

可換環の Brauer 群

東京教育大・理 遠藤 静男

序. ここでは「Scheme の Brauer 群」に関する後の報告の準備として、環の Brauer 群について現時点までに得られている諸結果を整理して解説する。

環の Brauer 群の研究は 1951 年の東屋 [8] を起源とする。[8] では主として Hensel 的局所環について考察しているが、ついで 1960 年の Auslander-Goldman [5] においてより広範囲の基礎的結果が示された。[5] は環論における種々の方向に関する問題を提起しているため多くの研究者の興味をよび、中でも Galois 理論、整環の理論、多変数環論等についてはこれまでにかなり深い研究がなされてきた。しかし中心課題である Brauer 群自身の研究は本文で見られるようにその後あまり進展してはいない。

後の報告でとり上げられる Grothendieck [20] による結果は [8], [5] の代数幾何学への応用として重要な意味をもつ。

かと思われる。基礎的側面だけを見ても体の場合と異なつて環の場合には不十分な Galois cohomology の代りに étale cohomology を用いることにより、多くの重要な環について Brauer 群が 2 次の cohomology 群でみらされることを示している点は特に重要である。

体の Brauer 群に関する基礎的結果は多くの成書に見られるのでここでは述べる必要はないことにする。これより体の Brauer 群は数論において特に基本的な役割を果たしてきた。Scheme の Brauer 群の研究はもろろんこれらの結果を踏まえて進めなければならない。そこで体の場合にも数論との関係で得られた諸結果について説明を与えることにする。

なおページ数の関係から本文中では証明はすべて省略することにした。その代り各定理に文献を明示してあるのが必要の場合にはそれらを参照していただきた。末尾の文献表はこの報告の基礎になる成書、論文、および直接引用した論文にのみ、と掲げてあり、完全な文献表とはいいないことを注意しておく。

本文中では環はすべて単位元をもつものとし、環上の加群はすべて単位元が恒等写像として作用するものとする。また可換環を $R, S, \dots$ 等であらわし、必ずしも可換でない環を $\Lambda, \Gamma, \dots$ 等であらわすことにする。環 Λ が R -多項式環

とあるとは R から Λ の中心への標準同型 φ 単位元を単位元に写すものが与えられることを意味する。 R -多え環 Λ と逆同型な R -多え環 Λ° とあるからことにする。

§ 1. 分離多え環, Brauer 群の定義

R -多え環 Λ と Λ 自身を Λ 上の Λ -加群として射影的であるようなものを R 上分離的な多え環, または 分離 R -多え環 といい ([5]). 分離 R -多え環 Λ が R -加群として射影的になると, Λ は有限生成 R -加群であり, 特に R が体のときには, 分離 R -多え環ということと R 上有限次元の絶対半単純多え環ということと同じである。これより分離 R -多え環を考えたときには R -加群として有限生成のものだけ考えてもそれほど一般性は失われないう。

分離多え環の定義に関連した以下の定理は重要である。

定理 1.1 ([5], [18]). R -加群として忠実かつ有限生成の R -多え環 Λ に対し以下の条件は同値である。

- (1) Λ が R 上分離的である。
- (2) R の各極大イデアル m に対し Λ_m が R_m 上分離的である。
- (3) R の各極大イデアル m に対し $\Lambda/m\Lambda$ が R/m 上分離的である。

分離 R -多え環で中心が R と一致するもの、すなわち中心的分離 R -多え環を、簡単に 東屋 R -多え環 とよぶ ([8], [11]).

まず東屋 R -多え環の特徴づけを与える。

定理 1.2 ([5]). R -多え環 Λ が東屋 R -多え環であるために必要十分な条件は Λ が R -加群として忠実かつ有限生成射影的であり、かつ $\Lambda \otimes_R \Lambda^o \cong \text{End}_R(\Lambda)$ となることである。

これは森田 ([26]) の定理の応用として直接示される。[8] で最初に与えられた定義はこの定理の条件によるものである。

可換環 R 上の有限生成射影的加群の階数 1 のものの同型類からなる集合は $\otimes_R$ により積を定めると群をなす。これを R の Picard 群 といい、 $\text{Pic}(R)$ でありわす。また R -多え環 Λ の R -自己同型群の内部自己同型群による剰余類群を Skolem-Noether 群 といい、 $\text{Sk-N}(\Lambda)$ でありわすことにする。

