

Cauchy 問題における admissible data の空間と
しての ultradifferentiable classes.

京大理学部 松本和一郎 (Waichiro Matsumoto)

§ 0. Ultradifferentiable classes について.

与えられた正数列 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbb{R}^l$ の部分集合 Ω
(又は $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$, $i=1, 2$) に対して.

$$\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega) = \{f(x) \in C^\infty(\Omega); \exists R > 0 \exists C > 0 \text{ s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l \\ |f^{(\alpha)}(x)| \leq C R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \text{ in } \Omega\},$$

$$\mathcal{B}[M_n](\Omega) = \{f(x) \in C^\infty(\Omega); \forall R > 0 \exists C > 0 \text{ s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l \\ |f^{(\alpha)}(x)| \leq C R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \text{ in } \Omega\},$$

$$\mathcal{B}\{M_n^1, M_n^2\}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \{f(x) \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2); \exists R > 0 \exists C > 0 \\ \text{s.t. } \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^{l_1+l_2}, |f^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x)| \leq C R^{|\alpha_1|+|\alpha_2|} M_{|\alpha_1|}^1 M_{|\alpha_2|}^2\},$$

$$\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega) = \{f(x) \in C^\infty(\Omega); \forall K: \text{compact set in } \Omega \text{ に対して} \\ f(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(K)\},$$

$$\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega) = \mathcal{B}\{M_n\}(\Omega) \cap \mathcal{D},$$

とおく. $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$ のことである. $\mathcal{B}\{M_n\}$ の

函数空間を ultradifferentiable classes と呼ぶ. 特に

$M_n = n!^{\nu}$ のとき ν 次の Gevrey class と呼ぶ。更に L^2 の意味の ultradifferentiable classes を導入しよう。

$$\mathcal{D}_L \{M_n\}_R(\mathbb{R}^l) = \{f(x) \in \mathcal{D}_L^\infty(\mathbb{R}^l) ; \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^l} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2} / (R^{|\alpha|} M_{|\alpha|})^2 < \infty\},$$

$$\mathcal{D}_L \{M_n\}(\mathbb{R}^l) = \text{ind.} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{D}_L \{M_n\}_R(\mathbb{R}^l).$$

$$\mathcal{D}_L \{M_n\}_R(\mathbb{R}^l) \text{ は } (f, g) = \sum_{\alpha} (f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})_{L^2} / (R^{|\alpha|} M_{|\alpha|})^2 \text{ により}$$

Hilbert 空間になる。

以上の空間の dual spaces を ultradistributions と呼ぶ。これらの位相的性格については H. Komatsu [4] を見られた。位相以外のことをまとめておこう。

1). Kolmogoroff の定理により $\mathcal{B}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$, $\mathcal{D}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$

においては、 $\{M_n\}$ を logarithmic convex なものに class を変えずにおまかえうる。 $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$ においても、 $C(n+1)M_n \leq M_{n+1}$ が成り立ってゐれば、 $\{M_n\}$ を logarithmic convex なものにおまかえうる。 C は n に無関係なある正定数である。

以下、常に $\{M_n\}$ は logarithmic convex であるとする。

このことにより、ultradifferentiable classes は algebra を成す。(L の意味の u.d. classes は除く。)

2) Ultradifferentiable class が quasi-analytic となる

ための必要十分条件は次の (A) である。

$$(A) \quad \sum_n M_n^{-\frac{1}{n}} = \infty.$$

3) ultradifferentiable class が微分可能とは。

$f(x) \in B\{M_n\}(\Omega)$ のとき $\alpha \in \mathbb{Z}_+^l$ に対して $f^{(\alpha)}(x) \in B\{M_n\}(\Omega)$

と成ることを示す。このための必要十分条件は

$$(D) \quad \log M_n \leq O(n^2),$$

である。1), 2) 及び微分可能性については S. Mandelbrojt [8] が見られてゐる。

- 4) *Ultradifferentiable classes* が分離的であるとは $f(x) \in B\{M_n\}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ のとき $f(x) \in B\{M_n, M_n\}(\Omega_1, \Omega_2)$ となることを示す。分離的であれば次の条件 (5) が成り立つが逆は必ずしも正しくない。

$$(5) \quad \log M_n \leq O(n \log n).$$

(5) は Gevrey class の subclass であることを主張している。実際 Gevrey classes は分離的である。

このことについては W. Matsumoto [11] が見られている。

- 5) $B\{M_n\}(\Omega)$ が non-zero element である商と解析函数への代入に同じであるための必要十分条件が W. Rudin [13] によって与えられている。

$$(Q) \quad F_n = (M_n/n!)^{1/n} \text{ に対して } \exists C > 0 \text{ s.t.}$$

$$F_j \leq C F_n \quad (1 \leq j \leq n).$$

(Q) を満たす $\{M_n\}$ を根増大と呼ぶ。

- 6) $B\{M_n\}(\Omega)$ の元同士の合成に同じであるための十分条件として次の (C) がある。 $E_n = (M_n/n!)^{1/(n-1)}$ とおこう。

$$(C) \quad E_j \leq C E_n \quad (2 \leq j \leq n) \quad \text{for } \exists C > 0.$$

更に条件(C)の下に常微分方程式の解が^{係数と}同じclassに
求まり、そのclassの中で陰関数の定理が成り立つ。

これらについては H. Komatsu [5], [6], [7] を見ればよい。

7) $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n \in \mathbb{C}$) が $\exists R > 0 \exists C > 0$ に對して

$$|\alpha_n| \leq CR^n M_n \text{ とおけると } f^{(n)}(0) = \alpha_n \text{ とする } f(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(\mathbb{R})$$

