

POLYLOGARITHM について

坂内 健一

1. INTRODUCTION

楕円ポリログとは楕円曲線の cohomology に機械的な方法で定義される元である。本稿の目的は、「楕円曲線が虚数乗法を持つ場合、楕円ポリログの p -進版である p -進楕円ポリログは、楕円曲線の p -進 L -関数の特殊値（ある特定の点での値）と結びつく」という筆者の結果 [Ba5] を解説する事である。

この結果は Beilinson 予想と呼ばれる L -関数の特殊値に関する予想の p -進版としての解釈も持つ。この為、まずは結果の背景から説明を始める。

F を代数多様体、 X を F 上の smooth な代数多様体とする。このとき Beilinson は regulator 写像と呼ばれる射

$$r_D : H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j)) \rightarrow H_D^i(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R}(j))$$

を定義した。ここで $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))$ は motivic cohomology と呼ばれる $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間で、定義は複雑である。 $H_D^i(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R}(j))$ は Beilinson-Deligne cohomology と呼ばれる実ベクトル空間で、 $X \otimes \mathbb{C}$ に付随する解析空間の Hodge 理論を用いて定義される。Beilinson 予想はこの射を用いて定式化される。

予想 1 (Beilinson 予想). X を F 上の smooth projective な代数多様体とする。この時、 X の L 関数の特殊値は regulator 写像を用いて具体的に記述される。

X に対して Hasse-Weil の L -関数と呼ばれる関数が定義され、非常に良い性質を満たすと思われる。数論幾何では昔から「 L -関数の特殊値は数論的に重要な量を記述している」と信じられ、これに関連して BSD 予想や Deligne 予想など、数々の予想が提唱された。Beilinson 予想はこれらの予想をすべて含む予想である。

本稿の主結果はこの p -進版に関するものであるが、結果を詳しく述べる前にポリログの意義を述べる。Beilinson 予想を解くためには、motivic cohomology の中に元を構成し、regulator 写像による像を具体的に計算する事が必要である。しかし motivic cohomology の定義が複雑である。この為、この中に具体的に元を構成することは難しく、また仮に構成されたとしても一般的には regulator 写像を計算する事が難しい。Beilinson のポリログの理論はこれらの問題を克服する構成法を与える。

Beilinson の結果によって Beilinson-Deligne cohomology は absolute cohomology と呼ばれる種類の cohomology である (これは何らかの混合層の Ext と書ける事を意味する)。また、motivic cohomology は universal な absolute cohomology と期待され、この観点からは regulator 写像は universality によって誘導される射である。

ポリログとはある種の代数多様体の absolute cohomology の中に形式的な方法で定義される元である。構成法は absolute cohomology の性質を用いるだけで充分であり、これゆえ非常に機械的であり、また regulator 写像の様な functorial な射では互いに移り合う。この為、Beilinson-Deligne cohomology の中に構成される ポリログは motivic cohomology のポリログの regulator 写像の像であり、これより Beilinson 予想を検証するためには、Beilinson-Deligne cohomology の中のポリログを計算すれば充分である。

ポリログは現在以下の代数多様体 U に対して定義されている。

1. $U = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (Beilinson [Be2]).
2. E を楕円曲線, e を単位元とした時, $U = E \setminus \{e\}$ (Beilinson-Levin [BL]).
3. U が一般の混合志村多様体の場合 (高次元のアーベル多様体の場合なども含む) (Wildeshaus [W1]).

本稿では Beilinson-Levin が楕円曲線の場合に定義したポリログの p -進版を扱う。筆者の具体的な成果は以下の通りである。

1. p -進の absolute cohomology の理論を構築し、これが Besser [Bes] によって定義された rigid syntomic cohomology (以下 syntomic cohomology) と呼ばれる cohomology と同型である事を証明した。

2. Beilinson-Levine の場合に syntomic cohomology に定義されるポリログを, 楕円曲線が虚数乗法を持ち素数 $p \geq 5$ で good ordinary reduction を持つ場合に具体的に計算し, 楕円曲線の 1 変数 p -進 L -関数の特殊値との関係を記述した.