Skolem-Noether の定理は > のように一般化され > いる。

定理 1.3 ([5], [29]). Λ を東屋 R -多え環とするとき、 Λ の R -自己準同型はすべて自己同型であり、かつ $\text{Sk-N}(\Lambda) \subseteq \text{Pic}(R)$ とみなされる。これより特に $\text{Pic}(R) = 0$ なら、 Λ の R -自己準同型はすべて内部自己同型である。

P を忠実かつ有限生成射影的 R -加群とするとき、明らかに $\text{End}_R(P)$ は東屋 R -多え環である。いまこのような型のものを

の R -多え環として同型な東屋 R -多え環を 分解型の東屋 R -多え環 とおぐこととする。

この東屋 R -多え環 Λ_1, Λ_2 に対して $\Lambda_1 \otimes_R \Lambda_2$ はまた東屋 R -多え環となるので、 R 上の東屋多え環の全体からなる集合は $\otimes_R$ により群となっている。いまこの東屋 R -多え環 Λ_1, Λ_2 に対して

$$\Lambda_1 \otimes_R \Gamma_1 \cong \Lambda_2 \otimes_R \Gamma_2$$

となるような分解型の東屋 R -多え環 Γ_1, Γ_2 があるとき、 $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ とおくと、 $\sim$ は同値関係と定める。この同値類の集合を $B_R(R)$ とあらわすことにする。このとき $\otimes_R$ よりひき起された積に関して $B_R(R)$ はアーベル群となる。実際単体 e は分解型の e が属する類であり、 Λ が属する類の逆元は (1.2) より Λ° が属する類のことがわかる。 $B_R(R)$ を可換環 R の Brauer 群 といい ([20] の言葉でいうと, affine scheme $\text{spec } R$ の (étale site の) Brauer 群ということである)。

Λ を東屋 R -多え環とするとき、任意の可換 R -多え環 S に対して $S \otimes_R \Lambda$ は東屋 S -多え環になる。これより群準同型 $B_R(R) \rightarrow B_R(S)$ がひき起される。この核を $B_R(S/R)$ と表わすことにする。東屋 R -多え環 Λ に対して $S \otimes_R \Lambda$ が S 上で分解型となるような可換 R -多え環 S を Λ の 分解環 といい

特に S が R 上忠実のとき, 固有分解環 ということにする。

このとき $B_n(S/R)$ は S を分解環としてもつような東屋 R -多
え環の類全体からなる $B_n(R)$ の部分群 ということができる。

§ 2. 可換環の分離拡大, Galois 拡大, 分離閉被

可換 R -多え環 S が R -加群としての忠実かつ有限生成射影的であり R 上分離的であるとき, S を R の 分離拡大 ということにする。また S を可換 R -多え環, G を S の R -自己同型からなる有限群とすると, 次の条件がみたされなければならない, S を Galois 群 G をもつ R の Galois 拡大 ということ ([5], [14], [19])。

i) S は R の分離拡大である。

ii) $R = S^G$

iii) 相異なる σ の G の元 σ , τ , あるいは S の 0 でない中
等元 e に対して $\sigma(s)e \neq \tau(s)e$ となるような S の元 s がある。

この定義の下に可換環にこの条件も体の場合とほとんど同様の形の Galois 理論が構成されることが ([14])。しかしここではこれ以上深く立ち入らないことにする。

定理 2.1 ([5], [24], [33]). S が R の分離拡大なら, S は R のある Galois 拡大 $\tilde{S}$ に含まれる。ここで S が連結なら $\tilde{S}$ も連結になる。