を構成できるための十分条件が、L. Carleson [1] に与えられている。 $G(t) = \sup_n \{nt - \log M_n\}$ ($t > 0$) とおくと、

$$(E) \quad \exists \delta > 0 \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(t+\log s)}{1+s^2} ds + \frac{1+\varepsilon}{2} \log t \leq G(t+\delta) \\ \exists \varepsilon > 0 \quad (t \gg 1).$$

なお、 $\log M_n \leq O(n^2)$ のときは左辺第二項は落とせる。

以上、5)及び6)の条件は、素直な $\{M_n\}$ なるものが満たす。7)の Gevrey classes をはじめ、 $M_n = \exp hn^\delta$

($\delta > 1, h > 0$) 等かなり広い $\{M_n\}$ について成り立つが、

$[n(\log n)^K]^n$ ($K > 1$) は除かれる。

8) $\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ の元の無限次の零点のまわりの挙動を特徴

づけておこう。もちろん $\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ が non-quasianalytic
の場合にのみ興味がある。 $\mathcal{S}(r) = \sup_n \frac{n! r^n}{M_n}$ ($r > 1$)

とおこう。 $f(x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ が x_0 の無限次の零点にもつとる。

$$(0) \quad |f(x)| \leq C \mathcal{S}\left(\frac{1}{R|x-x_0|}\right)^{-1} \quad (\text{for } \exists R > 0, \exists C > 0)$$

と評価される。

9) $f \in \mathcal{D}[M_n](\mathbb{R}^d)$ のとき、 $f(x)$ の Fourier image $\hat{f}(\xi)$ は

$$(F_0) \quad \forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad |\hat{f}(\xi)| \leq C T\left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{-1}$$

$$:= T(r) = \sup_n \frac{r^n}{M_n} \quad \text{であらう。}$$

又、 $f \in \mathcal{D}_{L^1}(M_n)(\mathbb{R}^d)$ 及び $u \in \mathcal{D}'_{L^1}(M_n)(\mathbb{R}^d)$ の Fourier image $\hat{f}(\xi), \hat{u}(\xi)$ は共に可測函数で、

$$(F_1) \quad \exists R > 0 \quad \exists g(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \hat{f}(\xi) = T\left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{-1} g(\xi),$$

$$(F_2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_\varepsilon(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \hat{u}(\xi) = T(\varepsilon|\xi|) v_\varepsilon(\xi),$$

とわかる。

10) 7) ~ 9) に登場する $G(t), S(r), T(r)$ の間には次の関係がある。

$$T(r) = \exp G(\log r), \quad \log M_n = \sup_t \{nt - G(t)\},$$

$$S(r) = \exp H(\log r), \quad := H(t) = \sup_n \{nt - \log M_n/n!\}.$$

これらの函数は Lipschitz 連続であらうが C^∞ ではない。この

ことは、応用上不便であらう。このことは $a_n = \log M_n$ が

discrete にしか与えられてないことをかき起す。 $\{a_n\}$ を

$\mathbb{R}_+$ 上に拡張しよう。簡単のため $\{(n, a_n)\}$ はこれら

が成る Newton 多角形の 頂点 になっていようとしよう。

この Newton 多角形の辺を表す式を $y = a(x)$, (n, a_n) を通

る C^∞ , 単調増大, concave なグラフを $y = a(x)$ とする。
 $a(x)$ のことを $\{a_n\}$ の軟化函数という。

$a_{x-1} \leq a(x) \leq a_x$ が成り立つ。このことから、

$$\tilde{G}(t) = \sup_{x \geq 0} \{xt - a(x)\} \quad \text{とおくと次の関係が成り立つ。}$$

$$G(t) \leq \tilde{G}(t) \leq G(t) + t.$$

特に $\log M_n \leq O(n^2)$ (ie class が 微分可能) ならば.

$G(t)$ と $\tilde{G}(t)$ は 同値 となる. $\equiv$ は $G_1(t)$ と $G_2(t)$ が 同値

とは. $\exists \delta > 0$ s.t. $G_1(t-\delta) \leq G_2(t) \leq G_1(t+\delta)$ が 成り

立つ こと. $\equiv$ の こと は $Q_i(x) = \sup_t \{tx - G_i(t)\}$ と おく.

$Q_1(x) + \delta x \leq Q_2(x) \leq Q_1(x) + \delta(x)$ が. 更に は

$\log M_i(x) = Q_i(x)$ と おく. $R^{-x} M_1(x) \leq M_2(x) \leq R^x M_1(x)$

($R = e^\delta$) が 成り 立つ こと と 同等 である. $x = n \in \mathbb{Z}_+$ と

おいて みれば. $\equiv$ の 定義 の 妥当性 が あかぬ であらう.

したがって. $\log M_n \leq O(n^2)$ の こと は $G(t)$ と $\tilde{G}(t)$ と 同等 に

あつかってよい. $\tilde{T}(r) = \exp \tilde{G}(\log r)$ と おく. $\tilde{H}(t), \tilde{S}(r)$ と 同様.

