

無限分解可能な分布の特性関数の積分可能性

慶応大 工学部 河田龍夫

本研究は、慶応大、工、前島信氏との共同によるものである。なお、レゾナンスの際に述べた結果はその後改良されたので、本稿には、この新しい結果を書くことにする。

1. 緒言. $F(x)$ を無限分解可能な分布関数とし、その特性関数を $f(t)$ とする。 $f(t)$ の Lévy の公式から

$$\log f(t) = it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0-} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_{0+}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(u). \quad (1)$$

こゝに $\log$ は主値分枝をとることにし、 γ は実数、 σ は非負な数、 $M(u)$ 、 $N(u)$ は、それぞれ $(-\infty, 0)$ 、 $(0, \infty)$ で非減少関数で、 $\varepsilon > 0$ に対し

$$\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2 dM(u) < \infty, \quad \int_{0+}^{\varepsilon} u^2 dN(u) < \infty, \quad (2)$$

かつ

$$M(-\infty) = N(\infty) = 0 \quad (3)$$

とする. (Gnedenko and Kolmogorov [1], Lukacs [2] 参照)

$f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$, $p > 0$ なるものの条件について与える.
特に $p=2$ のときは, $F(x)$ は $L^2(-\infty, \infty)$, $1 \leq \alpha \leq 2$ に属する確
率密度をもつ条件となる.

2. 定理. $\sigma \neq 0$ のときは, 明らかに $f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$
かつ $p > 0$ で表せるので, $\sigma = 0$ の場合, 与えられた
正規因子 ε , $F(x)$ がある場合を示す.

いま

$$L(u) = -M(-u) + N(u), \quad 0 < u < \infty \quad (4)$$

とおく. $L(u)$ は非減少で, $L(u) \leq 0$ ($0 < u < \infty$), $L(\infty) = 0$
で, $\varepsilon > 0$ に対し $\int_{0+}^{\varepsilon} u^2 dL(u) < \infty$ である.

これらの条件は次の定理を示す.

定理. $p > 0$. $\sigma = 0$ とし, ある $\delta > 0$ に対し, $L(u)$ の
(0, δ) で $\square$ とする.

このとき次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} A \int_{4/\delta}^{\infty} \exp[pL(\tfrac{1}{u}) - J(u)] du &\leq \int_0^{\infty} |f(t)|^p dt \\ &\leq B \int_0^{\infty} \exp[pL(\tfrac{1}{u})] du. \end{aligned} \quad (5)$$

こゝに A, B は

$$A = \pi \exp[pL(\delta) + 2\pi pL(\tfrac{\delta}{2})], \quad B = \pi \exp[-3pL(\delta)]. \quad (6)$$

なお $J(u)$ は次の不等式を満足させる関数である:

$$\frac{\pi^2}{2} \cdot u^2 \int_0^{1/(2u)} v^2 dL(v) \leq J(u) \leq \frac{\pi^2}{2} u^2 \int_0^{3/(2u)} v^2 dL(v), \quad (7)$$

$(0 < u < \infty)$.

注意 1

ある $\delta > 0$ に対して

$(0, \delta)$ で $L(u)$ が凹であることと 一定であるならば 無論
このとき, $L(u)$ は $(0, \delta)$ で絶対連続となる.

注意 2. (6) より明らかになるように, もし $L(u)$ が $(0, \infty)$
で凹のときは, $A=B=\pi$ となり, また (5) の 辺の積分の積
分範囲は $(0, \infty)$ としよ.

系. (i) $\sigma=0$ とし, $L(u)$ が ある $\delta > 0$ に対して, $(0, \delta)$ で凹で
あり, $\exp(L(1/u)) \in L^p(0, \infty)$, $p > 0$ ならば, $f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$
である.

(ii) $L(u)$ は $(0, \infty)$ で絶対連続とし, ある $\delta > 0$ に対して,
 $(0, \delta)$ で凹であり, $u^2 \int_0^{1/u} v^2 dL(v)$ が有界ならば,
 $f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$ は $\exp(L(1/u)) \in L^p(0, \infty)$ なることを含む
系. $p > 0$.

$|f(t)|$ が偏関数であるから $f(t) \in L^p(0, \infty)$ と $f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$
は同じである.

3. 定理の証明.

