

Holomorphic martingale からなる Hardy 空間について.

早大理工 新井 仁之 (Hitoshi Arai)

本講演では、古典的 Hardy 空間と martingale からなる Hardy 空間との関連性について得た結果を述べる。

まず、§2 では、§3 の準備として、Varopoulos [14] で定義された Hilbert 変換を多変数化し、 K^p ノルムと $\|x\|_{L^1} + \sum_{j=1}^3 \|H_j x\|_{L^1}$ ノルムの同値性を示す。つぎに、§3 では、主要定理の 1 つとして、 $\mathbb{T}^2$ 上の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{T}^2)$ と $BMO(\mathbb{T}^2)$ が、各々、完備直積 Brown 空間上の K^p 、 BMO のある closed complemented subspace に同型であることを、Varopoulos [13], [15] で導入された作用素 M, N を使って示す。また、このことの系として、H. Sato の定理、Gundy-Stein の定理等の別証をする。

ところで、完備 Brown 空間上の 1 径数 holomorphic martingale からなる H^∞ と、 $H^\infty(\mathbb{T})$ とは、関数環としてみると相違点があることが、K. Carne [3]、新井-和田 [16] で示された。すなわち、[3] では、 H^∞ が解析構造をもたないことが証明され、

[16] では、 H^∞ が * 弱極大でないことが示された。§4 では、 H^∞ が * 弱極大でないことの別証をし、さらに、 H^∞ を含む * 弱閉環について、詳しく論ずる。

§1. 定義・記号.

§1 では、martingale についてのよく知られた事柄を、あとの議論に必要な範囲で、まとめておく。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備確率空間で、その上に、2つの互いに独立な 1 次元 Brown 運動

$$(x_t)_{t \geq 0}, (y_t)_{t \geq 0}, \quad x_0 = y_0 = 0 \quad \text{a.s. dP.}$$

が定義されているものとする。

$\{x_s, y_s : 0 \leq s \leq t\}$ と P 零集合で生成される σ -集合体を $\mathcal{F}_t$ とおく ($t \geq 0$)。そして、 $\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ で生成される σ -集合体が $\mathcal{F}$ になっているものと仮定する。

このとき、組 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (x_t)_{t \geq 0}, (y_t)_{t \geq 0})$ を完備 (2次元) Brown 空間といい、 B_2 で表わす。よく知られているように、 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ は、右連続である。すなわち、

$$\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \quad (t \geq 0) \quad \text{をみたしている ([8] p. 286 参照)}.$$

$(\Omega_j, \mathcal{F}_j^1, P^j, (\mathcal{F}_{t_j}^j)_{t_j \geq 0}, (x_{t_j}^j)_{t_j \geq 0}, (y_{t_j}^j)_{t_j \geq 0})$ ($j=1, 2$) を 2つの完備 (2次元) Brown 空間とする。 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を直積測度空間 $(\Omega_1 \otimes \Omega_2, \mathcal{F}_1^1 \otimes \mathcal{F}_2^1, P^1 \otimes P^2)$ の完備化とし、 $\mathcal{F}_s^1 \otimes \mathcal{F}_t^2$ と P 零集合で

生成される σ -集合体を $\mathcal{F}_{st}$ とおく。このとき、

組 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_{st})_{s,t \geq 0}, (x_{tj}^j)_{t_j \geq 0}, (y_{tj}^j)_{t_j \geq 0} (j=1,2))$ を完備直積 Brown 空間といい、 $B_2 \times B_2$ で表わすことにする。

以下、§1 から §3 までは、上記の $B_2 \times B_2$ の上で、議論をすすめていく。

$z_{tj}^j = x_{tj}^j + \sqrt{-1} y_{tj}^j$, $\bar{z}_{tj}^j = x_{tj}^j - \sqrt{-1} y_{tj}^j$ ($t_j \geq 0$; $j=1,2$) とおく。

$E[\cdot]$ で、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の期待値を表わし、 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の 2 径数複素数値可測過程 Φ に対し、

$$\|\Phi\|_p \equiv E\left[\left(\int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi_{st}|^2 ds dt\right)^{p/2}\right]^{1/p} \quad (0 < p < \infty)$$

なる (quasi-) norm を定める。

Λ^p を、2 径数複素数値可予測 (predictable) 過程 Φ で、 $\|\Phi\|_p < \infty$ なるものの全体とする ($0 < p < \infty$)。