例

$$1^\circ \quad M_n = n!^\nu \quad (\nu > 0) \quad \text{に対して} \quad \tilde{T}(r) = \exp r^{\frac{1}{\nu}}, \quad \tilde{S}(r) = \exp r^{\frac{1}{\nu+1}} \quad (\nu > 1)$$

$$2^\circ \quad M_n = \exp h n^\delta \quad (\delta > 1, h > 0) \quad \text{に対して.}$$

$$\tilde{T}(r) = \exp h^* (\log r)^{\delta^*}, \quad \delta^* = \frac{\delta}{\delta-1}, \quad h^* = \frac{\delta-1}{\delta} (\delta h)^{-\frac{1}{\delta-1}},$$

$$\tilde{S}(r) \geq \exp \left[h^* (\log r)^{\delta^*} + \frac{\delta}{(\delta-1)^2} h^* (\log r)^{\delta^*-1} \log \log r + O((\log r)^{\delta^*-1}) \right].$$

§ 1. Introduction. 一般の ultradifferentiable classes

や ultradistributions そのものについてはよく研究されて

る. しかし微分方程式論に登場するのはむしろ Gevrey classes

である。微分方程式論においては Gevrey classes だけで
すべての議論は間に合うのであろうか。実は Gevrey classes
より真に広い C^∞ の真部分空間が問題に適合する場合もある。
そのうち 相対的に一般性 をもった一例を解説するものが本稿
の目的である。本論に入る前に偏微分方程式論では何故
Gevrey classes しかとり扱われなりのか、状況証拠を分析して
みる。

第一に、§0, 4) で述べた分離性の問題である。
 $\mathcal{M}n$ -class の $-\infty$ 次の擬微分作用素が $\mathcal{E}'\mathcal{M}n(\mathbb{R}^d)$ の元を
 $\mathcal{E}'\mathcal{M}n(\mathbb{R}^d) \rightarrow$ 写すのは $\mathcal{E}'\mathcal{M}n$ が分離性を持つとき、そのとき
に限られるし、分離性をもつのは Gevrey classes とその subclasses
に限られる。^(Gevrey classes より広い class はない)
すなわち $-\infty$ 次の擬微分作用素を modulo として
特異性の伝播を論じるわけにはいかなくなるし、 $-\infty$ 次の operator
を perturbation として逐次近似で方程式を解くことはあつ
かしくなる。(もちろん、係数, data, 解の所属する classes
をそれぞれ異なるとれば、これらのことは可能となる。)
(See W. Matsumoto [12].)

第二に、たとえば、理想的な場合として、定係数
々、解析係数をもつ方程式を対象とすると、Gevrey classes
以外の ultradifferentiable classes を必要とするモデルが
(少なくとも経験的には) 無い。Gevrey classes より広い classes
が必要とされるのは、 ∞ 次の零点の存在に起因する。しかも

Gevrey class を係数に導入するとはつまり Gevrey classes より真に広い classes が適合するモデルが作れる! Gevrey 性が非 Gevrey 性を呼び起す。

有限次の零点と無限次の零点ではまるでとりあつかいの難易度が違う。例をあげよう。 $P = \partial_t^2 - a(t)\partial_x^2 - b(t)\partial_x$ に対する初期面 $t=0$ の Cauchy 問題を考えよう。 $a(t)=t^{2\ell}$, $b(t)=t^m$ のとき、 $m \geq \ell-1$ ならば $\mathcal{E}$ -well posed, $m < \ell-1$ ならば

$\kappa = (2\ell-m)/(\ell-m-1)$ より小さな指数をもつ Gevrey classes は data として admissible だが、より大きな指数をもつ Gevrey classes はもはや admissible でない。(admissible とはこの class の任意 (See V. Ya. Ivrić [3] and K. Igari [2].) の data に対して 古典解が唯一存在することである。) 他方

$a(t) = \exp(-2t^{-n})$, $b(t) = B t^{-\ell} \exp(-t^{-n})$ とすると次のようになる。 $\operatorname{Re} B \neq 0$ ならば $\ell \leq n+1$ のとき C^∞ well posed であり、

$\ell > n+1$ のとき $M_n = \exp h_1 n^{\delta_1}$ ($\delta_1 = (\ell-1)/(\ell-n-1)$, $h_1 < | \operatorname{Re} B | / 2(\ell-1)$)

によって $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ が admissible となる。又、 $\operatorname{Re} B = 0$ ならば

$\ell \leq 2n+1$ のとき C^∞ well posed であり、 $\ell > 2n+1$ のとき、 $M_n = \exp h_2 n^{\delta_2}$

($\delta_2 = (\ell-n-1)/(\ell-2n-1)$, $h_2 < 2|B|/n$) によって $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ が admissible となる。(S. Tarama [14], & 以下の言証明。)

さて上の結果を一般化しようとするとき、前者は係数は解析的としてしまえば容易に一般化できる。しかし、後者の場合は一般化はこの表現に困る。 $a(t)$ は $1 + \frac{1}{n}$ 次の

Gevrey class の上で、 $t=0$ が ∞ 次の零点 といっても、さして $a(t)$ の $t=0$ での挙動は特定できない。§0, 8) の不等式 (0) により、 $|a(t)| \leq C \exp\{-At^{-n}\}$ for $\exists A > 0, \exists C > 0$ とよから評価できるだけである。しかるに今必要とされてゐるのは、小 n ではなく大 n なのだ。しかるに $-\infty$ 次の零点 といふだけでは $a(t) \equiv 0$ する排除されてない。 $k \geq n$ に対して、 $\exp\{-t^{-k}\}$ はすべて $1+\frac{1}{n}$ 次の Gevrey class に属する。

§2. 問題と予備的結果. $N \times N$ -階方程式系に対する

Cauchy 問題を考えよう。

$$(1) \quad \begin{cases} Pu \equiv (D_t - \sum_{i=1}^l A_i(t, x) D_{x_i} - B(t, x)) u = f(t, x), \\ u(t_0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