この分離閉被の概念を拡張しよう。

定理 2.2 ([24]). 連結な可換環 R に対して $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{p}$ の性質をもつような連結な可換 R -忠実多え環 $R_{\mathfrak{p}}$ が存在する。

i) 有限個の元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in R_{\mathfrak{p}}$ に対して α_i を $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{p}$ の R の分離拡大 S の $R_{\mathfrak{p}}$ の部分環となるものがある。

ii) $R_{\mathfrak{p}}$ の分離拡大で連結なものは $R_{\mathfrak{p}}$ 自身としかない。

しかもこのような $R_{\mathfrak{p}}$ は R -同型なものと同一視するとただ一つしかない。

(2.2) で定まった $R_{\mathfrak{p}}$ を R の 分離閉包 とする。

§3 東屋多え環の固有分解環

東屋 R -多え環の固有分解環に關しては $\mathfrak{p}$ の定理は基本的である。

定理 3.1 ([5], [15]). Λ を東屋 R -多え環とし、 S を Λ の極大可換 R -部分多え環で Λ が S 上射影的であるようなものとするとき、 S は Λ の分解環である。また S が R -加群として忠実かつ有限生成射影的な可換 R -多え環で、ある東屋 R -多え環 Γ の分解環となつていゝものとするとき、 Γ と同値な東屋 R -多え環 Λ で S を極大可換 R -部分多え環とするものがある。

(3.1) により東屋 R -多え環 Λ に対して R の分離拡大であるような極大可換 R -部分多え環を見出せるなら、 Λ に R の分離拡大である固有分解環が存在することがわかるので、更に (2.1)

を用いて, Galois 拡大であるような固有分解環の存在が確かめられる。

有限半局所環の場合には下記の定理がある。

定理 3.2 ([5], [16], [18]). R が半局所環なら, すべての東屋 R -多え環は極大可換分離 R -部分多え環をもつ。したがって東屋 R -多え環は R の分離 (Galois) 拡大であるような分解環をもつ。特に R が Hensel 的局所環なら, 分解環も局所環になる。

系 ([16]). R が連続な半局所環とあるとき $B_n(R_s) = 0$ 。

しかし一般の可換環については東屋 R -多え環は分離拡大と分解環としてまたなすことがあり, また $B_n(R_s) \neq 0$ となることもある。たとえば $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数環 R は分離的にゆじに単位イデアル環であるが $B_n(R) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり, $\mathbb{I}$ に対応する東屋 R -多え環は 11 かなる分離拡大でも分解しない ([36] および後述の (7.5))。

このため Galois cohomology では Brauer 群は完全には記述できないことになる, 環の Brauer 群の研究は困難なものとなる。そこで Grothendieck による étale cohomology が重要な意味をもつことになる。(3.2) は後に $B_n(R)$ を 2 次の étale cohomology 群と関係づけるときに重要な役割をすることになる。

これを "分離拡大" であるような分解環の存在により考え
てみたが, 全く一般の可換環 R に対しては東屋 R -多え環が固
有分解環をもつかどうかさえわからな。しかし R の全商
環が半局所的なとき (たとえば R が Noether 的のとき), (3.2)
より R -平坦な固有分解環の存在がわかる。これを用いて
一般の可換環 R 上の東屋多え環に被約トレースが定義でき,
東屋 R -多え環が "対称多え環" であることを示せる ([18])。なお
最近 R. Hoobler は Noether 環 R が $\mathbb{Q}$ を含むか 標数 > 0
のときには東屋 R -多え環は R -加群として有限生成, 忠実に
平坦な固有分解環をもつことを示し, これを用いて $B_2(R)$
がある種の 2 次の cohomology 群であることを証明した。

§ 4. Galois cohomology と Amitsur cohomology

可換環 R の単元 (正則元) 全体のなす群を $U(R)$ とする。
ことにする。

L/K を体の有限次 Galois 拡大とすると,

$$H^1(G, U(L)) = 0, \text{ (Hilbert の 定理 90)}$$

であり, また 2-cocycle に接合積を対応させることにより,

$$H^2(G, U(L)) \cong B_2(L/K)$$

となることはよく知られている。これは可換環に対してはつ
ぎのように一般化される。

定理 4.1 ([5], [14], [37]). S は R の Galois 拡大とし, G は S/R の Galois 群とすると, 次の完全系列がある.

$$0 \longrightarrow H^1(G, \mathcal{U}(S)) \longrightarrow \text{Pic}(R) \longrightarrow H^0(G, \text{Pic}(S)) \\ \longrightarrow H^2(G, \mathcal{U}(S)) \longrightarrow \text{Br}(S/R) \longrightarrow H^1(G, \text{Pic}(S)) \longrightarrow H^3(G, \mathcal{U}(S)).$$