$\Phi \in \Lambda^p$ に対して、2 径数確率積分

$$\iint \Phi dx' dx^2, \iint \Phi dx' dy^2, \iint \Phi dy' dx^2, \iint \Phi dy' dy^2$$

が定義される。(Brossard-Chevalier [2] 参照。)

各 Ω_j 上で、 Λ^p と同様の class が定義できるが、それを Λ_j^p と表わす。 $\Lambda_j^p \ni \varphi$ に対しては、1 径数確率積分

$$\int \varphi dx^j, \int \varphi dy^j \quad (j=1,2)$$

が定義される。([8] 参照。)

ここで、Brossard-Chevalier [2] による Hardy 空間 K^p を導入する。[2] では、 K^p という記号は使われていないが、ここ

では、[1]、[4]、[12]に習って、 K^p という記号を使う。 K^p は、つぎのように定義される。

$$K^p \equiv \{X = (X_{st}) : X \text{ は、つぎの (1.1) の形で表わされる。}\}$$

$$X_{00} \in \mathbb{C}$$

(1.1) ある $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda_1^p$, $\psi_1, \psi_2 \in \Lambda_2^p$, $\Phi_1, \dots, \Phi_4 \in \Lambda^p$ が存在して、

$$\begin{aligned} X_{st} = & X_{00} + \int_0^s \varphi_1 dx' + \int_0^s \varphi_2 dy' + \int_0^t \psi_1 dx^2 + \int_0^t \psi_2 dy^2 \\ & + \int_0^t \int_0^s (\Phi_1 dx' dx^2 + \Phi_2 dx' dy^2 + \Phi_3 dy' dx^2 + \Phi_4 dy' dy^2) \end{aligned}$$

$X \in K^p$ が (1.1) の形で表わされているとき、

$$\langle X, X \rangle \equiv \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty |\varphi_j|^2 ds + \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty |\psi_j|^2 dt + \sum_{j=1}^4 \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi_j|^2 ds dt$$

とし、 $\|X\|_{K^p} \equiv \|\langle X, X \rangle\|_{L^p}^{1/2} + |X_{00}|$ とする。 $(K^p, \|\cdot\|_{K^p})$

は、 $1 \leq p < \infty$ のとき、Banach空間になる。

また、 $X = (X_{st}) \in K^2$ と、 X の最終変数 $X_{\infty\infty} \in L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とを同一視することによって、 $K^2 = L^2$ とみなせる ([2] p. 100)。

[2] で、つぎの定理が証明された。

Brossard-Chevalier の定理 ([2])

$$(B.C) \quad \|X\|_{K^p} \approx \|X^*\|_{L^p} \quad (X \in K^p, 0 < p < \infty)$$

ただし、 $X^* \equiv \sup_{s,t} |X_{st}|$ とする。

最後に、BMO について述べる。2 径数 BMO-martingale は、

まず、離散径数の場合に、A. Bernard [1] によって定義され、いわゆる Fefferman の不等式が証明された。 $B_2 \times B_2$ 上の場合、BMO は、H. Sato [12]、E. Decamp [4] によって定義され、さらに、 $(K^1)^* = \text{BMO}$ が証明された。ここでは、H. Sato [12] による定義を述べる。

T が région-aléatoire とは、 T が Ω から $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^2$ の中集合の中への写像で、かつ

$$\{(s, t, \omega) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^2 \times \Omega : (s, t) \in T(\omega)\}$$

が可予測集合となるものである。可予測集合とは、

$$\{]s_1, t_1] \times]s_2, t_2] \times A : 0 \leq s_i \leq t_i, A \in \mathcal{F}_{s_i, s_i} (i=1, 2)\}$$

で生成される σ -集合体に属する集合のことである。

région-aléatoire の全体を $\mathcal{R}$ とおく。

(1.1) で表わされている $X \in K^p$ と $T \in \mathcal{R}$ に対して、

$$\Delta X_{st} = X_{st} - X_{s0} - X_{0t} + X_{00} \quad (s, t \geq 0)$$

とおき、

$$\Delta X_T = \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\{(s,t) \in T\}} (\Phi_1 dx^1 dx^2 + \Phi_2 dx^1 dy^2 + \Phi_3 dx^1 dy^2 + \Phi_4 dy^1 dy^2)$$