(1) が $\{M_n\}$ -solvable とは $\forall t_0 \in [T_1, T_2], \forall x_0 \in \mathbb{R}^l$ を固定するごとに、 (t_0, x_0) の近傍 ω があって、 $t=t_0$ を初期面とする Cauchy 問題 (1) が $\forall u_0(x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^l), \forall f(t, x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ ($\Omega = [T_1, T_2] \times \mathbb{R}^l$) に対して 解 $u(t, x) \in C^1(\omega_{t_0}^+)$ が存在する ことをいう。特に解の一意性も従ふこと。

$\{M_n\}$ -well posed といふ。 $\equiv \omega_{t_0}^+ = \{(t, x) \in \omega; t \geq t_0\}$ 。

さて、 $A(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^l A_i(t, x) \xi_i$ が一様に対角化可能のこと、(1) は C^∞ well posed である。よって、対角化不可能な、最も簡単な場合を考えよう。

仮定 $\det(\tau I - A(t, x, \lambda)) = 0$ の根はすべて実、多重度不変かつ高々 = 重根である。

以下本稿では常に上の仮定をおく。このとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n \log n} < 2$ (Gevrey class で "えは" 次数が 2 未満のとき)
 $n \rightarrow \infty$ $\{M_n\}$ が分離的ならば、係数が $\mathcal{E}_t^2([T_1, T_2]; \{M_n\}(\mathbb{R}^d))$ に属するという仮定の下に、任意の $\mathcal{E}_t^1([T_1, T_2]; \{M_n\}(\mathbb{R}^d))$ の低階に対して (1) は $\{M_n\}$ -well posed である。他方次の定理が成り立つ。

定理 1. $\exists R > 0$ s.t. $(\log M_n - nR)/n \log n \geq 2$ ($n \gg 1$)
 なる $\{M_n\}$ が (Gevrey class で "えは" 指数 2 以上), (Q) を満たすとしよう。 $A_i(t, x) \in \mathcal{E}_t^2([T_1, T_2]; \{M_{n-n_0}\}(\mathbb{R}^d))$ ($i=1, \dots, l$)
 かつ $B(t, x) \in \mathcal{E}_t^1([T_1, T_2]; \{M_{n-n_0}\}(\mathbb{R}^d))$ と仮定する。 (1) が各点で $\{M_n\}$ solvable ならば次の条件 (L) が成り立つ。

$$(L) \quad \omega P_P P_S \omega P_P + \frac{1}{2\pi} \omega P_P \{P_P, \omega P_P\} = 0$$

on the double characteristics.

== に P_P は P の主要部, $P_S = -B(t, x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^l P_P^{(i)}$, ω, ω は t, x も含めた $l+1$ 次元の Poisson bracket, ωP_P は P_P の cofactor matrix である。なお解の空間を $\mathcal{D}_{L^1}^1([t_0, t_1]; \mathcal{D}'\{M_n\}(\omega_0))$ ($[t_0, t_1] \times \omega_0 \subset \omega$) にゆきめても同じ結果が成り立つ。

注意 $\log M_n = O(n^2)$ のとき、解の空間は $\mathcal{D}_{L^1}^1([t_0, t_1]; \mathcal{D}'\{M_n\}(\omega_0))$

にゆめめてもなお定理1は成り立つ。証明は省略す。

さて、条件(L)を仮定すると admissible な data の空間はどのくらい広がっているか？ そのことを考察するのは、key となる命題で、W. Matsumoto [9], [10] から引用しよう。

命題 2. A_i ($i=1, \dots, l$) は t のみに依存し、 C^∞ としよう。 B は $C^m(\Omega)$ の元とする。二重根 $\lambda_j(t, \tau)$ に対して $\Omega_1^j(\tau) \equiv \{t \in [T_1, T_2]; \text{rank}(\lambda_j(t, \tau) - A(t, \tau)) = N-1\} = \bigcup_k I_k^j(\tau)$ とおこう。ここに $\{I_k^j(\tau)\}_k$ は互いに交わらない開区間列である。以下、固定した j, τ について論ずるから j と τ を略す。(L)の下に、 I_k における $A(t, \tau)$ の $\lambda_j(t, \tau)$ に関する ^{unit} eigenvector $\vec{e}_k(t)$ は次の性質をもつ。

- 1) $\forall k, \vec{e}_k(t) \in C^{m+1}(\bar{I}_k)$ ととれ。
- 2) $\bar{I}_k \cap \bar{I}_{k'} = \{t\}$ のとき、 $\vec{e}_k(t) = \vec{e}_{k'}(t)$ ならば $\vec{e}_k(t)$ と $\vec{e}_{k'}(t)$ は $t=t$ で C^{m+1} に接続され。

特に係数 $A_i(t)$ ($i=1, \dots, l$) の要素がすべて m 次の零点を持つなければ $\vec{e}(t) \in C^{m+1}([T_1, T_2])$ ととれ。

更に、 $\forall \tau \neq 0, \Omega_1^j(\tau) \neq \emptyset$ ならば $\vec{e}(t, \tau)$ は $C^{m+1}(\Omega \times \mathbb{R}^l \setminus \{0\})$ にとれ。

注意. $A_i(t), B(t, x)|_{x=x_0}$ が $\mathcal{E}(Mn)([T_1, T_2])$ に属し、 (Mn) が (C) をみたせば $\vec{e}_k(t) \in \mathcal{E}(Mn)(\bar{I}_k)$ とた。 (x_0 は任意の $\mathbb{R}^l$ の点)

注意 命題は 擬微分作用素に対しても成り立つ。

注意 $l=1$ のときは A_i は t, x 両方に依存しても 命題 は成り立つし、その時「...」の仮定は不要である。

まず、quasi-analytic の場合から考察しよう。

定理 3. (L) を仮定しよう。 (A) を満たす $\{M_n\}$ により、

$A_i(t) \in \mathcal{E}\{M_n\}(I)$, $B(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ であつて「 $\forall \varepsilon \neq 0, \Omega_\varepsilon^j(\varepsilon) \neq \emptyset$ 」
又は「 $\forall \varepsilon \neq 0, \Omega_\varepsilon^j(\varepsilon) = \emptyset$ 」が各 $j = 1, \dots, l$ に成り立っているとしよう。