特に R が半局所環のときには

$$H^1(G, \mathcal{U}(S)) = 0, \quad H^2(G, \mathcal{U}(S)) \cong \text{Br}(S/R).$$

(3.2), (4.1) より半局所環に対しては体の場合と同様に Galois cohomology は有用であることがわかる。最近神崎氏 ([37]) は Picard 群をも考慮に入れた接合種の拡張概念として一般接合種を定義し, それによ, $\text{Br}(S/R)$ を完全に記述することに成功された。

Galois cohomology はもちろん Galois 拡大のみに有効な cohomology 論であるが, 一般の可換 R -多項式環に関する cohomology 論としては Amitsur cohomology とは知られるものがある ([2], [28]).

IK は可換 R -多項式環の圏とするとき, IK の対象 S に対して

$$S^n = \overbrace{S \otimes_R S \otimes_R \cdots \otimes_R S}^n, \quad n \geq 1 \text{ とおき, } IK \text{ の射 } \varepsilon_i^{(n)}: S^{n+1} \longrightarrow$$

$$S^{n+2}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \quad n \geq 0 \text{ を } \varepsilon_i^{(n)}(s_0 \otimes s_1 \otimes \cdots \otimes s_n)$$

$$= s_0 \otimes \cdots \otimes s_{i-1} \otimes 1 \otimes s_i \otimes \cdots \otimes s_n \text{ として定める。 } IK \text{ からアーベル}$$

$$\text{群の圏 } \text{Ab} \text{ への共変函手 } F \text{ に対して } n\text{-cochain } \in C^n(S/R, F)$$

$$= F(S^{n+1}), \quad n \geq 0, \quad n\text{-coboundary } d^n: C^n(S/R, F) \longrightarrow$$

$C^{n+1}(S/R, F)$ を $d^n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k F(\varepsilon_k^{(n)})$ により定めるとき,

$C(S/R, F)$ は cochain complex となる。この complex の cohomology 群を $H(S/R, F)$ と表す。このとき、 S の F 係数の

Amitzur cohomology 群 とする。このとき IK から Ab への共

変関手の完全系列 $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ に対し

cohomology 完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^{n-1}(S/R, F') &\rightarrow H^n(S/R, F') \rightarrow H^n(S/R, F) \\ &\rightarrow H^n(S/R, F'') \rightarrow H^{n+1}(S/R, F') \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る。

Brauer 群に關しては (4.1) とよく似たことの定理がある。

定理 4.2 ([2], [28], [15]). S を可換 R -多項式環とし、 R -加群とし

と想定し、有限生成射影的なものとするとき、次の完全系列がある。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(S/R, U) &\rightarrow \text{Pic}(R) \rightarrow H^0(S/R, \text{Pic}) \\ &\rightarrow H^2(S/R, U) \rightarrow \text{Br}(S/R) \rightarrow H^1(S/R, \text{Pic}) \rightarrow H^3(S/R, U). \end{aligned}$$

特に R が半局所環なら

$$H^1(S/R, U) = 0, \quad H^2(S/R, U) \cong \text{Br}(S/R).$$

Galois cohomology との関係については次の結果がある。

定理 4.3 ([2], [15]). S を R の Galois 拡大とし、 G をその

Galois 群、 F を IK から Ab への有限個の積を保存する

共変関手とするとき、

$$H^2(G, F(S)) \cong H^2(S/R, F).$$

L/K が体の純非分離拡大のとき, $Br(K) \longrightarrow Br(L)$ は全準同型であることが知られている ([23]). 特に L/K が有限次で exponent 1 の拡大のとき Hochschild [23] により $Br(L/K)$ は L/K の derivation からなる制限 Lie 多環の cohomology として表わされることが示された. Amitsur が上述の cohomology を考えたのは Galois cohomology とこのような cohomology を統一するためであった. Amitsur cohomology は体 K の Brauer 群 $Br(K)$ の p -準素成分を研究するのに役だつ (ここに p は K の標数を表わす). L/K が体の純非分離拡大のとき $Br(L/K) \cong H^2(L/K, U)$ であり, $q > 2$ のとき $H^q(L/K, U) = 0$ のことが知られている. また Amitsur cohomology を用いて p -多環の基礎理論 ([1]) を整理することが可能になってい ([35]).