とおく。

$X \in K^2$ とする。 X が “ σ ” の (1.2), (1.3) をみたすとき、 X を BMO-martingale という。

$$(1.2) \quad \|X_{\infty}\|_* \equiv \left(\sup_s \|E[|X_{\infty} - X_{s0}|^2 | \mathcal{F}_s^1]\|_{L^\infty} \right)^{1/2} < \infty$$

$$\|X_{\infty}\|_* \equiv \left(\sup_t \|E[|X_{\infty} - X_{0t}|^2 | \mathcal{F}_t^1]\|_{L^\infty} \right)^{1/2} < \infty$$

$$(1.3) \quad \|\Delta X\|_* \equiv \sup \{ \|\Delta X_T\|_{K^2} / \sqrt{P(T \neq \phi)} : T \in \mathcal{R} \} < \infty$$

(ただし、 $0/0=0$ とみなす。)

そして、

$$\|X\|_* \equiv \|X_{\infty 0}\|_* + \|X_{0\infty}\|_* + \|\Delta X\|_* + |X_{00}|$$

とおく。BMO-martingale の全体を BMO で表わす。

Fefferman の不等式と K' -BMO 双対性 (Sato [12] ; cf. [1], [4])

$$(1.4) \quad \exists C > 0, \forall X \in K^2, \forall Y \in \text{BMO} : |E[XY]| \leq C \|X\|_{K'} \|Y\|_*$$

$$(1.5) \quad (K')^* = \text{BMO}$$

この § の最後に、上記の定理の系として、つきが成り立つことを注意しておく。

系 1.1 P を K', K^2 及び BMO 上の有界射影線型作用素と

する。また、 P は $K^2 = L^2$ で自己共役とする。このとき、

$P(K')^* = P(\text{BMO})$ となる。ただし、ここで、

$P(K')^* \equiv \{ \varphi \in (K')^* : \varphi((I-P)(K')) = 0 \}$ (I は恒等作用素) とする。

§2. Hilbert 変換の多変数化とその応用

Varopoulos [14] が導入した Hilbert 変換を、ここで、多変数化しておく。

$X \in K^p$ が、(1.1) の形で表わされているとき、

$$H_1 X = - \int \varphi_2 dx' + \int \varphi_1 dy' + \int \psi_1 dx^2 + \int \psi_2 dy^2 \\ + \iint (-\varpi_3 dx' dx^2 - \varpi_4 dx' dy^2 + \varpi_1 dy' dx^2 + \varpi_2 dy' dy^2)$$

$$H_2 X = \int \varphi_1 dx' + \int \varphi_2 dy^2 - \int \psi_2 dx^2 + \int \psi_1 dy^2 \\ + \iint (-\varpi_2 dx' dx^2 + \varpi_1 dx' dy^2 - \varpi_4 dy' dx^2 + \varpi_3 dy' dy^2)$$

$$H_3 X = H_1 (H_2 X)$$

とおく。容易にわかるように、 H_j は、 K^p 及び BMO 上の有界線型作用素である。 ($0 < p < \infty$)。

$$K_{10}^p = \{ X \in K^p : X_{st} = X_{s0} \ (\forall s, t \geq 0) \ \& \ X_{00} = 0 \}$$

$$K_{01}^p = \{ X \in K^p : X_{st} = X_{0t} \ (\forall s, t \geq 0) \ \& \ X_{00} = 0 \}$$

$$K_{11}^p = \{ X \in K^p : X_{st} = \Delta X_{st} \ (\forall s, t \geq 0) \}$$

とおく。すると、

$$K^p = \mathbb{C} \oplus K_{10}^p \oplus K_{01}^p \oplus K_{11}^p$$

である。

T_1, T_2, T_3, T_4 を各々、 $\mathbb{C}, K_{10}^p, K_{01}^p, K_{11}^p$ 上の作用素とする。このとき、 $X \in K^p$ に対して、

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 (X) \equiv T_1 (X_{00}) + T_2 ((X_{s0} - X_{00})) + T_3 ((X_{0t} - X_{00}))$$

$$+ T_4 ((\Delta X_{st}))$$

と定義することにする。

$$T_j = (I + \sqrt{-1} H_j)/2, \quad S_j = (I - \sqrt{-1} H_j)/2 \quad (j=1,2) \text{ とし,}$$

$$K^{aa} = I \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus T_1 \circ T_2 \quad (I \text{ は 恒等作用素})$$

$$K^{ab} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus T_1 \circ S_2 \quad (0 \text{ は 零作用素})$$

$$K^{ba} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus S_1 \circ T_2$$

$$K^{bb} = 0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_1 \circ S_2$$

とおく。 K^ε は K^p ($0 < p < \infty$) 上、 BMO 上で有界である ($\varepsilon = aa, ab, ba, bb$)。