次の補題を述べておくと便利である。

補題. Lévy の表現 (1) 2°

$$\lim_{u \rightarrow 0+} u^2 L(u) = 0. \quad (8)$$

証明. $0 < \eta < \xi$ を任意の正数とすると

$$\int_{\eta}^{\xi} u^2 dL(u) \geq \eta^2 [L(\xi) - L(\eta)].$$

$\eta \rightarrow 0+$ とし (2) より

$$0 \leq \limsup_{\eta \rightarrow 0+} [-\eta^2 L(\eta)] \leq \int_{0+}^{\xi} u^2 dL(u).$$

よか任意にあるから (8) が得られる。

定理の証明. (5) の右辺の不等式を証明する。 $p > 0$ とする。

任意の $t > 0$ に対し

$$\int_0^t |f(u)|^p du = \int_0^t \exp \left[-p \int_0^{\infty} (1 - \cos ux) dL(x) \right] du. \quad (9)$$

$\delta > 0$ を定数で与えられたいとする。

$$I(u) = -p \int_0^{\delta} (1 - \cos ux) dL(x) \quad (10)$$

とおくと、明らかに

$$\int_0^t |f(u)|^p du \leq \int_0^t \exp I(u) du. \quad (11)$$

よって

$$I(u) = -2p \int_0^{\delta} \sin^2 \frac{ux}{2} dL(x),$$

部分積分により、補題を用いて、

$$\begin{aligned}
&= -2\rho \sin^2 \frac{\delta u}{2} L(\delta) + \rho u \int_0^\delta \sin ux L(x) dx \quad (12) \\
&\leq -2\rho L(\delta) + \rho u \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2k\pi/u}^{2(k+1)\pi/u} \sin ux L(x) dx \\
&\quad + \rho u \int_{2N\pi/u}^\delta \sin ux L(x) dx. \\
&\equiv -2\rho L(\delta) + I_1(u) + I_2(u).
\end{aligned}$$

こゝに $N = [\delta u / (2\pi)]$. $N=0$ のときは (12) の第 2 項 $I_2(u)$

は 0 とする。また

$$\delta u / (2\pi) - 1 < N \leq \delta u / (2\pi). \quad (13)$$

$I_1(u)$ を計算する:

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= \rho \sum_{k=0}^{N-1} \left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \right] \sin y \cdot L\left(\frac{y}{u}\right) dy \\
&= \rho \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy, \quad (14)
\end{aligned}$$

L の $(0, \delta)$ における凹性を用いて,

$$\begin{aligned}
&\leq \rho \sum_{k=0}^{N-1} \left[L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{2(k+1)\pi}{u}\right) \right] \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y dy \quad (15) \\
&= \rho \sum_{k=0}^{N-1} 2 \left[L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{2(k+1)\pi}{u}\right) \right] \\
&\leq \rho \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{2(k+1)\pi}{u}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[L\left(\frac{2(k+1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2k+3)\pi}{u}\right) \right] \right\} \\
&= \rho \left[L\left(\frac{\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) \right]. \quad (16)
\end{aligned}$$

次に $I_2(u)$ の評価を述べる。

また $2N\pi/u < \delta \leq (2N+1)\pi/u$ のとき

$$I_2(u) \leq 0 \leq p \left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L(\delta) \right] \quad (17)$$

また $(2N+1)\pi/u < \delta \leq (2N+2)\pi/u$ のとき

$$\begin{aligned} I_2(u) &\leq p \int_{2N\pi}^{(2N+2)\pi} \sin y L\left(\frac{y}{u}\right) dy \\ &= p \int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \sin y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \\ &\leq 2p \left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2N+2)\pi}{u}\right) \right] \\ &\leq 2p \left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L(\delta) \right], \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad I_2(u) \leq p \left[L\left(\frac{(2N+1)\pi}{u}\right) - L(\delta) \right]. \quad (18)$$

よって δ の範囲にわたって (18) の不等式が得られる。

(16), (18) より,

$$I(u) \leq -3pL(\delta) + pL\left(\frac{\pi}{u}\right).$$

これを (11) に代入, $t \rightarrow \infty$ とし (5) の右側の不等式が得られる。

次に (5) の左側の不等式を証明する。 $u \geq 4\pi/\delta$ とする。

$$\begin{aligned} -p \int_0^\infty (1 - \cos ux) dL(x) &= -p \int_0^\delta - p \int_\delta^\infty \\ &\geq I(u) + 2pL(\delta) \end{aligned} \quad (19)$$

(12) より, $-2p \sin^2(\delta u/2) L(\delta) \geq 0$ であるから

$$I(u) \geq pu \int_0^\delta \sin ux L(x) dx$$

$$= I_1(u) + I_2(u). \quad (20)$$

$I_1(u)$, $I_2(u)$ は前者のものを表す。

$$\begin{aligned} I_1(u) &= p \int_0^{\pi} \sin y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \\ &\quad + p \sum_{k=1}^{N-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \\ &= I_{11}(u) + I_{12}(u) \end{aligned} \quad (21)$$