このとき (1) は $\mathcal{E}$ -well posed である。 ($I = [T_1, T_2]$)

注意 $N=2$ ならば定理中「...」又は「...」の仮定は不要である。

系 4. $l=1$ としよう。 (L) の下には $\{M_n\}$ が (A) を満たし

$A_1(t, x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(I \times \mathbb{R}^1)$, $B(t, x) \in C^\infty(I \times \mathbb{R}^1)$ ならば

(1) は $\mathcal{E}$ well posed である。

これらの定理や系は、命題 2 の 2) (及び付加的考察) より主要部がなめらかな symbol をもつ pseudodifferential operator で三角化でき、各 block ごとに dense set 上で真に三角か、対角になっていること、更に前者の場合は、(L) により 0 階も三角行列になっていることから容易に従う。

§ 3. Non-quasianalytic 係数の場合.

さて、係数が

non-quasianalytic の場合でも、条件 (L) の下には $\mathcal{E}$ well posedness が従うであらうか。一般には正しくない。本稿末でその例に

ふれる。ここでは条件(L)を仮定した場合の *admissible data* の空間について先に考察しよう。以下の議論においてはいずれも係数は t にものみ依存すると仮定する。

まず $N=2$ としてかわりに operator は空間方向には *convolution operator* (symbol が x によらずに擬微分作用素) であるとして考察する。(この係数が x によらずにという仮定は一つには §1 で述べた Gevrey classes より広い class での擬微分作用素の理論の本質的な困難を避けようためであるが、その他に命題 2 が、係数が x にも依存する場合は $d \geq 2$ においては、*bicharacteristic strips* に沿う性質として記述できないうちにもよる。)

$$(2) \begin{cases} \mathcal{P}u \equiv [D_t - \lambda(t, D_x) + A(t, D_x) + B(t, D_x) + C(t, D_x)]u = f(t, x), \\ u(t_0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

ここに A, B, C は 2×2 行列, $\lambda_j(t, \zeta), A(t, \zeta)$ は ζ に関して 1 次正斉次, $B(t, \zeta)$ は 0 次正斉次, $C(t, \zeta)$ は高々 -1 次であり, A は $\text{tr} A \equiv \det A \equiv 0$ をみたす。この最後の条件により, $\lambda(t, \zeta)$ が ζ に対する一つの特性根 (= 重根) となる。

§0, 10) で定義した $\mathfrak{M}$ とをうつかう。 $a_n = \log M_n / n!$ の軌化函数を $a(x)$ とし、それから定義されるトレース函数を $\tilde{H}(t)$ としよう。 $\left(\tilde{H}''(t) / \tilde{H}'(t) \right) + 1 \leq \tilde{H}'(t)$ をみたすときは

$S_0(r) = \exp \tilde{H}(\log r)$ とおく。通常の素直な $\{M_n\}$ ならば、条件「……」は満たされてゐる。さて、いかなる軟化を用いても、「……」が満たさぬ場合は、 $\bar{H}(t) \leq \tilde{H}(t)$ かつ「……」を満たす $\bar{H}(t)$ を一つとって $\bar{S}_0(r) = \exp \bar{H}(\log r)$ とおく。($\bar{H}$ としては $\tilde{H}$ に近い方が良し)

命題5. (L) を仮定する。条件 (Q) を満たし (A) を満たさぬ

$\{M_n\}$ に対して、 $A(t, \xi)/(|\xi|+1)$ が ξ に関して一様に $B\{M_{n-1}\}(I)$ に、 $B(t, \xi)$, $C(t, \xi)(|\xi|+1)$ が ξ に関して一様に $C^0(I)$ に属するとしよう。 ξ に関しては t に一様に有界可測であればよい。

$N_n = n! [S_0(\frac{n}{R})]^n$ とおこう。(R は方程式の係数から決まる正定数である) $\forall u_0(x) \in \mathcal{D}[N_{n-2-2}](\mathbb{R}^d)$, $\forall f(t, x) \in \mathcal{E}_t^0(I; \mathcal{D}[N_{n-2-2}](\mathbb{R}^d))$ に対して一意的な ^(2.2) 解が $C^2(\Omega)$ に存在する。

注意. $\log M_n \leq O(n^2)$ ならば $A(t, \xi)/(|\xi|+1)$ の class は $B\{M_n\}(I)$ であり。又、 $\log N_n \leq O(n^2)$ ならば data の class の $\{N_{n-2-2}\}$ は $\{N_n\}$ に置きかえてよい。

注意. 作用素 P が微分作用素ならば、有限伝播速度が保証されよから、 data の support compact in x の制限は除くことができて $[N_{n-2-2}]$ -wellposed となる。

主張を明確にするために例をあげよう。

例1. $M_n = n!^\nu$ ($\nu > 1$) に対し、 $N_n = n! \exp h n^{\frac{\nu}{\nu-1}}$ 。(h は係数から決まる正数)

例 2. $M_n = n! \exp h n^\delta$ ($\delta > 1, h > 0$) に対し

$$N_n = n! \exp h^* n (\log n - K)^{\delta^*} \quad (\delta^* = \frac{\delta}{\delta-1}, h^* = \frac{\delta-1}{\delta} (\delta h)^{\frac{1}{\delta-1}})$$

K は充分大の数 (係数から決まる。)

(L) を仮定しよう。

系 6 $A(t, \zeta) / (|\zeta|+1)$, は ζ に一様 $C^{m, \alpha}(I)$ ($m \in \mathbb{Z}_+$,

$0 < \alpha \leq 1, m + \alpha \geq 1$, 即ち $\alpha < 1$ のとき, $C^{m, \alpha}$ は m 階導関数から

α 次の Hölder 連続, $\alpha = 1$ のとき Lipschitz 連続 となる class.)