$x \in K^p$ に対し、 $x^\varepsilon = K^\varepsilon(x)$ ($\varepsilon = aa, ab, ba, bb$) とする。

$(K^p)^\varepsilon = \{x^\varepsilon : x \in K^p\}$ とし、特に、 $H^p = (K^p)^{aa}$ ($0 < p < \infty$) とする。

$BMO^\varepsilon = \{x^\varepsilon : x \in BMO\}$ とし、 $BMOA = BMO^{aa}$ とする。また、 $H^\infty = H^2 \cap L^\infty$

とおく。 $1 \leq p < \infty$ に対して、 $(K^p)^\varepsilon$ は、 K^p ノルム閉線型空間となり、

BMO^ε は、 BMO ノルム閉線型空間になる。さらに K^ε が、 K^p

上の有界射影線型作用素で、特に、 K^2 上で自己共役になっている

ことが容易に証明できる ($\varepsilon = aa, ab, ba, bb$)。そのほか、

$H^p = [H^\infty]_p$ ($1 \leq p < \infty$) も示せる。 ($[\cdot]_p$ で、 L^p ノルム閉包を表わす。)

B_2 上の Varopoulos の定理 ([14] Theorem 3.2) の $B_2 \times B_2$ 上への拡張として、つぎが証明できる。

定理 2.1. (Varopoulos の定理の拡張)

$$\|x\|_{K^p} \approx \|x\|_{L^p} + \sum_{j=1}^3 \|H_j x\|_{L^p} \approx \sum_{\varepsilon=aa,ab,ba,bb} \|x^\varepsilon\|_{L^p} \quad (x \in K^p; 1 \leq p < \infty)$$

この定理と、(1.5) 及び通常の duality argument により、つぎの定理が得られる。

定理 2.2. 以下の条件 (a), (b), (c) は同値である。

(a) $X \in \text{BMO}$

(b) ある $A_j \in L^\infty$ ($1 \leq j \leq 4$) が存在して、

$$X = A_1^{aa} + A_2^{ab} + A_3^{ba} + A_4^{bb} \quad \text{かつ} \quad \|X\|_* \approx \sum_{j=1}^4 \|A_j\|_{L^\infty} \quad \text{をみたす。}$$

(c) ある $B_j \in L^\infty$ ($1 \leq j \leq 4$) が存在して、

$$X = B_1 + H_1 B_2 + H_2 B_3 + H_3 B_4 \quad \text{かつ} \quad \|X\|_* \approx \sum_{j=1}^4 \|B_j\|_{L^\infty} \quad \text{をみたす。}$$

§3. $\mathbb{T}^2$ 上の関数論への応用.

$D_j = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T}_j = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ($j=1, 2$) とし、

$D^2 = D_1 \times D_2$, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ とおく。 dm_j を $\mathbb{T}_j$ 上の正規化された

Lebesgue 測度とし、 $dm = dm_1 \otimes dm_2$ とおく。

$\tilde{H}_j$ を $\mathbb{T}^2$ 上の関数の j 番目の変数に関する共役作用素とする ($j=1, 2$)。そして、 $\tilde{H}_3 = \tilde{H}_1 \circ \tilde{H}_2$ とおく。

$$\mathcal{H}'(\mathbb{T}^2) \equiv \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \|f\|_{\mathcal{H}'} \equiv \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^3 \|\tilde{H}_j f\|_{L^1} < \infty\}$$

とし、

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}^2) \equiv \{f \in L^1(\mathbb{T}^2) : \|f\|_{\mathcal{H}} < \infty\} \quad (\text{ただし、} \|f\|_{\mathcal{H}} = \|n(f)\|_{L^1} \text{ とし、}$$

$n(f)$ は f の radial maximal 関数) とする。

つき"の作用素 M, N が Varopoulos [13], [15] によって考えられた。

$\tau_j = \inf \{t : |Z_t^j| = 1\}$ ($j=1,2$) とする。 $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ に対して、
 $Mf = f(Z_{\tau_1}^1, Z_{\tau_2}^2)$ とする。 M は、 $L^p(\mathbb{T}^2)$ から $L^p = L^p(\Omega, \mathbb{R}, P)$ への等距離線型作用素である。 ($1 \leq p \leq \infty$)