(4.2) により半局所環 R に対しては, Amitsur cohomology は体のときと同様に有用である. しかし全く一般の可換環 R に対しては §3 で述べた理由によりあまり有効ではない.

§ 5. 半局所環の Brauer 群.

R を連結な半局所環とするとき, (3.2), (3.2) の系および (4.1) より

$$B_2(R) = B_2(R_s/R) = \bigcup_T B_2(T/R)$$

$$= \varinjlim_T H^2(G(T/R), U(T)) = H^2(G(R_s/R), U(R_s)).$$

ここで T は分離閉被 R_s の部分 R -多項式環で R の Galois 拡大であるものの全体を動くものとする。

R を Hensel 的局所環とし $\mathfrak{m}_R$ をその最大イデアルとすると R_s は $\mathfrak{m}_R R_s$ を最大イデアルとする Hensel 的局所環となり $R_s/\mathfrak{m}_R R_s$ は $R/\mathfrak{m}_R$ の分離閉被と一致する。

また R を Noether 的局所整域域とすると、 R_s も整域域であり、 R_s の商体は R の商体 K の分離閉被 K_s の部分体となる。これを K_{ur} と表わし、 R の商体 K の 極大不分岐拡大体 とよぶ。ここで更に R が Hensel 的な K_{ur}/K の Galois 群は $R/\mathfrak{m}_R$ の分離閉被の Galois 群と一致する。

定理 5.1 ([8]). R を Hensel 的局所整域域とし $\mathfrak{m}_R$ をその最大イデアルとすると、自然な環準同型 $R \rightarrow R/\mathfrak{m}_R$ により Brauer 群の同型: $B_2(R) \cong B_2(R/\mathfrak{m}_R)$ が引き起これる。

11. R を $\mathbb{Z}$ に階数 1 の離散的付値環で Hensel 的なものとするとき R の連続な Galois 拡大 T はまた離散的付値環であり、 $G = G(T/R)$, L をその商体とすると、 G -加群としての分解完全系列

$$0 \longrightarrow U(T) \longrightarrow U(L) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

が生じる。これより $q \geq 0$ により分解完全系列

$$0 \longrightarrow H^q(G, \mathcal{O}(T)) \longrightarrow H^q(G, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow H^q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

を得る。 $q = 2$ の場合 (5.1) より $>$ の定理が成り立つ。

定理 5.2 (Witt-中山, [31]). R は階数 1 の離散赋值環
とし Hensel 的なものとし, K, k はそれぞれ R の商体, 剰余
体, G は k_s/k の Galois 群とするとき, $>$ の分解完全系
列がある。

$$0 \longrightarrow Br(k) \longrightarrow Br(K_{ur}/K) \longrightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

特に k が完全体ならば $Br(K_{ur}/K) = Br(K)$ である。また $R,$
 k が同じ標数 $p > 0$ を持ち, または R の標数 0 として k の標数 $p > 0$
とし R が 1 の原始 p 乗根を含む場合には, k が完全体 q と
なるとき $Br(K_{ur}/K) = Br(K)$ となる。

Hensel 的という仮定を除くとき, (5.2) は $>$ のように一
般化される。

定理 5.3 ([6], [38]). R は階数 1 の離散赋值環とし, K
はその商体, G は剰余体の分離閉包の Galois 群とするとき,
 $>$ の分解完全系列がある。

$$0 \longrightarrow Br(R) \longrightarrow Br(K_{ur}/K) \longrightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

(5.2) の後半の事柄も全く同様に成り立つ。

(5.3) より, 階数 1 の離散赋值環 R に対し, 剰余体が
完全体であり, $[G, G] = G$ のときには $Br(R) = Br(K)$ となる
ことがわかる。

§ 6. Brauer 群が 0 であるような体, 数体の Brauer 群

体 K が γ の条件をみたすとき, K を擬代数的体, また

は (C_1) -体 といい ([25]).