注 1. Syntomic cohomology のポリログも motivic cohomology のポリログの p -進版 regulator 写像による像であると思われる. この為, 上の結果は Beilinson 予想の p -進類似に対する結果と見なす事ができる. この結果は Coleman-de Shalit の結果 ([CdS] §5.11 Theorem) を含む.

注 2. $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の p -進ポリログの計算は [GK], [G], [So], [Su], [Ba1], [Ba2] 等で扱われている.

2. p -進の ABSOLUTE COHOMOLOGY 理論

この節では p -進の absolute cohomology 理論を解説する. 重要なのは, この理論を Hodge 理論の場合の p -進類似と捕らえる事である. この為 Hodge 理論の場合を説明しながら, 平行して p -進の場合を構築する. Hodge 理論側の諸結果は [BZ] で詳しく紹介されている.

Hodge 理論で基本となるのは混合 Hodge 構造である.

定義 3. 混合 Hodge 構造とは組 $M = (M_0, W_\bullet, F^\bullet)$ で, 以下の性質を満たすものである.

- (i) M_0 は有限次元実ベクトル空間.
- (ii) $W_\bullet$ は weight filtration と呼ばれる M_0 の増大 filtration.
- (iii) $F^\bullet$ は Hodge filtration と呼ばれる $M = M_0 \otimes \mathbb{C}$ の減少 filtration.
- (iv) $\text{Gr}_\bullet^W(M) = \text{Gr}_\bullet^W(M_0) \otimes \mathbb{C}$ に Hodge 分解が与えられる. 即ち, 各整数 j に対して

$$\text{Gr}_j^W(M) = \bigoplus_{m+n=j} F^m \text{Gr}_j^W(M) \cap \overline{F}^n \text{Gr}_j^W(M).$$

混合 Hodge 構造全体の成す圏はアーベル圏である. この圏を MHS と記す.

p を素数, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限拡大, $K_0 = K \cap \mathbb{Q}_p^{\text{ur}}$, $\sigma : K_0 \rightarrow K_0$ を K_0 の Frobenius 同型写像とする. 混合 Hodge 構造の p -進類似とし

て Fontaine の weakly admissible filtered Frobenius module (WAFF-module) がある.

定義 4. WAFF-module とは組 $M = (M_0, \varphi, F^\bullet)$ で, 以下の性質を満たすものである.

- (i) M_0 は有限次元 K_0 -ベクトル空間.
- (ii) φ は Frobenius と呼ばれる σ -linear な自己同型写像. 即ち

$$\varphi(am) = a^\sigma \varphi(m) \quad \forall a \in K_0, \forall m \in M_0.$$

- (iii) $F^\bullet$ は Hodge filtration と呼ばれる $M = M_0 \otimes K$ の減少 filtration.
- (iv) 組 $(M_0, \varphi, F^\bullet)$ は Fontaine の意味で weakly admissible ([Fon] 4.1.4).

最後の条件は Frobenius と Hodge filtration の関係を規定するものである. WAFF-module 全体の成す圏を MF_K^f と記す (講演では類似性を明らかにするため, MF_K^f を MHS_p と書いた). 最後の条件より, この圏はアーベル圏となる事が証明される.

注 5. おおざっぱではあるが, 「 p -進の場合は weight filtration という情報の代わりに Frobenius という情報がある」と思うと類似性が理解しやすい.

次に X を複素数体上の代数多様体とする. Absolute cohomology の係数として X 上の混合 Hodge 構造の良い族を考える必要がある. 即ち付加構造を持つ X 上の local system で, X の各点に引き戻すと MHS を与え, さらに X 上の族として良い性質を満たすものを考える必要がある. これは admissible variation 混合 Hodge 構造で与えられる. Admissible variation 混合 Hodge 構造全体の成す圏を $\mathrm{VMHS}(X)$ と記す.