$X \in L^1(\Omega)$ に対して、 $NX(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = E[X | Z_{\tau_1}^1 = e^{i\theta}, Z_{\tau_2}^2 = e^{i\varphi}]$ とする。
 N は、 $L^p(\Omega)$ から $L^p(\mathbb{T}^2)$ への縮小線型作用素である。

$\mathbb{T}^2$ 上の BMO 関数として、 つぎのものが、 H. Sato [12] によって導入された。

$$BMO(\mathbb{T}^2) \equiv \{f \in L^2(\mathbb{T}^2) : Mf \in BMO\}, \quad \|f\|_* \equiv \|Mf\|_*$$

さて、 $H^p(D^2)$ を D^2 上の解析関数からなる Hardy 空間とし、
 $H^p(\mathbb{T}^2)$ を $H^p(D^2)$ に属する関数の境界関数からなる Hardy 空間とする (cf Rudin [11])。 $BMOA(\mathbb{T}^2) = BMO(\mathbb{T}^2) \cap H^2(\mathbb{T}^2)$ とおく。

$\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$, $BMO(\mathbb{T}^2)$ と K^p , BMO との関連性に関する結果として、
 つぎの定理が得られる。

定理 3.1. (主要定理) $\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$ (resp. $BMO(\mathbb{T}^2)$) は、 K^p (resp. BMO) のある closed complemented subspace に同型である。
 実際、 $M \circ N$ が K^p (resp. BMO) 上の有界射影線型作用素で、

M が、 $\mathcal{H}^p(\mathbb{T}^2)$ (resp. $BMO(\mathbb{T}^2)$) から、 $M \cdot N(K^p)$ (resp. $M \cdot N(BMO)$) の上への同型作用素になっている。

(証明の概略) $\tilde{N} = M \circ N$ とおく。まず $\tilde{N}$ の K' -有界性を示す。
 $X \in K^2$ に対して、 $\tilde{N} H_j X = H_j \tilde{N} X$ が成り立つことが、 $H^{\infty} \cap (K_{1,0}^2 \oplus \mathbb{C})$ の *弱 Dirichlet 性を使って証明できる。ゆえに、定理 2.1 より、 $X \in K^2$ に対して、つぎが成り立つ。

$$\begin{aligned} \|\tilde{N} X\|_{K'} &\approx \|\tilde{N} X\|_{L^1} + \sum_{j=1}^3 \|H_j \tilde{N} X\|_{L^1} = \|\tilde{N} X\|_{L^1} + \sum_{j=1}^3 \|\tilde{N} H_j X\|_{L^1} \\ &\leq \|X\|_{L^1} + \sum_{j=1}^3 \|H_j X\|_{L^1} \approx \|X\|_{K'} \end{aligned}$$

これより、 $\tilde{N}$ の K' -有界性が得られる。[11] Theorem 2.1.3 (c) から、 $\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)$ で $C(\mathbb{T}^2)$ が稠密であることがわかる。すなわち、任意の $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)$ に対して、 $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なる $f_n \in C(\mathbb{T}^2)$ が存在する。定理 2.1 より、 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|M f_n - M f_m\|_{K'} = 0$ である。ゆえに、ある $X \in K'$ が存在して、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - N X\|_{L^1} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|M f_n - \tilde{N} X\|_{K'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{N} (M f_n - X)\|_{K'} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|M f_n - X\|_{K'} = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f = N X$, $M f = \tilde{N} X \in K'$ かつ

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}^1} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \|M f_n\|_{K'} = \|M f\|_{K'}$$

となり、 M が同型であることがわかる。

つぎに、 $\tilde{N}$ の BMO -有界性を示す。 $X \in BMO$ と任意の $T \in \mathcal{R}$ をとる。 $X = \Delta X$ の場合を示せば十分である。Fefferman の不等式から、

$$\|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^2}^2 \lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\tilde{N}(\Delta X)_T)\|_{K^1}$$

が得られる。ゆえに、 $\tilde{N}$ の K^1 -有界性より、

$$\begin{aligned} \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^2}^2 &\lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^1} \\ &\lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^1}^* \chi_{\{T \neq \phi\}} \\ &\leq \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{L^1}^* \sqrt{P(T \neq \phi)} \\ &\lesssim \|\Delta X\|_* \|\tilde{N}(\Delta X)_T\|_{K^1} \sqrt{P(T \neq \phi)} \end{aligned}$$