(C₁) 次数 $d > 0$ の K の元を係数とする同次多項式

$f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が $(0, 0, \dots, 0)$ だけを零点としてもつとき

, 必ず $d \geq n$ である.

(C_1) -体としてはいくつかの有名なものがある.

i) 代数的体

ii) 有限体

iii) 代数的体 k 上の一変数有理函数体 $k(X)$. (Tsen の

定理).

iv) R を階数 1 の定係数代数的付随環で剰余体が完全体である

ようなものとするとき, R の商体 K の拡大不分解拡大体 K_{ur} .

定理 6.1 ([25]). 体 K が (C_1) -体であるとき, γ の事柄

が成り立つ.

(1) $B_r(K) = 0$.

(2) K の代数拡大体はすべて (C_1) -体である.

(3) K の有限次拡大体 L に対し $N_{L/K}(U(L)) = U(K)$ となる.

一方 γ の定理が知られていない.

定理 6.2 (Tate, [32]). 体 K に γ である γ の三つの条件は

同値である.

(1) K の任意の代数拡大体 L に対し $Br(L) = 0$.

(2) K の任意の Galois 拡大体 L に対し, $\bar{U}(L)$ が $G(L/K)$ -加群として cohomologically trivial である.

(3) (2) と同じ L/K に対し $N_{L/K}(\bar{U}(L)) = \bar{U}(K)$ である.

ここに (1), (3) は K の有限次分離拡大に拡張される.

(6.2) における同様な条件をみたす体 K を $\dim K \leq 1$ の体 と言う ([32]). これは [32] の言葉で "it is known that, and vice versa, K has cohomological dimension ≤ 1 " である. ことと同じである.

明らかに分離的に閉じた体は $\dim K \leq 1$ である.

定理 6.3 ([32]). 体 K が (C_1) -体ならば $\dim K \leq 1$ である.

K の標数 $p > 0$ のとき $[K : K^p] = 1$ または p となる.

しかしこの定理の逆は正しくない (Ax の例, [9]).

また $Br(K) = 0$ であるとしても $\dim K \leq 1$ ではない (Auslander の例, [32] の付録).

次に数体の Brauer 群について述べよう. これは類体論において重要な役割をなすものである.

i) $\mathcal{O}$ を実数体とするとき $Br(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

ii) p -進体またはより一般に剰余体 k が有限体であるような階数 1 の離散付位環 $\mathcal{O}$ に対して Hensel 的なものの商体 K に対し $Br(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ となる. これは (5.2) から直接示される.

iii) K を数体とし, $\hat{K}_v$ を K の付値 v による完備化とすると
 また, i), ii) も

$$B_n(\hat{K}_v) = \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & : v \text{ が離散的のとき} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} (\subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \hat{K}_v = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ 0 & : \hat{K}_v = \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

4.1.2. の有名な定理がある.

定理 6.4 (Hasse, [3], [17]). K を数体とし, $\hat{K}_v$ を K の付
 値 v による完備化とすると, 2. の完全系列がある.

$$0 \longrightarrow B_n(K) \xrightarrow{f} \prod_v B_n(\hat{K}_v) \xrightarrow{g} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

ここで $\hat{K}$ は K の付値全体にわたる $\mathbb{Z}$ とするものとする. また f
 は自然な準同型 $B_n(K) \longrightarrow \prod_v B_n(\hat{K}_v)$ から引き起こされたものとし
 , g は $g((\alpha_v)) = \sum_v \alpha_v$ により定まるものとする.

最近真屋氏は, A_K を K の Adèle 環とすると $B_n(A_K) =$
 $\prod_v B_n(\hat{K}_v)$ となることを証明された.

有限体 k 上の一変数の函数体に 4.1.2. も (6.4) と同様の完
 全系列の存在がわかる. なお有限体 k 上の一変数函数体の
 Brauer 群の構造に関しては最近 [38] により精密な研究が
 なされたことが, ここで触れたいことにする.