$B(t, \zeta)$, $C(t, \zeta) / (|\zeta|+1)$ が ζ に関して一様 $C^0(I)$ に属するならば,

$\forall u_0(x) \in \mathcal{D}[n!^{m+2+\alpha}](\mathbb{R}^d)$, $\forall f(t, x) \in \mathcal{E}_t^0(I; \mathcal{D}[n!^{m+2+\alpha}](\mathbb{R}^d))$

に対して一意解を $C^1(\Omega)$ に持つ。

系 6 の証明 $\tilde{S}(r)$ として $r^{m+\alpha}$ が対応するから 命題 5 より

$$N_n = n! \left(\frac{n}{R}\right)^{(m+\alpha)n} \text{ となる。これは } n!^{m+2+\alpha} \text{ に同値である。}$$

命題 5 の証明.

方程式 (2) を Fourier 変換しよう。

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{\zeta} \hat{u} \equiv \left[\frac{1}{i} \frac{d}{d\zeta} \hat{u} - \lambda(t, \zeta) + A(t, \zeta) + B(t, \zeta) + C(t, \zeta) \right] \hat{u} = \hat{f}(t, \zeta), \\ \hat{u}(t_0, \zeta) = \hat{u}_0(\zeta). \end{cases}$$

(3) の常微分方程の Fundamental matrix の

$|\zeta| \rightarrow \infty$ の挙動をしらべよう。その存在は保証されてゐる

から挙動さえわかればよい。したがって、各 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ を固定

して、 $\zeta = \rho \xi$ ($\rho > 0$) とおき、 $\rho \rightarrow \infty$ のとき ξ に一様な評価

をゆせばよい。命題 2, 2) により, $\{I_k(\hat{z})\}$ をとり直して,

$$1) \vec{e}_k(t, \hat{z}) \in \mathcal{E}(M_n)(I_k) \cap C^1(\bar{I}_k),$$

$$2) \bar{I}_k \cap \bar{I}_{k'} = \{\bar{t}\} \text{ ならば } \pm \vec{e}_k(\bar{t}, \hat{z}) \neq \vec{e}_{k'}(\bar{t}, \hat{z}) \text{ となる。}$$

が満たされるようにする。このとき, $A(t, \hat{z})$ は $t = \bar{t}$ を n 次の零点としてもつ。このとき, $\{I_k(\hat{z})\}$ は $\hat{z}$ をとりかえよと、
全く異なものになるかもしれないが、 $|\vec{e}_k(t, \hat{z})|$ の
上限は

$\hat{z}, k$ によるものか」とれよ。

以下, $\hat{z}$ は固定するので, 書くことを省略する。

$\vec{e}: A(t, \hat{z})$ の null vector は一般に I 上不連続である。ゆえ

に, ためらかな symbol で A を三角化することは望めない。

仕方がないから各 $\bar{I}_k$ 上では eigen-space が t に indep. となる

ことだけを目指そう。 $\{I_k\}$ とその幅の広がり方に

かえておいて, $I_k = (t_k^1, t_k^2)$ とおく。 $\{N^{(k)}(t)\}_k$ を次のように

inductive に定義する。 $N_k(t) = \begin{pmatrix} e_k^1(t) & -e_k^2(t) \\ e_k^2(t) & e_k^1(t) \end{pmatrix}$, $\vec{e}_k = \begin{pmatrix} e_k^1(t) \\ e_k^2(t) \end{pmatrix}$
とおく。
($\text{on } \bar{I}_k$)

$$N^{(0)}(t) = I.$$

$$N^{(k)}(t) = \begin{cases} N^{(k-1)}(t) & t \leq t_k^1, \\ N^{(k-1)}(t_k^1) N_k^{-1}(t_k^1) N_k(t) & t \in I_k, \\ N^{(k-1)}(t_k^2) N_k^{-1}(t_k^2) N_k(t_k^2) & t \geq t_k^2, \end{cases}$$

とおく。各 $N_k(t)$ は回転行列であるから, 上の行列の

積はすべて可換である。又, $\bar{I}_k$ 上 $N^{(j)}(t)$ ($j \neq k$) は定数行列

である。更に、 $\sum_{k=N}^{\infty} |I_k| \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) より $\{N^{(k)}(t)\}$ は Lipschitz 連続な $N(t)$ に一様収束する。更に $N(t)$ は $\bar{I}_k$ 上定数回転行列 M_k により $N(t) = M_k N_k(t)$ とおけるから、 $N(t) \in \mathcal{B}(M_{n-1}(\bar{I}_k) \cap \text{Lip}(\bar{I}_k))$ となる。

$$v(t) = N(t) \hat{u}(t, \hat{s}) \exp[-i \int_{t_0}^t \lambda(s, \hat{s}) ds] \quad \text{とおく。}$$

$v(t)$ は下の方程式をみたす。

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} v(t) = [p \tilde{A}(t) + \tilde{B}(t) + \tilde{C}(t, p)] v(t) + \tilde{f}(t, p), \\ v(t_0) = v_0(p, \hat{s}), \end{cases}$$