よって、 $\tilde{N}$ は BMO 有界である。M の BMO-同型性は、 $BMO(T^2)$ の定義から明らかである。■

定理 3.1. により、(B-C), (1.4), (1.5), 定理 2.1 などの martingale に関する結果を、つぎのように、 T^2 上にうつすことができ、下記のように、H. Sato の定理、Gundy-Stein の定理の別証を与えることができる。

系 3.2. (H. Sato [12]) $\mathcal{H}^1(T^2)^* = BMO(T^2)$

(証明) $\tilde{N}$ は、 $K^2 = L^2$ で自己共役である。したがって、定理 3.1. と系 1.1 より、 $\tilde{N}(K^1)^* = \tilde{N}(BMO)$ である。ゆえに、定理 3.1 より系 3.2 が得られる。■

系 3.3. (Gundy-Stein, [6]) $\mathcal{H}^1(T^2) \approx h^1(T^2)$

(略証) Gundy [6] p.305 より、 $\|Mf^*\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{h^1}$ がわかる。これを使って、 $h^1(T^2)$ が $\tilde{N}(K^1)$ と同型になることが示せる。したがって定理 3.1 より系 3.3 が得られる。■

系 3.4. つぎの (a), (b), (c) は、同値である。

(a) $f \in (H^1(\mathbb{T}^2))^*$

(b) $f \in \text{BMOA}(\mathbb{T}^2)$

(c) ある $h \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ が存在して、

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{w_1 + z_1}{w_1 - z_1} h(w_1, 0) dm_1(w_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{w_2 + z_2}{w_2 - z_2} h(0, w_2) dm_2(w_2) \\ &\quad + \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{T}^2} \left(\prod_{j=1}^2 \frac{w_j + z_j}{w_j - z_j} \right) \Delta h(w_1, w_2) dm(w) \quad ((z_1, z_2) \in D^2) \end{aligned}$$

かつ $\|f\|_* \approx \|h\|_{L^\infty}$ 、ただし、ここで、

$$\Delta h(w_1, w_2) = h(w_1, w_2) - h(w_1, 0) - h(0, w_2) + h(0, 0) \quad \text{とし、} f, h \text{ で}$$

各々、 f, h の D^2 への Poisson 拡張を表わすことにする。

(注: この結果は、II の場合、Baernstein II, Analytic function of bounded mean oscillation (in "Aspects of Contemporary Complex Analysis" Academic Press ('80)) に、関数論的証明がある。)

(注意) 系 3.2 と系 3.3 から、 $\text{BMO}(\mathbb{T}^2)$ の Fefferman-Stein 型の分解が導びかれる。このことと、[5] p.397 で構成された関数の簡単な修正で、 $\mathbb{T}^2$ 上では、Helson-Szegö の定理が必ずしも成立しないことがわかる。すなわち、つぎをみたす関数 w が構成できる。

(1) $0 \leq w \leq 1 \quad \text{a.e. } dm$

$$(2) \quad \exists c > 0, \forall f \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{j=1}^3 \iint_{\mathbb{T}^2} |\tilde{H}_j f|^2 w \, dm \leq c \iint_{\mathbb{T}^2} |f|^2 w \, dm$$

$$(3) \quad \log w \notin \left\{ g_0 + \sum_{j=1}^3 \tilde{H}_j g_j : g_0, \dots, g_3 \in L^\infty(\mathbb{T}^2) \right\}$$

§4. H^∞ について. (1 径数の場合)

この § では、以下の記号を使う。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (x_t)_{t \geq 0}, (y_t)_{t \geq 0})$ を完備 Brown 空間とし、

$$z_t = x_t + \sqrt{-1} y_t \quad (t \geq 0) \text{ とおく。}$$

$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分の集合体としたとき、

$$L^p(\mathcal{G}) \equiv L^p(\Omega, \mathcal{G}, P), \quad L^p \equiv L^p(\mathcal{F}) \text{ とし、}$$

$$H^p(\mathcal{G}) \equiv \left\{ x \in L^p(\mathcal{G}) : \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = 0 \right\}, \quad H^p = H^p(\mathcal{F}) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

とする。(注: ここでの H^∞ は、§2, §3 での H^∞ とは異なる。)

