 \\ i, i, \dots, i, 0, i, \dots, i \end{pmatrix} \quad (i \in \Sigma - \{0\}).$$

$x \in \Sigma^k$ が $R = \bigcup_{i=0}^{k-1} R_i$ の元であるための必要かつ十分な条件は,

$$[x] = \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k-1 \\ \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1} \end{pmatrix} \text{ とすると, ある } 0 \leq t \leq k-1 \text{ に対し}$$

$\mu(t) = t$ となることである。全ての $i \in \Sigma - \{0\}$ に対し,

$$[i^{2^m}] = \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, k-1 \\ 0, 0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \quad (m \geq 1)$$

$$[i^{2^{m+1}}] = [i]$$

かつ, 任意の $j \in \Sigma - \{0, i\}$ と $m \geq 1$ に対し,

$$[i^m j] = \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k-1 \\ j, j, \dots, j \end{pmatrix}$$

となり, $|T| \geq 2$ かつ任意の $x \in \Sigma^*$ に対し, ある $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ が存在して

$$[i^m j x] = \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, k-1 \\ l, l, \dots, l \end{pmatrix}$$

となる。したがって、 θ を $\theta(0) = \Lambda$, $\theta(i) = i$ ($i \in \Sigma - \{0\}$)
 で定まる Σ^* から Σ^* への準同型写像であるとする

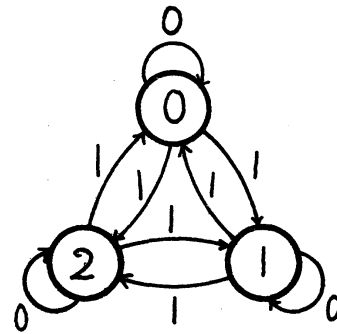
$$R = \{x \in \Sigma^k \mid \theta(x) \in \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq 0}} i i^* j \{1, 2, \dots, k-1\}^* \cup \bigcup_{i \neq 0} i^2 \{i^2\}^*\}$$

そこで $\phi_k \in L_2^k$ を次のように定められる G_k に対して $G_2^k[\phi_k] = G_k$ となるようなものとする。 G_k は G_2^k において、任意の節 v に対して弧 (v, v) にサクセサーシンボル 0 を割りあて、その他の全ての弧にはサクセサーシンボル 1 を割りあてて得られるものとする。図 3 は $k=3$ の場合の G_k を示している。

G_k において、全ての S_2^k の元のサクセサー列の集合を R_k とおくと

$$R_k = \{x \in \Sigma^k \mid \theta(x) \in 111^*\}.$$

したがって補題より、 R_k の元をその核とする任意のパターンは $\dagger_{\phi_k}$ による長さばかりだけ小さいプレティセサーを持つ



G_3

図 3

ことばいえる。さらに ϕ_{k+1} を次のように定める。 $\phi_{k+1}(0) = 0$
 $\phi_{k+1}(i) = i+1$ ($i \in \Sigma - \{0, k-1\}$) $\phi_{k+1}(k-1) = 0$ 。そして
 $1 \leq l \leq k-1$ に対して、 $\phi_{k,l} = \phi_k(\phi_{k+1})^{l-1}$ とおく。 $G_2^k[\phi_{k,l}]$
 を考えれば $R_{k,l}$ の元を核とする任意のパターンは $\dagger_{\phi_{k,l}}$ によ

と長さ1だけ短いプレディセサーを持つことは明白である。但し

$$R_{k,l} = \{x \in \Sigma^k \mid \theta(x) = l l l^*\} \quad (1 \leq l \leq k-1).$$

$R \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} R_{k,l} = \Sigma^k - \{1, 2, \dots, k-1\}$ であるから、次のことがいえる。任意の $p \in \Sigma^k$ に対し、ある $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k-1}, \phi_k, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,k-1}\}$ 中の元の列 $\phi_{j_1}, \phi_{j_2}, \dots, \phi_{j_m}$ とパターン列 $p_0, p_1, \dots, p_m$ とが存在して、 $p_0 = p$, $p_t = f_{\phi_{j_t}}(p_{t+1})$ ($0 \leq t \leq m-1$), $|p_t| - |p_{t+1}| = 1$, かつある $1 \leq i \leq k-1$ に対し $p_m = \bar{0} i \bar{0}$ となる。このとき ϕ_{j_m} が $\phi_k, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,k-1}$ のいずれかであるとき、 $p_m = \bar{0} 1 \bar{0}$ とすることが出来る。 $\phi_{i,l} = \phi_{k+1}^l \phi_i$ ($0 \leq i \leq k-1, 1 \leq l \leq k-2$) とする。 $(f_{\phi_{k+1}})^l(\bar{0} 1 \bar{0}) = \bar{0}(l+1)\bar{0}$ ($1 \leq l \leq k-2$) であることを考慮して、次の命題1と系1を得る。

