

# 複素射影空間の安定ホモトピーについて

信州大学教養部 向井純夫 (Juno Mukai)

このテーマの主目的は、Mosher [Mo] が扱った無限次元複素射影空間  $\mathbb{C}P^\infty = \mathbb{C}P$  の安定ホモトピー群  $\pi_k^S(\mathbb{C}P)$  の 2-成分の群拡大の未決定部分、つまり  $k = 13, 15, 16, 17$  の場合を決定することである。Mosher の結果は次のようになる。

Theorem A.  $\pi_k^S(\mathbb{C}P)$  の 2-成分は、 $9 \leq k \leq 18$  のとき、次の表のようになる；

| k    | 9              | 10        | 11             | 12           | 13                                 | 14             | 15                                 | 16                                | 17                                    | 18             |
|------|----------------|-----------|----------------|--------------|------------------------------------|----------------|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|----------------|
|      | $\mathbb{Z}_8$ | 0         | $\mathbb{Z}_4$ | 0            | $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ | $(\mathbb{Z}_2)^3$                | $\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_8$ | $\mathbb{Z}_4$ |
| gen. |                | $i\sigma$ | $i2\sigma$     | $i2\sigma^1$ | $i\sigma^1, i\sigma^2, i\sigma^3$  | $i\sigma^4$    | $i\sigma^5, i\sigma^6$             | $i\sigma^7, i\sigma^8, i\sigma^9$ | $\phi, \psi$                          | $i\sigma^{10}$ |

なお、Mosher によれば、 $k = 19$  のときは  $\mathbb{Z}_{64} \oplus \mathbb{Z}_4$  である。

我々の方法は composition methods であり、 $\pi_k^S(\mathbb{C}P^n)$  を  $k \leq 18$  のとき、すべて決定する。非安定な視点での考察と James splitting の使用及び四元数準射影空間  $Q_n$  のホモトピー群において、より小さな不確定要素 (indeterminacy) をもつ Toda brackets の選択が key point である。

§ 1. まず記号と基本的な Lemma を用意する。 $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ;  $d = \dim_{\mathbb{R}} F$ ;  $\gamma_n(F): S^{d(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P^n$ ,  $p_n(F): \mathbb{F}P^n \rightarrow S^{dn}$ ,  $h_n: \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ ,  $t_n: Q_n \rightarrow \Sigma \mathbb{C}P^{2n-1}$  を自然な写像とする。 $q_n = p_n(\mathbb{H})h_n: \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow S^{4n}$ ;  $Q_n = Q_{n-1} \cup_{\omega_{n-1}} e^{4n-1}$ ;  $M^n = S^{n-1} \cup_2 e^n$ .  $\Sigma \mathbb{C}P^{n-1} \subset SU_n \subset SO_{2n} \subset$

$\Omega^{2n} S^{2n}$  の adjoint map  $g_n: \Sigma^{2n+1} \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow S^{2n}$  が  $S^1$ -transfer map で、  
 $g_2 = \nu_4$ ,  $\Sigma(g_n \circ \Sigma^{2n+1} \gamma_{n-1}) = [\iota_k, \iota_k]$ ,  $k = d(n+1) - 1$  となる。  
 $S^3$ -transfer map  $g_n(\mathbb{H}): \Sigma^{4n} Q_n \rightarrow S^{4n}$  も同様。  $g_{2n}(\mathbb{C}) \circ \Sigma^{4n} t_n = g_n(\mathbb{H})$ .

以下、記号  $F$ 、特に、 $\mathbb{C}$  は省略する。我々は次の 2 つの自然な cofibrations を用いる。

$$(1) \quad S^{2n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} P^{n-1} \xrightarrow{i} P^n \xrightarrow{p} S^{2n} \rightarrow \dots;$$

$$(2) \quad \mathbb{C}P^{2n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \mathbb{H}P^{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} Q_n \xrightarrow{t_n} \Sigma \mathbb{C}P^{2n-1} \rightarrow \dots$$

定義より、次の等式が成り立つ。

$$(3) \quad \gamma_{2n} = (-1)^{n+1} t_n \omega_n; \quad q_n \gamma_{2n+1} = n \nu_{4n}.$$

Lemma 1([T1])  $\pi_{2n}^S(P^n) = \mathbb{Z}\{\zeta_n\} \oplus i_* \pi_{2n}^S(P^{n-1})$ ,  $\pi_{2n}^S(P^{n-1})$  は有限。  
 $\#(\Sigma^k \gamma_n) = (n+1)!$ ,  $k \geq 1$ .