H^∞ は、* 弱 Dirichlet 環で、Corona 定理をみたし ([14])、解析構造をもたず ([3])、* 弱極大でない ([16])。

この § での主要定理は、つぎの定理である。

定理 4.1. (主要定理) T を任意の $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間で、 $T < \infty$

a.s. とする。任意の $A \in \mathcal{F}_T$ に対して、つぎの (1), (2) を満たす A の分解 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する。

$$(1) \quad A_n \in \mathcal{F}_T \quad (n \in \mathbb{N}), \quad P(A_n \cap A_m) = 0 \quad (n, m \in \mathbb{N}, n \neq m).$$

$$P(A \Delta \bigcup_{n=1}^\infty A_n) = 0 \quad (\Delta \text{ は 対称差})$$

(2) 任意の $\varepsilon_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) と任意の $q_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $\sup_n q_n < \infty$) に対して、つぎの (a), (b), (c) をみたす $X \in H^\infty$ が存在する。

(a) $X_R = 0$ (a.s. on A^c) (R は任意の (Ft) 停止時間)

(b) $0 < |X| \leq q_n$ (a.s. on A_n) ($n \in \mathbb{N}$)

(c) $P(A_n \setminus \{|X| = q_n\}) < \varepsilon_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

(証明の概略) $T_n = \inf \{t: |Z_t| = n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) とし、

$K_n = \{T_n \leq T\}$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく。

$A_1 = A \cap K_1^c$, $A_n = A \cap (K_{n-1} \setminus K_n)$ ($n \geq 2$) とおく。

$$\alpha(s, \omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leq s \leq T(\omega)) \\ 1 & (T(\omega) < s) \end{cases} \quad (\omega \in \Omega)$$

とおく。

$$Y_t^{(n)} = \int_0^t \chi_{\{s < T_n\}} \alpha_s dZ_s \quad (n \in \mathbb{N}, t \geq 0)$$

とする。

$$R_n = \begin{cases} T & (\text{on } A_n^c) \\ \infty & (\text{on } A_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおくと、ある $0 < \delta_n < 1$ が存在して、

$$P(A_n \setminus \{|Y_{R_n}^{(n)}| > \delta_n\}) < \varepsilon_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つことがわかる。そこで、

$$S_n = \inf \{t: |Y_{R_n \wedge t}^{(n)}| = \delta_n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく。

$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\delta_n} Y_{R_n \wedge S_n}^{(n)}$ とすると、 $X \in H^\infty$ で、さらに、以上の $\{A_n\}$, X が、所要の性質をもつことが確かめられる。■

系 4.2. 任意の $A \in \mathcal{U}\{\mathcal{F}_T : T \text{ は } T < \infty \text{ a.s. なる } (\mathcal{F}_t) \text{ 停止時間}\}$ と、任意の $\alpha, \varepsilon > 0$ に対して、つきをみたす $X \in H^\infty$ が存在する。

(1) $X_R = 0$ (a.s. on A^c) (R は、任意の $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間)

(2) $0 < |X| \leq \alpha$ (a.s. on A)

(3) $P(A \setminus \{|X| = \alpha\}) < \varepsilon$.

(証明) 定理 4.1 で $a_1 = a_2 = \dots = \alpha$, $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$ とすればよい。■

定理 4.1、系 4.2 より、 H^∞ が解析環でない (したがって、*弱極大でない) ことが示されるが、さらに、つぎのことも定理 4.1 から示される。

系 4.3 H^∞ の元の support set の特性関数で生成される

*弱閉線型空間は、 L^∞ である。

(注意) よく知られているように、 $H^\infty(\mathbb{T})$ の support set の特性関数は、本質的に、1 か 0 だけである。

(注意) この系から、 $H_{\max}^{\infty} = \mathbb{D}$ となることがわかる。 $H_{\max}^{\infty}$ の定義については、Nakazi [9] 参照。

定理4.1 は、 H^{∞} の単位球の端点の多くが、 $H^{\infty}(\Pi)$ のそれよりも非常に単純な形をしていることも示している。すなわち、つぎのことが証明できる。

系4.4. $X \in H^{\infty}$ とする。 T を $T < \infty$ a.s. なる $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間とする。このとき、つぎの(1), (2) は同値である。

(1) X_T は、 H^{∞} の単位球の端点である。

(2) $|X_T| = 1$ a.s.