これの p -進類似を考える. $\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする. X を $\mathcal{O}_K$ 上の smooth な代数多様体で, 更に X の $\mathcal{O}_K$ 上 proper smooth なコンパクト化 $\bar{X}$ で, 補集合 $D = \bar{X} \setminus X$ が $\bar{X}$ の simple normal crossing divisor となるものが存在すると仮定する. この仮定のもとで筆者は WAFF-module の良い族全体の成す圏 $S(X)$ を定義した. これは $\mathrm{VMHS}(X)$

の p -進類似である (講演では $S(X)$ を $\text{VMHS}_p(X)$ と書いた). $S(X)$ の対象を syntomic coefficient と呼ぶ.

上で記した $\text{VMHS}(X)$ や $S(X)$ はいわゆる「smooth な混合層」である. Grothendieck の哲学により, 良い層の理論は六つの関手 $\otimes$, Hom , f^* , f_* , $f^!$, $f_!$ で閉じていなければならない (ここで $f: X \rightarrow Y$ は多様体の射). 「smooth な混合層」は残念ながらこれらの関手で閉じていない. この為, 良い理論を期待するには, より一般的に「perverse な混合層」の圏を考える必要がある.

Hodge 理論の場合は斎藤盛彦によって定義された mixed Hodge module の圏 $\text{MHM}(X)$ が「perverse な混合層」の圏を与える. この圏は $\text{VMHS}(X)$ を部分圏として含み, Grothendieck の六つの関手で閉じている. 講演でも述べたが, 何らかの形で $\text{MHM}(X)$ の p -進版である p -進 Hodge module の圏 $\text{MHM}_p(X)$ が定義されることが期待される. しかし今はまだ $\text{MHM}_p(X)$ の定義が無い.

ここでようやく Hodge 理論の場合の absolute cohomology の定義を述べる事ができる.

定義 6. X を複素数体上の smooth な代数多様体とし, $M \in \text{VMHS}(X)$ とする. M を係数とする X の absolute cohomology $H_{\text{abs}}^i(X, M)$ を

$$H_{\text{abs}}^i(X, M) := \text{Ext}_{\text{MHM}(X)}^i(\mathbb{R}(0), M)$$

と定義する. ここで $\mathbb{R}(0)$ は 1 次元の自明な variation 混合 Hodge 構造.

Beilinson によって, この cohomology は従来からある Beilinson-Deligne cohomology と同型であることが証明された.

命題 7 (Beilinson). X を複素数体上の smooth な代数多様体, $\mathbb{R}(n) \in \text{VMHS}(X)$ を Tate object とする. この時, 標準的な同型

$$H_D^i(X, \mathbb{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H_{\text{abs}}^i(X, \mathbb{R}(n))$$

が存在する.

p -進の場合に戻る. X を $\mathcal{O}_K$ 上の smooth な代数多様体で前述の様なコンパクト化を持つと仮定する. また $M \in S(X)$ とする. もし

p -進 Hodge module の圏 $\mathrm{MHM}_p(X)$ が定義されれば, p -進の absolute cohomology は

$$H_{\mathrm{abs}}^i(X, M) := \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHM}_p(X)}^i(\mathbb{Q}_p(0), M)$$

と定義すれば充分である. 問題は $\mathrm{MHM}_p(X)$ が無い事である. しかし, もし仮に $\mathrm{MHM}_p(X)$ が存在すると仮定すれば, 構造射 $\pi: X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathcal{O}_K$ に関する π_* と π^* の随伴性から, 同型

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{MHM}_p(X)}^i(\mathbb{Q}_p(0), M) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHM}_p(\mathcal{O}_K)}^i(\mathbb{Q}_p(0), R\pi_* M)$$

を得る. ここで $R\pi_* M$ は $\mathrm{MHM}_p(\mathcal{O}_K) := \mathrm{MHM}_p(\mathrm{Spec} \mathcal{O}_K)$ の導来圏 $D^b(\mathrm{MHM}_p(\mathcal{O}_K))$ の対象. また, Hodge 理論の場合 $\mathrm{MHM}(\mathrm{Spec} \mathbb{C}) = \mathrm{MHS}$ と成る事から $\mathrm{MHM}_p(\mathcal{O}_K) = \mathrm{MF}_K^f$ と推測すると, 同型

$$H_{\mathrm{abs}}^i(X, M) := \mathrm{Ext}_{\mathrm{MF}_K^f}^i(\mathbb{Q}_p(0), R\pi_* M)$$

を得る. 即ち p -進の absolute cohomology を定義するには, $R\pi_* M \in D^b(\mathrm{MF}_K^f)$ に意味を持たせれば充分である. 筆者は Beilinson の方法を用いる事によって, $R\pi_* M$ の役割を果たす complex を定義した.