§ 7 整閉整域の Brauer 群

R を整域とし, K をその商体とすると, 自然な埋入準同

型 $R \rightarrow K$ により Brauer 群の準同型 $Br(R) \xrightarrow{\Phi} Br(K)$ がひき起これる。重は一般には単準同型ではない。また R が Noether 的整閉整域のとき、重が単準同型となるための条件を与えよう。

定理 7.1 ([5], [7]). R を Noether 的整閉整域, K をその商体とするとき, R に対し (2) の条件は同値である。

- (1) 重が単準同型である。すなわち $Br(R) \subseteq Br(K)$ 。
- (2) 有限生成, 反射的 R -加群 E に対し $\text{Hom}_R(E, E)$ が R -射影的であるようなものに対し, $E \cong P \otimes \Omega$ となるような射影的 R -加群 P と R の反射的イデアル Ω が与えられる。

(7.1) は [7] にあるような一般的事柄を用いずに, 直接容易に証明できる (筆者による注意)。

系 ([5]). R を正則整域, K をその商体とするとき, $Br(R) \subseteq Br(K)$ である。

一般に重の核を記述する方法は [7], [20] に与えられている。

系より, R が正則整域の場合には R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し

$$Br(R) \subseteq Br(R_{\mathfrak{p}}) \subseteq Br(K)$$

となることがわかるので, R の局所化の Brauer 群との関係を調べることも可能になる。

定理 7.2 ([5]). R を正則整域とし $\text{Knull dim } R \leq 2$ なるも

のとき

$$B_n(R) = \bigcap_{\text{ht}_R \mathfrak{p} = 1} B_n(R_{\mathfrak{p}}).$$

(7.2) の証明には, 任意の中心局半環 R の多項式環 $R[X]$ の中に極大 R -整環 S が R 上射影的なものがあることが基本的である。一般の正則整域に ≥ 1 の n のことが示されるから, (7.2) から Krull 次元に関する仮定を除くことができる。しかしこれは現在のところ未解決の問題である。

> 3 に特殊な型の正則整域として体 K の上の多項式環 $K[X_1, \dots, X_n]$ に ≥ 1 のことを考える。

一般に環 R を係数環とし, 不定元 $X_1, X_2, \dots, X_n$ をもつ多項式環, 形式的中環数環とそれぞれ $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$, $R[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$ であることにする。このとき $B_n(R)$ は $B_n(R[X_1, X_2, \dots, X_n])$, $B_n(R[[X_1, X_2, \dots, X_n]])$ の直和因子となる。形式的中環数環に ≥ 1 の (4.1) の証明と同様の方法で, 実際 $B_n(R) = B_n(R[[X_1, X_2, \dots, X_n]])$ となることがわかる。(しかし多項式環に ≥ 1 の事情はかなり複雑である。

定理 7.3 ([5], [28]). K を体とし, X を ≥ 1 の不定元とするとき, $B_n(K) = B_n(K[X])$ となるための必要十分条件は K が完全体のことである。 K の標数 $\leq p > 0$ とするとき, 一般に $B_n(K[X]) \rightarrow B_n(K)$ の核は p -準素環である。

系 ([5]). R を標数 0 の正則整域とすると, $B_n(R) =$

$B_2(R[X_1, X_2, \dots, X_n])$ である。

Amitzur cohomology と (7.3) を用いて, (5.2) は上記のように一般化できる。

定理 7.4 ([34]). R を階数 1 の定備離散的付値環とし, K , k をそれぞれ R の商体, 剰余体, G を k_s/k の Galois 群とし, 更に K, k の標数がともに $p > 0$ と仮定する。このとき上記の分解完全系列がある。

$$0 \longrightarrow B_2(k[X]) \longrightarrow B_2(K) \longrightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

最後に数体の整数環に関する結果を挙げる。

定理 7.5 ([20]). K を数体とし, R をその整数環とする。 l を K の付値 v_l の定備化が $\mathbb{Q}$ であるようなものの個数とし (すなわち素無限素数の個数), $r = \max(0, l-1)$ とおくとき $B_2(R) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ となる。したがって K が純虚数体のときには $B_2(R) = 0$ であり, また $B_2(\mathbb{Z}) = 0$ である。