系4.5. $f \in H^{\infty}(\Pi)$ とする。つぎの(1), (2) は、同値である。

(1) Mf は、 H^{∞} の単位球の端点である。

(2) f は内部関数である。

ところで、 H^{∞} を含む $\ast$ 弱閉環が存在することが、定理4.1 からわかったわけであるが、ここで、 H^{∞} を含む $\ast$ 弱閉環に関して得た結果を述べる。

定理4.6. T を $0 < T < \infty$ a.s. なる任意の $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間とし、

A_T を H^∞ と $L^\infty(\mathcal{H})$ で生成される *弱閉環とする。このとき、

$$H^\infty \subsetneq A_T \subsetneq L^\infty$$

*弱 Dirichlet 環の一般論において、 $H_{\min}^\infty$ の果たす役割は大きい (cf. Nakazi [9], [10])。したがって、 $H_{\min}^\infty$ の形を決定することは、重要なことであるといえる。定理 3.5. から、つぎの系が得られる。

系 4.7. $H_{\min}^\infty = H^\infty$

$\mathcal{O}$ を H^∞ と M_Z で生成される *弱閉環とする。系 4.7. と *弱 Dirichlet 環の一般論 ([7], [10]) とから、 H^∞ と $\mathcal{O}$ の間に、必ず無限個の *弱閉環が存在することになる。ここで、それらを、つぎのように特徴づける。 $\mathcal{B} = \sigma(M_Z)$ とする。

定理 4.8. $H^\infty \subset B \subset \mathcal{O}$ なる *弱閉環 B に対し、つぎが成り立つ。

$$(1) H^\infty \subset B \subsetneq \mathcal{O} \Leftrightarrow B \cap L^\infty(\mathcal{B}) = H^\infty(\mathcal{B}) \quad (2) H^\infty = B \Leftrightarrow B \cap \overline{B} \subset L^\infty(\mathcal{B})$$

系 4.9 (Carne [3] の N に関する結果の拡張)

$\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ なる σ -集合体 $\mathcal{G}$ に対して、 $E[\cdot | \mathcal{G}]$ が H^∞ 上乗法的なる、 $\mathcal{G} = \text{trivial}$ である。特に、 N は H^∞ 上乗法的でない。

参考文献

- [1] A. Bernard, Espace H^1 de martingales a deux indices.
Dualites avec les martingale de type « BMO », Bull. Sc.
math. 2^e Série 103 (1979) 297-303
- [2] J. Brossard - L. Chevalier, Calcule stochastique et
inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes :
application aux fonctions bi-harmoniques, Ann. Inst.
Fourier, 30 (4) (1980) 97-120.
- [3] K. Carne, The algebra of bounded holomorphic martin-
gales, J. Funct. Anal. 45 (1982) 95-108.
- [4]. E. Decamp, Caracterisation des espaces BMO de martin-
gales dyadiques à deux indices, et de fonctions bi-
harmoniques sur $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$, These de doctrat, Grenoble (1979)
- [5] R. Fefferman, Bounded mean oscillation on the polydisk,
Ann. of Math. 110 (1979) 395-406
- [6] R.F. Gundy, Inegalites pour martingales a un et deux
indices : l'espace H^p , Lect. Notes in Math. 774, 252-334.
- [7] R. Kallenberg - H. König, An invariant subspace theorem in
the Abstract Hardy algebra theory, Arch. Math. 39 (1982)
51-58
- [8] P.A. Meyer, Un cours sur integrales stochastiques,

Lect. Notes in Math. 511, 246 - 400.

- [9] T. Nakazi, Superalgebras of weak * Dirichlet algebras,
Pacific J. Math. 68 (1977) 197 - 207
- [10] T. Nakazi, Minimal superalgebras of weak * Dirichlet
algebras, preprint
- [11] W. Rudin, Function Theory in Polydiscs, Benjamin 1969.
- [12] H. Sato, Caractérisation par les transformations de
Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-
harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$, Thèse de doctorat, Grenoble,
(1979)
- [13] N. Th. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-
Jones theorem on BMO, Pacific J. Math. 90 (1980) 201 - 221
- [14] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and A_p -
functions for Brownian motion and several variables,
J. Funct. Anal. 39 (1980) 85 - 121
- [15] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some
problems in complex analysis, Bull. Sc. math. 2^e Série
105 (1981) 181 - 224.
- [16] 新井仁之 - 和田淳蔵、関数環と martingale, 数理解析研
究所講究録 491 (1983), 87 - 106.