とおく。 $L(x)$ の $(0, \delta)$ において $\square$ 性質を用い、(14), (15) と同様の方法で次の不等式関係が得られる。

$$\begin{aligned} I_{12}(u) &\geq 2p \sum_{k=1}^{N-1} \left[L\left(\frac{2k\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right) \right] \\ &\geq p \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \left[L\left(\frac{(2k-1)\pi}{u}\right) - L\left(\frac{2k\pi}{u}\right) \right] + \left[L\left(\frac{2k\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2k+1)\pi}{u}\right) \right] \right\} \\ &= p \left[L\left(\frac{\pi}{u}\right) - L\left(\frac{(2N-1)\pi}{u}\right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

(13) より $(2N-1)\pi/u < \delta$ であるから

$$\geq p L\left(\frac{\pi}{u}\right) - p L(\delta). \quad (23)$$

次に

$$\begin{aligned} I_{11}(u) &= p \int_0^{\pi/2} \sin y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \\ &\quad + p \int_{\pi/2}^{\pi} \sin y \left[L\left(\frac{\pi-y}{u}\right) - L\left(\frac{2\pi-y}{u}\right) \right] dy \\ &\geq 2p \int_0^{\pi/2} \sin y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \\ &\geq 2p \int_0^{\pi/2} y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy. \end{aligned} \quad (24)$$

2.1.2

$$J_1(u) = \left| \int_0^{\pi/2} y \left[L\left(\frac{y}{u}\right) - L\left(\frac{y+\pi}{u}\right) \right] dy \right| \quad (26)$$

2.2.1

$$\begin{aligned} J_1(u) &= u^2 \int_0^{\pi/(2u)} x dx \int_x^{x+\pi/u} dL(v) \\ &= u^2 \int_0^{\pi/(2u)} dL(v) \int_0^v x dx + u^2 \int_{\pi/(2u)}^{\pi/u} dL(v) \int_0^{\pi/(2u)} x dx \\ &\quad + u^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/(2u)} dL(v) \int_{v-\pi/u}^{\pi/(2u)} x dx \quad (27) \\ &\leq \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2 dL(v) + u^2 \int_{\pi/(2u)}^{3\pi/(2u)} dL(v) \int_0^{\pi/(2u)} x dx \\ &= \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2 dL(v) + \frac{\pi^2}{8} \int_{\pi/(2u)}^{3\pi/(2u)} dL(v) \\ &\leq \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2 dL(v) + \frac{u^2}{2} \int_{\pi/(2u)}^{3\pi/(2u)} v^2 dL(v) \\ &= \frac{u^2}{2} \int_0^{3\pi/(2u)} v^2 dL(v). \end{aligned}$$

2.2.2 (27) より, $\mathbb{R}^+$ 上の L 関数 L に対して

$$J_1(u) \geq \frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2 dL(v).$$

2.2.3,

$$\frac{u^2}{2} \int_0^{\pi/(2u)} v^2 dL(v) \leq J_1(u) \leq \frac{u^2}{2} \int_0^{3\pi/(2u)} v^2 dL(v) \quad (28)$$

L は $b'' \geq 2$ (21), (23), (24), (26) より

$$I_1(u) \geq pL\left(\frac{\pi}{u}\right) - pL(\delta) - 2pJ_1(u) \quad (29)$$

最後:

$$\begin{aligned} I_2(u) &= pu \int_{2N\pi/u}^{\delta} \sin ux L(x) dx \geq pu \int_{\delta-2\pi/u}^{\delta} L(x) dx \\ &\geq pu \cdot \frac{2\pi}{u} \cdot L(\delta-2\pi/u) \end{aligned}$$

$u \geq 4\pi/\delta$ であるから

$$I_2(u) \geq 2\pi p L(\delta/2). \quad (30)$$

結局 (29), (30) を (20) に代入し, さらに (19) に代入すると (10) より

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(u)|^p du &\geq \int_{4\pi/\delta}^{\infty} |f(u)|^p du \\ &\geq \exp[pL(\delta) + 2\pi pL(\delta/2)] \int_{4\pi/\delta}^{\infty} \exp[pL(\frac{\pi}{u}) - J_1(u)] du. \end{aligned}$$

$u = \pi u'$ と変数変換し, $J_1(\pi u') = J(u')$ とおくと (5) の左側の不等式が得られる.

4. 注意 いくつかの注意をのべる.

(i) (5) の右側の不等式が成立するものには, $L(u)$ の Lebesgue 分解で, その絶対連続部分 $L_{ac}(u)$ があり, ある $\delta > 0$ に対し $(0, \delta)$ で凹であるという仮定により, 仮に (5) の右の不等式で L を L_{ac} に置きかえてよい.