定義 8. X を $\mathcal{O}_K$ の smooth な代数多様体とし, 前述の様なコンパクト化を持つと仮定する. また $M \in S(X)$ とし, $R\pi_* M \in D^b(\mathrm{MF}_K^f)$ を上のような complex とする. M を係数とする X の absolute cohomology $H_{\mathrm{abs}}^i(X, M)$ は

$$H_{\mathrm{abs}}^i(X, M) := \mathrm{Ext}_{\mathrm{MF}_K^f}^i(\mathbb{Q}_p(0), R\pi_* M)$$

と定義する.

Beilinson の結果の類似として, この cohomology が従来からある syntomic cohomology と同型であることを証明した.

命題 9 ([Ba3] Theorem 2). X を上の通りとし, $\mathbb{Q}_p(n) \in \mathrm{VMHS}(X)$ を Tate object とする. この時, 標準的な同型

$$H_{\mathrm{syn}}^i(X, \mathbb{Q}_p(n)) \xrightarrow{\cong} H_{\mathrm{abs}}^i(X, \mathbb{Q}_p(n))$$

が存在する.

注 10. 上の結果には 2つの意義がある.

1. Syntomic cohomology が p -進の absolute cohomology としての解釈を持つ事を示せた.
2. p -進の absolute cohomology は係数付きで定義されている. 上の結果を用いて両 cohomology を同一視すると, syntomic cohomology も係数付きで定義できた事になる.

3. ポリログの定義

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で素数 p で good reduction を持つと仮定する. この仮定により $\mathcal{O}_K$ 上の楕円曲線 E で, $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K = E \otimes_{\mathbb{Q}} K$ を満たすものが存在する. 以後この様な E を 1 つ固定する.

次に

$$\mathcal{H} := H_{\text{crys}}^1(E_k/K)$$

と定義する. ここで $H_{\text{crys}}^1(E_k/K)$ は $E_k := E \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ の crystalline cohomology であり, Hodge filtration $F^\bullet$ と Frobenius の作用 φ を持つ. これより $\mathcal{H}$ を $S(\mathcal{O}_K) = \text{MF}_K^f$ の対象と見なす. $\pi: E \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ を構造射としたとき, $\mathcal{H}$ を引き戻すことにより $S(X)$ の対象 $\pi^*\mathcal{H}$ が定義される. 簡単のため, $\pi^*\mathcal{H}$ も $\mathcal{H}$ と記す.

楕円ポリログを定義する上で重要なのは Log と呼ばれる $S(E)$ の (pro-) object である. 基本的な性質は以下の通りである.

1. Log には sub-object による増大 filtration $W_\bullet$ が存在し,

$$\text{Gr}_\bullet^W \text{Log} = \prod_{j \geq 0} \text{Sym}^j \mathcal{H}^\vee$$

を満たす. ここで $\mathcal{H}^\vee$ は $\mathcal{H}$ の双対.

2. 位数が p と異なる任意の等分点 $u \in E(\mathcal{O}_K)$ に対し,

$$(3.1) \quad u^* \text{Log} = \prod_{j \geq 0} \text{Sym}^j \mathcal{H}^\vee$$

が成り立つ.