これは (6.4) より直接示される。

参考文献

- [1] A.A.Albert, Structure of algebras, Publ.A.M.S., 1939.
- [2] S.A.Amitsur, Simple algebras and cohomology groups of arbitrary fields, Trans.A.M.S., 90(1959), 73-112.
- [3] E.Artin and J.Tate, Class field theory, Harvard Univ. Press, 1961.
- [4] M.Auslander and O.Goldman, Maximal orders, Trans.A.M.S., 97(1960), 1-24.
- [5] ———, The Brauer group of a commutative ring, Trans.A.M.S., 97(1960), 367-409.
- [6] M.Auslander and A.Brumer, Brauer groups of fields with discrete rank one valuation, A.M.S. Notices, 11(1964), 119.
- [7] B.Auslander, The Brauer group of a ringed space, J.Algebra, 4(1966), 220-273.
- [8] G.Azumaya, On maximally central algebras, Nagoya Math. J., 2(1951), 119-150.
- [9] J.Ax, Proof of some conjectures on cohomological dimension, Proc.A.M.S., 16(1965), 1214-1221.
- [10] H.Bass, Topics in algebraic K-theory, Tata Inst., Bombay, 1967.
- [11] N.Bourbaki, Algèbre commutative, Chap. I-II, Hermann, Paris, 1961.
- [12] R.Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, Math. Zeit., 30(1929), 79-107.
- [13] H.Cartan and S.Eilenberg, Homological algebra, Princeton Univ.Press, 1956.
- [14] S.U.Chase, D.K.Harrison and A.Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoirs A.M.S., 52(1965), 15-33.
- [15] S.U.Chase and A.Rosenberg, Amitsur cohomology and the Brauer group, Memoirs A.M.S., 52(1965), 34-79.
- [16] F.R.DeMeyer, The Brauer group of some separably closed rings, Osaka J.Math., 3(1966), 201-204.
- [17] M.Deuring, Algebren, Erg.der.Math., Springer, 1935.

- [18] S.Endo and Y.Watanabe, On separable algebras over a commutative ring, Osaka J.Math., 4(1967), 233-242.
- [19] A.Grothendieck, Géometrie formelle et géometrie algebrique, Sem.Bourbaki, 11(1958), n° 182.
- [20] _____, Les groupe de Brauer I, Sem.Bourbaki, 17(1964/65), n 290°, II, Sem.Bourbaki, 18(1965/66), n 297, III,...
- [21] M.Harada and T.Kanzaki, 環のガロアの理論, 数学 18, (1966), 144-159.
- [22] M.Harada and T.Kanzaki, Brauer 群, 日本数学会, 代数学分科会報告集, 11(1967), 64-69.
- [23] G.Hochschild, Simple algebras with purely inseparable fields of exponent 1, Trans.A.M.S., 79(1955), 477-489.
- [24] G.J.Janusz, Separable algebras over commutative rings, Trans.A.M.S., 122(1966), 461-479.
- [25] S.Lang, On quasi algebraic closure, Ann. of Math., 55(1952), 373-390.
- [26] K.Morita, Duality for modules and its application to the theory of rings with minimum condition, Sci.Reports Tokyo Univ.Education, 6(1958), 83-142.
- [27] M.Nagata, Local rings, Interscience, 1962.
- [28] A.Rosenberg and D.Zelinsky, On Amitsur complex, Trans.A.M.S., 97(1960), 327-356.
- [29] _____, Automorphisms of separable algebras, Pacific J.Math., 11(1961), 1109-1117.
- [30] O.F.G.Schilling, The theory of valuations, A.M.S.Publ., 1950.
- [31] J.P.Serre, Corps locaux, Act.Sci.Ind., Paris, 1962.
- [32] _____, Cohomologie Galoisienne, Springer, Lect. Notes Series, 5, 1964.
- [33] O.E.Villamayor, Separable algebras and Galois extensions, Osaka J.Math., 4(1967), 161-171.
- [34] S.Yuan, On the Brauer groups of local fields, Ann.of Math., 82(1965), 434-444.

- [35] _____, On the theory of p -algebras and the Amitsur cohomology groups for inseparable field extensions, J. Algebra, 5(1967), 280-304.
- [36] S.N.Kuroda, Minkowskiの定理について, 数学, 14(1963), 171-172.
- [37] T.Kanzaki, On generalized crossed product and Brauer group, To appear.
- [38] M.Auslander and A.Brumer, Brauer groups of discrete valuation rings, Indag. Math. 30(1968), 286-296.