命題1, $k \geq 3$ ならば、長さ2以上の任意の k シンボル有限パターンは $\bar{0} 1 \bar{0}$ から $\{\phi_i \mid 0 \leq i \leq k+1\} \cup \{\phi_{k,l} \mid 2 \leq l \leq k-1\} \cup \{\phi_{i,l} \mid 0 \leq i \leq k-1, 1 \leq l \leq k-2\}$ によつて強単調に生成される。

系1, $k \geq 3$ ならば、ゼロパターンを除く任意の k シンボル有限パターンは $\bar{0} 1 \bar{0}$ から $\{\phi_i \mid 0 \leq i \leq k+1\}$ によつて単調に生成される。

定理1, $k \geq 3, m \geq 2$ ならば、長さ2以上の任意の k シンボル有限パターンは $\bar{0} 1 \bar{0}$ から L_m^k によつて強単調に生成される。

3, 2シンボル中のセレーションオートマトンの完全性。
この節では, ゼロパターンを除く任意の2シンボル有限パターンは L_3^2 により, 010 から単調に生成されることをいう。

$\Sigma = \{0, 1\}$ とする。 $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \in L_3^2$ と $\tau_3 \in L_2^2$ を図4で示す H_0, H_1, H_2, H_3 , に対し, $G_3^2[\tau_0] = H_0$, $G_3^2[\tau_1] = H_1$, $G_3^2[\tau_2] = H_2$ かつ $G_2^2[\tau_3] = H_3$ の関係を持つものとする。

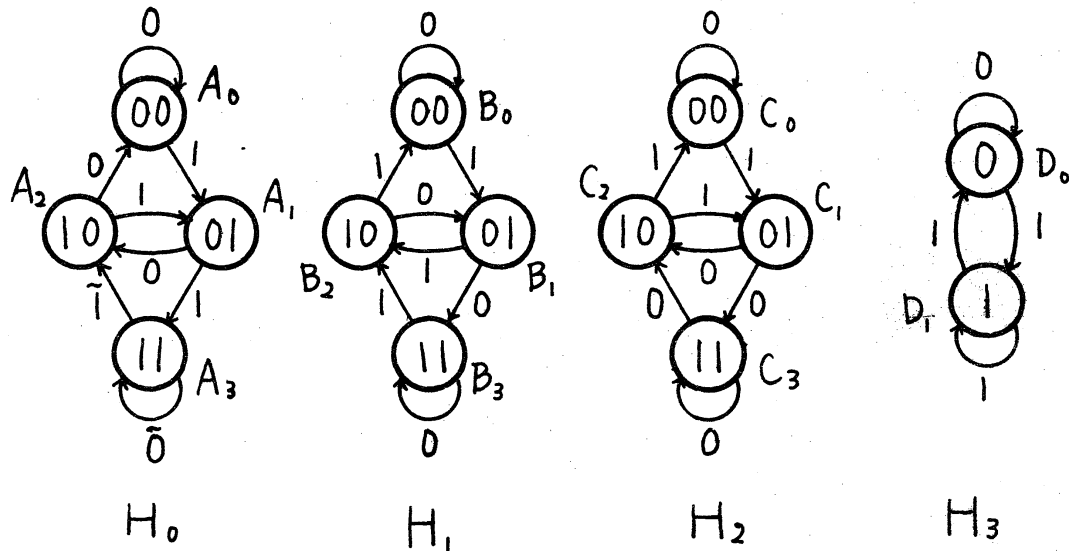


図 4

(注. H_1 は H_0 の節の各ラベル i を $(1-i)$ に置きかえて得られたものである。) 図4に示されているように, H_0, H_1, H_2, H_3 の各節はそれぞれ A_i, B_i, C_i ($0 \leq i \leq 2$) D_j ($0 \leq j \leq 1$) のどれかにより, 名付けられている。これから H_0, H_1, H_2, H_3 をそれぞれ有限オートマトン (非決定性の場合を含む) の状態遷移グラフとみることにする。すなわち L を A, B, C, D のどれかとするとき, オートマトン L は状態集合 $\{L_i\}$ を持ち