Lemma 2.  $n \geq 2$  とする。  $12/(12, n+1) t_n \omega_n = \Sigma \gamma_{2n-1} \sigma_{4n}^2 + i\alpha$  を満たす元  $\alpha \in \pi_{4n+2}(\Sigma P^{2n-2})$  が存在する。  $(2n+1)!(12, n+1)/12 \mid \#\alpha$ . 特に、 $n = 2$  のときは、  $\Sigma^2 \alpha = i\sigma''$ .

Lemma 3.  $\gamma_3 \gamma^2 = 4 t_2 \omega_2 + 8 i\sigma$ ;  $\tilde{\eta}' \eta'^2 = 4 \omega_2 + 8 i\sigma$ ,  $\tilde{\eta}' \in \langle i, 2\nu, \eta \rangle$ ;  
 $t_2 \tilde{\eta}' = \gamma_3 \pm i\nu$ ,  $\tilde{\nu} \in \langle i, \eta, \nu \rangle$ ;  $t_2 \tilde{\eta}' \eta = \gamma_3 \gamma + i\nu^2$ .

Remark(Morisugi).  $\pi_{8k+1}^S(P^{4k})$  で、  $(4k+1)!/2\gamma_{4k} = i\alpha_k$ .  $\alpha_k = pA^k i \in$

$\pi_{8k-1}^S(S^0)$ ,  $A: M^{n+8} \rightarrow M^n$  は Adams map.  $\zeta_n \gamma_{2n+1} = (n+1)!/2\Sigma\gamma_n$ .

古典群と  $SU_{2m}/Sp_n$  の準安定ホモトピー群の結果 ([M], [M-T]) に、James splitting を使えば、次が得られる。

Lemma 4.  $t_n \omega_n \gamma = (n, 24) \gamma_{2n-1} \nu$ .  $(24, n+2) \omega_n \nu = 0$ .

Theorem A の generators の記号の説明 ;  $\widehat{2\nu}^! = t_3(\widehat{2\nu}' - 2i\sigma)$ ,  $\widehat{2\nu}' \in \langle i, \overline{2\nu}, \widehat{2\nu} \rangle \subset \pi_{14}^S(Q_3)$ ,  $\overline{2\nu}$ ,  $\widehat{2\nu}$  は  $\nu$  に関する (co-)extension;  $\tilde{\sigma}' = t_2 \tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\sigma} \in \langle i, 2\nu, \sigma \rangle$ ;  $\tilde{\nu} = t_2 \tilde{\nu}'$ ,  $\tilde{\nu}' \in \langle i, 2\nu, \bar{\nu} \rangle$ ;  $\tilde{\nu}'' \in \langle i, \gamma_5, \nu \rangle$ ;  $\tilde{\mu} = t_2 \tilde{\mu}'$ ,  $\tilde{\mu}' \in \langle i, 2\nu, \mu \rangle$ ; 残りは後で、説明する。

§ 2. 主目的から得られる結果を、初めに紹介する。  $M(X) = \{X, X\}$ ,  $\varepsilon(X)$  を空間  $X$  の安定自己ホモトピー同値類の群とする。

Theorem 1.  $2 \leq n \leq 6$  のとき、  $M(P^n) \cong \mathbb{Z}^n$ ;  $\varepsilon(P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  $M(P^7) \cong \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$ ;  $\varepsilon(P^7) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$ .

証明の概要。  $n = 2$  は、Oka、  $n = 3$  は、Yamaguchi の結果である。  
 $M(P^n)$  については省略。記号:  $\iota'_n$  を  $P^n$  の identity map を表わす。

Barcus-Barratt(または Oka-Sawashita-Sugawara)の完全列を考える;

$$i_* \pi_{2n}^S(P^{n-1}) \xrightarrow{\lambda} \varepsilon(P^n) \xrightarrow{i^*} \varepsilon(P^{n-1}) \longrightarrow 0.$$

ここで、  $\lambda(i\alpha) = \iota'_n + i\alpha p$ ,  $i^*(\beta) = \beta|P^{n-1}$  (restriction) である。

$$\pi_8^S(P^3) = \mathbb{Z}_2\{i\nu^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_3\gamma\}; \pi_{10}^S(P^4) = 0; \pi_{12}^S(P^5) = \mathbb{Z}_3\{i\beta_1\};$$