== $\tilde{A}(t)$ は I_k の端点を ∞ 次の零点にもつ、 $\mathcal{B}(M_{n-1})(I)$ の ∞ 次の零点と
同じ評価(0)をもつ。他方、 $\tilde{B}(t)$, $\tilde{C}(t, p)$ ($p+1$) は p, t に関して有界可測である。又、次の関係が成り立つ。

$$(5) \quad \begin{cases} \text{i)} & M_k^{-1} \tilde{A}(t, p) M_k = \begin{pmatrix} 0 & p \mu(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on } \bar{I}_k \quad \text{かつ} \\ & \mu(t) \neq 0 \quad \text{in } (I_k \text{ の dense set}), \\ \text{ii)} & M_k^{-1} \tilde{B}(t, p) M_k = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{on } \bar{I}_k, \\ & (\text{ii)} \text{ は条件 (L) による。}) \\ \text{iii)} & \tilde{A}(t, p) \equiv 0 \quad \text{in } I \setminus \bigcup_k I_k. \end{cases}$$

(4) の Fundamental matrix を逐次近似で求めよう。 $L(t, p) = p \tilde{A}(t) + \tilde{B}(t) + \tilde{C}(t, p)$ とおく。

$$U^0(t) = I.$$

$$\begin{aligned} U^j(t) &= \int_{t_0}^t L(s, \rho) U^{j-1}(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_j} \cdots \int_{t_0}^{s_2} L(s_j, \rho) \cdots L(s_1, \rho) ds_1 \cdots ds_j \\ &\quad (j \geq 1) \end{aligned}$$

とおこう。

(5) により, $s_{k1}, \dots, s_{kj}$ がすべて I_k に含まれる

ならば $\prod_{i=1}^j L(s_{ki}, \rho)$ は高々一次で次の評価をもつ。

$$\begin{aligned} |L(s_{kj}, \rho) \cdots L(s_{k1}, \rho)| &\leq C (c c')^{j-2} S_0\left(\frac{1}{R_0 l_k}\right)^{-1} \rho \\ &\quad + C (c c')^{j-1}, \end{aligned}$$

== 積の個数は c'^j に置き換えてよい。又、

l_k は I_k の区間幅である。(30, 8) を用いて。

== のことより $\prod_{i=1}^j L(s_i, \rho)$ は次の評価をもつ。

$$|\prod_{i=1}^j L(s_i, \rho)| \leq \sum_{h=0}^m \left\{ C (c c')^{j-h-1} \sum_{\substack{h \\ \{k_i h\} \in \{\bar{k}_j\}_{j=1}^m}} \frac{1}{h} S_0\left(\frac{1}{R_0 l_{k_i h}}\right)^{-1} \rho^h \right\},$$

== $\{\bar{k}_j\}_j$ は 少なくとも一つ s_i を含む区間の添字である。

又、 m は s_i を含む区間の数である。

$m \leq j$ ゆえ、 $\{k_i h\}$ の選択の可能性は高々 $j^m c_h$ である。

又、「 $\frac{\tilde{H}''}{\tilde{H}'} + 1 \leq \tilde{H}'(t)$ 」の類の仮定により $\{S(\frac{1}{t})^{-1}\}' / S(\frac{1}{t})^{-1}$

は ρ の単調減少関数である。よって

$$\prod_{i=1}^h S_0\left(\frac{1}{R_0 \ell_{n+h}}\right)^{-1} \leq S_0\left(\frac{2h}{R_0(|I|+c)}\right)^{-h}$$

が従う。(εは任意の正定数, εを小さくすると,

先の評価式中の C が大きくなる。) $R = \frac{R_0(|I|+c)}{2}$ と

おこう。次の評価がえられる。

$$|\pi L(s, p)| \leq \sum_{h=0}^j \left\{ c(cc')^{j-h-1} C_h S_0\left(\frac{h}{R}\right)^{-h} p^h \right\}.$$

よって,

$$|v^j(t)| \leq \sum_{h=0}^j c(cc')^{j-h-1} \frac{1}{h!(j-h)!} S_0\left(\frac{h}{R}\right)^{-h} p^h (t-t_0)^j,$$

従って

$$\sum_{j=0}^{\infty} |v^j(t)| \leq c'^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^h}{h!} S_0\left(\frac{h}{R}\right)^{-h} \sum_{j=h}^{\infty} \frac{1}{(j-h)!} (cc'(t-t_0))^{j-h}$$

$$\leq c'^{-1} e^{cc'(t-t_0)} C(K_0) T_1(K_0(t-t_0)p)$$

$$(\forall K_0 > 1)$$

== 1: $T_1(r)$ は $N_n = n! S_0\left(\frac{n}{R}\right)^n$ の随伴函数

$$\text{すなわち } T(r) = \sup_n \frac{r^n}{N_n}.$$

$N(t), N(t)^{-1} \exp\left[\pm i \int_{t_0}^t \lambda(s, s) ds\right]$ は共に有界であるから,

(3) の Fundamental matrix も $|v(t)|$ と同じ評価をもつ。

$\mathcal{D}[N_{n-3}](\mathbb{R}^2)$ の元 φ は $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C T_1\left(\frac{|\xi|}{R'}\right)^{-1} (|\xi|+1)^{-2-2\epsilon}$

の評価をもつかう命題がえられた。(R'は任意に1.1に選ぶ)

注意 $A(t, z)$ にも関する *ultradifferentiability* を仮定したのは $\tilde{A}(t, z)$ の I_k の端点での *vanishing order* を得るためだけであった。したがって、その *vanishing order* がすべての (無限次の) 零点で成り立ってゐれば、 C^∞ (又は C^1) でもよい。