L_i から L_j への入力シンボル $\ell \in \Sigma = \{0, 1\}$ に対する状態遷移のあることと、対応する局所写像の遷移グラフにおいて弧 (L_i, L_j) のサクセサーシンボルが ℓ であることは等しいものとする。初期状態を L_0 とし、最終状態を L_j としたときのオートマトン L により受理される Σ^k の元の集合を、 $L[j]$ とする。又 $x \in \Sigma^k$ がそれを核とするパターンが局所写像 τ_j の並列写像 τ_{τ_j} により、長さ ν だけ減るようなプレディセサーを持つときかつそのときに限り $x \in \alpha[\tau_j, \nu]$ であるとして Σ^k の部分集合 $\alpha[\tau_j, \nu]$ を定義する。そうすると補題から直ちに、

- (1) $A[1] \subset \alpha[\tau_0, 0]$ (2) $A[2] \subset \alpha[\tau_0, 1]$ (3) $A[3]$ の元を核とするパターンは τ_{τ_0} により、 τ はプレディセサーを持たない。 (4) $B[0] \subset \alpha[\tau_1, 2]$ (5) $C[0] \subset \alpha[\tau_2, 2]$ (6) $D[0] \subset \alpha[\tau_3, 1]$

となることがわかる。

オートマトン A は決定性であるから $A[1] \cup A[2] \cup A[3] = \Sigma^k$ である。 $A[1]$ は H_0 において、 (A_0, A_1) 又は (A_0, A_1) $(A_1, v_2)(v_2, v_3) \dots (v_{m-1}, v_m)(v_m, A_1)$ ($m \geq 2$) の形の道のサクセサー列である。そのような道の集合を S_1 とおく。 S_1 に属する道で、弧 (A_3, A_2) を通らないものを S_{10} 、少なくとも一度は (A_3, A_2) を通る S_1 の道の集合を S_{11} とする。 S_{10} の元のサクセサー列の集合を T_{10} とし、 S_{11} の元のサクセサー列の

集合を T_{11} とすると, 明らかに $T_{10} \cup T_{11} = A[1]$ である. H_0 の弧の内さくセサーシンボルとプレディセサーシンボルが異なるものは (A_3, A_3) と (A_3, A_2) のみである. このことを図4において, (A_3, A_3) と (A_3, A_2) のサクセサーシンボルの上に $\sim$ 印をつけて示してある. $T_{10} = (100^*)^* 1$ であるから, 明らかに,

$$(7) \quad T_{10} - \{1\} \subset C[0]$$

$x = a_1 a_2 \dots a_m$ を核とするパターン P に対し, $\eta(P) = a_1 + a_2 \cdot 2 + \dots + a_m 2^{m-1}$ と定義すると,

(8) $x \in T_{11}$ に対し, $\bar{0}x\bar{0}$ の t_{z_0} によるプレディセサーを $\bar{0}y\bar{0}$ とすると, $\eta(\bar{0}x\bar{0}) > \eta(\bar{0}y\bar{0})$ である.

(証明) $S = e_1 e_2 \dots e_m \in S_1$ のサクセサー列が $x = a_1 a_2 \dots a_m$, プレディセサー列が $b_1 b_2 \dots b_m$ であるとする. 条件より, どれかの e_j ($1 \leq j \leq m$) は (A_3, A_2) に等しい. $e_j = (A_3, A_2)$ かつ $e_{j+1}, \dots, e_m$ は全 (A_3, A_2) ではないというように e_j をとることにする. そうすると $a_j = 1, b_j = 0, a_l = b_l$ ($j < l \leq m$) となる. ゆえに $\eta(\bar{0}x\bar{0}) > \eta(\bar{0}y\bar{0})$.

(9) 任意の $x \in T_{11}$ に対し, パターンの列 $P_0, P_1, \dots, P_m$ ($m \geq 1$) が存在して, $P_0 = \bar{0}x\bar{0}$, $P_i = t_{z_0}(P_{i+1})$ ($0 \leq i \leq m-1$), P_j ($0 \leq j \leq m-1$) の核は T_{11} の元であり, かつ P_m の核は T_{11} の元ではない.

(証明) $P_0 = \bar{0} \times \bar{0}$ かつ $P_i = \tau_{T_0}(P_{i+1})$ かつ P_i の核は T_{11} の元であるということとが全ての $i = 0, 1, 2, \dots$ について成立すると仮定すると, 全ての $i \geq 0$ に対し $|P_i| = |P_{i+1}|$ である。したがって, ある i, j が存在して $P_i = P_j$ となる。これは (8) に矛盾する。

さらにオートマトン A, B の直積オートマトン E (但し状態の対 (A_i, B_j) の連結部分のみを考える。) を考えよう。 E の状態遷移グラフ H_4 は図 5 に示すとおりである。