すなわち, ある $\delta > 0$ に対し $L_{ac}(u)$ は $(0, \delta)$ で凹でかつ $\exp L_{ac}(\frac{1}{u}) \in L^p(0, \infty)$, $p > 0$ ならば, $f(t) \in L^p(1, \infty)$

で、 $F(x)$ は 絶対連続である。(確率密度をとつ)。

$F(x)$ の絶対連続性は、 $\exp\{L_{ac}(1/u)\}$ の可積分性より、

$L_{ac}(0+) = \infty$ が得られ、これはより明らか。(Tucker [3])

(または Lukacs [2] p.125, Theorem 5.5.6, この定理の (ii) は

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} d\theta_{ac}(x) = \infty$ が正しい。(右辺が 0 となることで、これは向
違ひである)

(ii) 系の条件 $u^2 \int_0^{1/u} v^2 dL(v)$ の有界性によってのべ
ておく。

a を $0 < a < 1$ なる任意の定数とすると

$$\frac{L(ax)}{L(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0+ \quad (30)$$

と仮定する。(右側の定数の連続性 slow growth の関係
で仮定する)

$$\text{いま} \quad \frac{L(ax)}{L(x)} = 1 + \delta(x), \quad \delta(x) = \delta_a(x) \quad (31)$$

とわく、任意の $\varepsilon > 0$, に対して、

$$\int_0^\varepsilon v^2 dL(v) = \int_0^{\varepsilon/2} v^2 dL(v) + \int_{\varepsilon/2}^\varepsilon v^2 dL(v), \quad (32)$$

とし、右辺の第1項に部分積分を用い、

$$v^2 L(v) \Big|_0^{\varepsilon/2} - 2 \int_0^{\varepsilon/2} v L(v) dv.$$

補題を用いて

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \varepsilon^2 L(\varepsilon/2) - 2 \int_0^{\varepsilon/2} v L(v) dv = \frac{1}{4} \varepsilon^2 L(\varepsilon/2) - \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} u L(u/2) du \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon^2 L(\varepsilon) [1 + \delta(\varepsilon)] - \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} u L(u) [1 + \delta(u)] du
\end{aligned}$$

((31) ε $a=1/2$ と L 2 冊 u L)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[\varepsilon^2 L(\varepsilon) - 2 \int_0^{\varepsilon} u L(u) du \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \varepsilon^2 L(\varepsilon) \delta(\varepsilon) - \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} u L(u) \delta(u) du \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\varepsilon} v^2 dL(v) + \frac{1}{4} \varepsilon^2 L(\varepsilon) \delta(\varepsilon) - \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} u L(u) \delta(u) du
\end{aligned} \tag{33}$$

す L (32) の右辺の第 2 項は

$$\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} v^2 dL(v) \leq \varepsilon^2 [L(\varepsilon) - L(\varepsilon/2)]$$

((31) L 7) u 2)

$$= -\varepsilon^2 L(\varepsilon) \delta(\varepsilon).$$

これと (33) ε (32) $\wedge$ L 2

$$\frac{3}{4} \int_0^{\varepsilon} v^2 dL(v) \leq -\frac{3}{4} \varepsilon^2 L(\varepsilon) \delta(\varepsilon) - \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} u L(u) \delta(u) du$$

(34)

す L 1 5

$$\begin{aligned}
u^2 \int_0^{1/u} v^2 dL(v) &\leq -L(1/u) \delta(1/u) \\
&\quad - \frac{2}{3} u^2 \int_0^{1/u} v L(v) \delta(v) dv
\end{aligned} \tag{35}$$

これより次の結果が得られる。

$$(31) \text{ において } \delta(x) = O(-L^{-1}(x)), \quad x \rightarrow 0+ \text{ ならば }$$

$u^2 \int_0^{1/u} v^2 dL(v)$ は $u \rightarrow \infty$ のとき有限である。よつてこの場合次のようにならねばならないとわかる。 $L(x)$ の凹性は仮定する。

$f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$, $p > 0$ なるものの必要十分条件は $\exp[L(1/u)] \in L^p(0, \infty)$ なることである。

$S(x) = O(-L^{-1}(x))$ は例えは $L(x) = c \log^\beta x$, $0 < \beta \leq 1$ ならば満足される。

なお (35) から次のことも得られる。

もし $L(x)$ が、原点の近傍に slow growth の性質があれば、

$$u^2 \int_0^{1/u} v^2 dL(v) = o(-L(1/u)), \quad u \rightarrow \infty.$$

よつて次の事実も得られる。 $L(x)$ の凹性は仮定する。

もし $f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$ かつ、 $L(x)$ が原点の近傍に slow growth のものならば、 $\exp[L(1/u)] \in L^{p'}(0, \infty)$ である。 こゝに p' は p の共役指数 $p' < p$ なるものを表す。

文献

- [1] B.V. Gnedenko - A.N. Kolmogorov, (1954). Limit distributions for sums of independent random variables, (英訳, K.L. Chung) Cambridge, Mass.
- [2] E. Lukacs, (1970). Characteristic functions, (2nd ed.) London
- [3] H. G. Tucker (1962), Absolute continuity of infinitely divisible distributions, Pacific J. Math. 12, 1125-1129.