楕円曲線 E の単位元を e とし, $U = E \setminus \{e\}$ と置く. この時, syntomic cohomology $H_{\text{syn}}^1(U, \mathcal{H} \otimes \text{Log}(1))$ の元に対して単位元での留数を対応

させる写像

$$\text{Res} : H_{\text{syn}}^1(U, \mathcal{H} \otimes \text{Log}(1)) \rightarrow H_{\text{syn}}^0(\{e\}, \mathcal{H} \otimes \text{Log}) = K$$

が定義される。但し最後の等式は直接的な計算から導かれる自然な同型。

定義 11. p -進楕円ポリログ pol は

$$\text{pol} := \text{Res}^{-1}(1)$$

で定義される $H_{\text{syn}}^1(U, \mathcal{H} \otimes \text{Log}(1))$ の元である。

4. 主結果

この章では楕円曲線 E が虚 2 次体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ で虚数乗法を持つと仮定する。即ち同型

$$[\] : \mathcal{O}_K \cong \text{End}_K(E)$$

の存在を仮定する。更に E が素数 $p \geq 5$ で *good ordinary reduction* を持つ事を仮定する。この条件は (p) が $\mathcal{O}_K$ で $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$ と異なる 2 つの素イデアルの積に分解される事と同値である。このとき、 $\mathcal{H}$ は

$$(4.1) \quad \mathcal{H} = K\omega \oplus K\eta$$

と 2 つの 1 次元 filtered Frobenius module の直和に分解される。但し ω (resp. η) は $a \in \mathcal{O}_K$ に対する引き戻し写像 $[a]^*$ が a 倍 (resp. a の複素共役倍) で作用する $\mathcal{H}$ の元である。

$\mathcal{O}_K$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し、 K の $\mathfrak{a}$ による類体を $K(\mathfrak{a})$ と記す。 ψ を $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ に対応する $A_K^\times$ の量指標、 f をその conductor とする。また埋め込み $i_p : K(f) \hookrightarrow K$ を 1 つ固定する。 $\mathcal{G} := \text{Gal}(K(\mathfrak{f}p^\infty)/K)$ の指標 $\psi_p : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$ を

$$\psi_p(\sigma_{\mathfrak{a}}) = \psi(\mathfrak{a}), \quad \sigma_{\mathfrak{a}} = [a, K(\mathfrak{f}p^\infty)/K], \quad (a, \mathfrak{p}f) = 1$$

で与える。

本稿で扱う 1 変数 p -進 L -関数 $L_p(-)$ とは、 $\mathcal{G}$ の p -進連続な指標全体の成す群 $\text{Hom}_{\text{cont}}(\mathcal{G}, \mathbb{C}_p^\times)$ 上の関数であり、任意の整数 $j < 0$ に対

して

$$\Omega_p^j L_p(\psi_p^j) = \left(1 - \frac{\psi^{-j}(p)}{p}\right) \Omega^j L_\infty(\psi^j, 0)$$

を満たすという性質で特徴付けられている。但し $\Omega \in \mathbb{C}^\times$ は complex period, $\Omega_p \in W(\bar{k})^\times$ は p -進 period, $L_\infty(\psi^j, 0)$ は ψ^j の complex L -関数の 0 での値, $L_p(\psi_p^j)$ は p -進 L -関数の指標 ψ_p^j での値である。

本稿の主結果は, 1 変数 p -進 L -関数の ψ_p^j ($j \geq 0$) での値に関するものである。

$E[f] \subset E(K(f))$ を E の f 等分点からなる群とし, v を $E[f]$ の primitive な点とする。これは i_p によって $E[f] \subset E(\mathcal{O}_K)$ の primitive な点に対応し, これも v と記す。この時, $v^* \text{pol}$ は

$$H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_K, v^* \mathcal{H} \otimes \text{Log}(1)) \stackrel{(3.1)}{=} \prod_{j \geq 0} H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_K, \mathcal{H} \otimes \text{Sym}^j \mathcal{H}^\vee(1))$$

の元である。分解 (4.1) の直積成分への全射から誘導される写像

$$H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_K, \mathcal{H} \otimes \text{Sym}^j \mathcal{H}^\vee(1)) \rightarrow H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_K, K\omega \otimes \omega^{\vee j}(1))$$

と Frobenius 写像の計算から導かれる自然な同型

$$H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_K, K\omega \otimes \omega^{\vee j}(1)) = \begin{cases} K & (j \geq 1) \\ 0 & (j = 0) \end{cases}$$