一般の $N \times N$ 微分方程式系に命題 5 を拡張しよう。

定理 7. 条件 (L) を仮定する。(E) と (Q) を満たし、(A) を満たさない $\{M_n\}$ に対して、 $A_i(t), B_i(t) \in B(M_{n-1})$ (I) ($i=1, \dots, l$) としよう。 $N_n (= n! [S_0(\frac{n}{R})]^n)$ が $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (M_n/N_n)^{\frac{1}{n}} < \infty$ を満たすならば ($R > 0$ は係数のみから決まる定数), (I) は $[N_{n-2-2}]$ -well posed である。但し、方程式から決まる正定数 K_1 により、 $T_2 - T_1 \leq K_1$ が満たされてゐるとする。

証明 方程式を Fourier 変換する。 $f(t, x), u_0(x)$ と x に関して *compact support* にとっておけば、 $\hat{u}(t, z)$ が z の entire fn で指数 1 の *exponential type* であることは明かである。実軸上での $\hat{u}(t, z)$ の挙動を調べることが残された。条件 (E) により、(3) に関しては *local* に) $S^{-\infty}\{M_n\}(\mathbb{R}^2)$ を *modulo* として (3) に *reduce* される。このとき、 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (M_n/N_n)^{\frac{1}{n}} < \infty$ の仮定により、 $S^{-\infty}\{M_n\}$ の *symbol* は $|z| \rightarrow \infty$ のとき $T_1(K_0 \|z\|)^{-1}$ より速く減少し、*perturbation* とみなせる。(W. Matsumoto [12] 参照) Q.E.D.

注意 p14 の例及び系のうち、定理 7 にも適用するのは例 1 だけである。

反例. P.14 の例 1 に対応する反例を与えよう。

$$\begin{cases} \partial_t u - \begin{pmatrix} 0 & \mu(t) \\ \nu(t) & 0 \end{pmatrix} \partial_x u = f(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \varphi(a_{2i-1} - t) \varphi(t - a_{2i}) & t \in I_{2i-1} \quad (i \geq 1) \\ 0 & t \in I_i \quad (i \geq 1) \end{cases}$$

$$\nu(t) = \begin{cases} \varphi(a_{2i} - t) \varphi(t - a_{2i+1}) & t \in I_{2i} \quad (i \geq 1) \\ 0 & t \in I_{2i-1} \quad (i \geq 1) \end{cases}$$

$$\varphi(t) = (e^{-2ht^{-a}})',$$

$$T = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} 2(k \log k \cdots \log_{m-1} k (\log_m k)^a)^{-1} \quad (a > 1)$$

$$\log_i t = \log \log_{i-1} t, \quad \log_1 t = \log t, \quad n_0: \text{充分大}$$

$$a_1 = T$$

$$a_n = T - \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} 2(k \log k \cdots \log_{m-1} k (\log_m k)^a)^{-1}$$

$$I_i = [a_{i-1}, a_i].$$

このとき $\mu, \nu \in \mathcal{B}\{n!^{1+\frac{1}{d}}\}$ である。しかも、

任意に小さい h に対して $\{n!^{1+a} [\prod_{i=1}^{m-1} \log_i n (\log n)^a]\}^a$ -well posed

とならない。例 1 とくらべて、結果が甘くなったのは、

命題 5 の言証明では、^{ω 点の} 零点の分布がわかっているから、

少なくとも m 個あるとは、 I を m 等分する点にあるものとして最悪の評価をしたからである。実際には ∞ 次の零点が ∞ 個あるときが興味あるのだが、その場合、それらが均等に分布することはありえない。反例においては $\{a_i\}$ を指定してこのことが結果の甘さにつながっている。

(∞ 次は ∞ 次の零点と呼んでいるのは ∞ 次の零点でかつ、

いかなる近傍においても $\equiv 0$ とならない点のことである。)

反例の証明は、

方程式を Fourier

変換して 実際には Fundamental matrix を構成してみる。

文献表.

1. L. Carleson ; On universal moment problems,
Math. Scand. 9, 1961, 197-206.
2. K. Igari ; An admissible data class of the Cauchy problem
for non-strictly hyperbolic operators,
J. Math. Kyoto U. 21 (2), 1981, 351-373.
3. V. Ya. Ivrii ; Conditions for correctness in Gevrey
classes of the Cauchy problem for weakly
hyperbolic equations,
Sib. Math. Zh. 17, 1976, 547-563.

4. H. Komatsu ; Ultradistributions, I,
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 20, 1973,
25-105.
5. ——— ; 同上 ; IV, to appear.
6. ——— ; The implicit function theorem for
ultradifferentiable mappings
Proc. Japan Acad. 55, (3), 1979,
69-72.
7. ——— ; Ultradifferentiability of solutions
of ordinary differential equations,
Proc. Japan Acad. 56 (4) 1980, 137-142.
8. S. Mandelbrojt ; Séries adhérentes, régularisation des
suites, applications
Gauthier-Villars, Paris, 1952.
9. W. Matsumoto ; On the conditions for the hyperbolicity
of systems with double characteristic
roots, I, J. Math. Kyoto U., 21, (1) 1981
47-84.
10. ——— ; 同上, II, 同上, 21, (2), 1981, 251-271.
11. ——— ; Characterization of separativity of
ultradifferentiable classes, to appear.

12. W. Matsumoto ; Pseudodifferential operators in
general ultradifferentiable classes,
to appear.

13. W. Rudin ; Division in algebras of infinitely
differentiable functions ,
J. Math. & Mech., 11 (5) 1962

797-809.

14. S. Tarama ; Un exemple dans le problème de Cauchy
pour les équations faiblement
hyperboliques , Publ. RIMS Kyoto U.
15 (2) , 455-468.