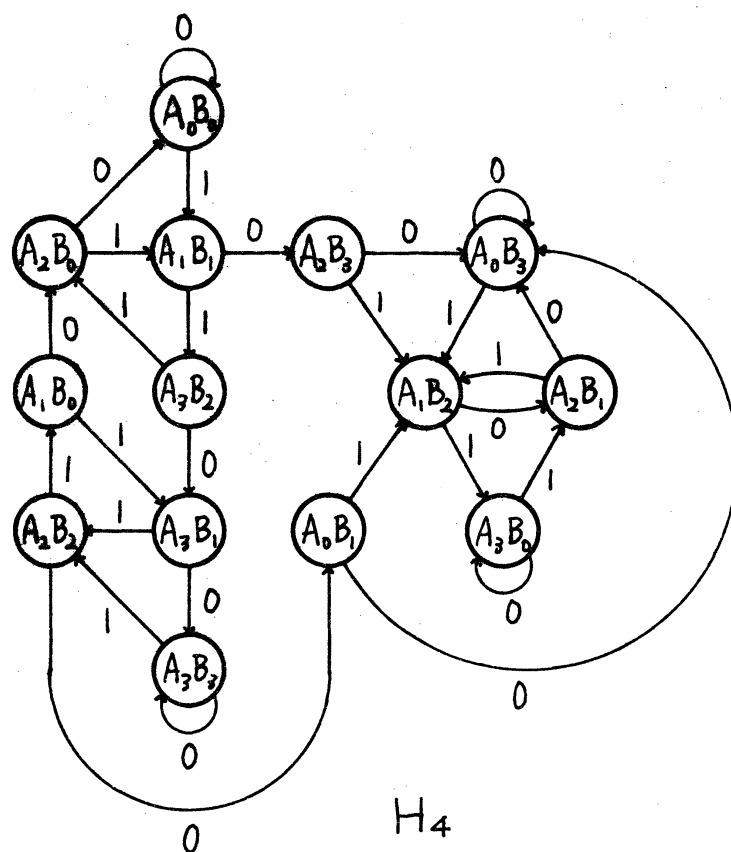


図 5

A, B が決定性であるから, E も決定性である. E において状態 (A_0, B_0) を初期状態とし最終状態を (A_3, B_0) とし Σ^k の元の集合を $T_{3,0}$, (A_0, B_0) を初期状態とし, (A_3, B_1) 及び (A_3, B_2) を最終状態とし, 受理される Σ^k の元の集合を $T_{3,1}$ とすると $A[3] = T_{3,0} \cup T_{3,1}$ である. 明らかに,

$$(10) \quad T_{3,0} \subset B[0]$$

であり, H_4 の形より $T_{3,1}$ の元で $x010y$ ($x, y \in \Sigma^*$) の形をしてゐるものは存在しないから,

$$(11) \quad T_{3,1} \subset D[0].$$

$\Sigma^k - \{1\} = (A[1] - \{1\}) \cup A[2] \cup A[3] = (T_{1,0} - \{1\}) \cup T_{1,1} \cup A[2] \cup T_{3,0} \cup T_{3,1}$ であり, 1 に代つて $(7), (5), (2), (10), (4), (11), (6)$ より,

$$\Sigma^k - \{1\} \subset \alpha[\tau_2, 2] \cup T_{1,1} \cup \alpha[\tau_0, 1] \cup \alpha[\tau_1, 2] \cup \alpha[\tau_3, 1]$$

となる. さらに (1)(9) より, 次の命題 2 を得る.

命題 2 ゼロパターンを除く任意の 2 シンボル有限パターンは 010 から $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ によつて単調に生成される.

定理 2 ゼロパターンを除く $n \geq 3$ であるならば, 任意の 2 シンボル有限パターンは 010 から L_n^2 によつて単調に生成される.

(謝辞) 有益な御討論を頂いた東北大工学部の丸岡氏に感謝します。

(参考文献)

1. H. Yamada and S. Amoroso A completeness problem for pattern generation in tessellation automata. J. Comput System Sci. 4 (1970)
2. 久保, 木村 テセレーションオートマタの完全性問題. 信学会研資 AL PRL 72-79 (1972-10)
3. A. Maruoka and M. Kimura A completeness problem of one dimensional tessellation automata. J. Comput. System Sci. to appear
4. 丸岡, 木村 1次元テセレーションオートマタの強連結性 信学論(D) 57-D, 2(1974)
5. Y. Kobuchi and H. Nishio, Some regular state sets in the system of one-dimensional iterative automata, Inf. Sci. 5 (1973), 199-216
6. 那須, 本多 1次元有限様相上の全単射を実現するテセレーションオートマトンに関する一考察 信学会研資 AL 73-60 (1973-11)