との合成によって射

$$H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_K, v^* \mathcal{H} \otimes \text{Log}(1)) \rightarrow \prod_{j \geq 1} K$$

が定義される。簡単の為, この射による $v^* \text{pol}$ の像も $v^* \text{pol}$ と記す。本稿の主結果は以下の通りである。

定理 1 ([Ba5] Theorem 7.1).

$$\sum_{\sigma \in \text{Gal}(K(f)/K)} \sigma(v)^* \text{pol} = ((-1)^{j-1} \Omega_p^{j-1} L_p(\psi_p^{j-1}))_{j \geq 1}.$$

証明の概略は [Ba6] に譲る。上の結果は, p -進 L -関数の ψ_p^{j-1} ($j \geq 1$) での値が, p -進楕円ポリログで記述されていると述べている。ポリログは構成より motivic である。これゆえ, 上の結果は Beilinson 予想の p -進版と思う事ができる。

注 12. $j = 2$ の直積成分に制限すると, この結果は実質的に Coleman-de Shalit の結果 ([CdS] §5.11 Theorem) である.

REFERENCES

- [Ba1] K. Bannai, Rigid syntomic cohomology and p -adic polylogarithms, *J. Reine Angew. Math.* **529** (2000), 205-237.
- [Ba2] K. Bannai, On the p -adic elliptic polylogarithm for CM-elliptic curves, 博士論文, 東京大学 (2000).
- [Ba3] K. Bannai, Rigid syntomic cohomology と p -進 polylogarithm, 京大数理研講究録 1154 (2000), 22-32.
- [Ba4] K. Bannai, Syntomic cohomology as a p -adic absolute Hodge cohomology, preprint, UTMS 2000-31.
- [Ba5] K. Bannai, On the p -adic realization of elliptic polylogarithms for CM-elliptic curves, preprint, UTMS 2000-61.
- [Ba6] K. Bannai, 虚数乗法を持つ楕円曲線の p -進ポリログと p -進 L -関数, 津田塾大学整数論シンポジウム (2000) 報告集 (掲載予定).
- [Be1] A.A. Beilinson, Notes on absolute Hodge cohomology, In: *Appl. of Alg. K-theory to Alg. Geometry and Number Theory*, *Contemp. Math* **55**, AMS (1986), 35-68.
- [Be2] A.A. Beilinson, Polylogarithm and Cyclotomic Elements, typewritten preprint, MIT (1989) or (1990).
- [BL] A.A. Beilinson and A. Levine, The elliptic polylogarithm, In: *Motives*, Proceedings Seattle 1991, Providence, RI : AMS Proc. Symp. Pure Math. **55** (1994), Pt. 2, 123-190.
- [Bes] A. Besser, Syntomic Regulators and p -adic Integration I: Rigid Syntomic Regulators, to appear in *Israel. J. Math.*
- [BZ] J.-L. Brylinski and S. Zucker, An Overview of Recent Advances in Hodge Theory, In: *Several Complex Variables VI*, *Encycl. of Math. Sciences* **69**, Springer-Verlag (1990).
- [CdS] R. Coleman and E. de Shalit, p -adic regulators on curves and special values of p -adic L -functions, *Invent. math.* **93** (1988), 239-266.
- [Fon] J.-M. Fontaine, Modules Galoisien, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Astérisque* **65** (1979), 3-80.
- [GK] M. Gros, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p -adiques I (avec un appendice par Masato Kurihara), *Invent. Math.* **99** (1990), 293-320.
- [G] M. Gros, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p -adiques II, *Invent. Math.* **115** (1994), 61-79.

- [So] M. Somekawa, Log-syntomic regulators and p -adic polylogarithm, *K-Theory* 17 (1999), 256-294.
- [Su] S. Sugimoto, Filtered modules and p -adic polylogarithms, thesis, University of Tokyo (1992).
- [W1] J. Wildeshaus, *Realizations of Polylogarithms*, SLN 1650, (1997).
- [W2] J. Wildeshaus, On the Eisenstein Symbol, preprint (2000).

東京大学大学院数理科学研究科

E-mail address: bannai@ms357.ms.u-tokyo.ac.jp