$\pi_{14}^S(P^6) = \mathbb{Z}_2\{\tilde{i}\tilde{\nu}\}$  となるので、 $i\nu^2 \in \Sigma\gamma_3^*(\Sigma P^3, P^4)$ ,  $i\beta_1 \in \Sigma\gamma_5^*(\Sigma P^5, P^6)$  及び  $i\tilde{\nu} \in \Sigma\gamma_6^*(\Sigma P^6, P^7)$  を言えばよい。(3) より、 $i\nu^2 = i\nu(q_1\gamma_3) \in \Sigma\gamma_3^*(\Sigma P^3, P^4)$  である。 $\alpha_1 = 8\nu$  を  $\pi_3^S(S^0)$  の 3-成分の生成元とする。 $\alpha_1 q_1 \gamma_3 = \alpha_1 \nu = 0$  だから、 $\alpha_1 q_1$  は  $P^4$  へ拡張でき、 $\pi_k^S(S^1)$  は、 $k = 9, 10$  のとき、2-torsion だから、これは  $P^5$  へ拡張できる。これらを  $\delta \in \pi_1^S(P^4)$ ,  $\delta' \in \pi_1^S(P^5)$  とおく。

$\# \Sigma^k(\gamma_3 \nu_7) = 4$ ,  $k \geq 0$ ;  $\# j_{3*}(\Sigma\gamma_3 \circ \nu_8) = 4$ ,  $j_n: \Sigma P^n \subset SU_{n+1}$  であるから、 $\{i, \Sigma\gamma_3, 4\nu_8\} \subset \pi_{12}(\Sigma P^4)$  が well-defined で、 $\alpha \in \{i, \Sigma\gamma_3, 4\nu_8\}$  に対して、 $\pi_{12}(SU_5) = \mathbb{Z}_{360}\{j_4\alpha\}$ .  $\pi_{12}(SU_6) = \mathbb{Z}_6\{j_5\Sigma\gamma_5\}$ ,  $2j_5\Sigma\gamma_5 = j_5 i\alpha$ . 故に、James splitting より、stable で、 $2\gamma_5 = i\alpha$ .

さて、 $\delta' \circ 4\gamma_5 = 2\delta\alpha \in 2\delta\langle i, \gamma_3, 4\nu \rangle \subset \langle \alpha_1 q_1, \gamma_3, 8\nu \rangle \subset \langle \alpha_1, \nu, \alpha_1 \rangle \ni \beta_1 \bmod 0$ . 以上で、前半が証明された。

$p_7^*: \pi_{15}^S(S^0) \rightarrow \pi_7^{-1}(P^7)$  が monomorphism となることを認めることにする。 $g_8 i\tilde{\nu} = g_4 t_2 \tilde{\nu}' = g_2(h)\tilde{\nu}' \in \langle \nu, 2\nu, \tilde{\nu} \rangle \ni \eta\kappa \bmod 0$ .  $\therefore g_8 i\tilde{\nu} p_7 = \eta\kappa p_7 \neq 0$ ,  $i\tilde{\nu} p_7 \neq 0$ ;  $M(P^7) \cong \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

$M(P^2) = \mathbb{Z}\{\iota'_2\} \oplus \mathbb{Z}\{\mu_1\}$ ,  $\mu_1 = i\zeta_2 p$ ;  $\varepsilon(P^2) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_2 - \mu_1\}$ ;  $\varepsilon(P^6) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_6 - \mu''_1\}$  ( $\mu_1^{(n)} \in M(P^n)$  は  $i\mu_1^{(n-1)}$  の extension),  $(\mu''_1)^2 = 2\mu''_1$  であることを使う。 $\mu_1^{(4)} = x$  とおく。 $x = ix'$ ,  $x' \in \{P^6, P^5\}$  は  $\mu''_1$  の extension にとれ、 $x^2 = 2x + ai\tilde{\nu}p$ ,  $a = 0$  or 1 となる。 $g_7 \mu''_1 = 0$  を認めて、 $g_8 x = g_7 x' \in g_7 \langle \mu''_1, \gamma_6, p_7 \rangle = -\langle g_7, \mu''_1, \gamma_6 \rangle p_7$ . 故に、 $g_8 x = \alpha p_7$ ,  $\alpha \in \pi_{15}^S(S^0)$  となる。 $\therefore 0 = \alpha p_7 ix' = g_8 x^2 = (2\alpha + a\eta\kappa)p_7$ ;  $2\alpha + a\eta\kappa = 0$ . 従って、 $a = 0$  であり、 $\varepsilon(P^7) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_7 - x\}$  となる。

§ 3. 以下、 $\pi_k^S(P)$  の 2-torsion の決定を、 $k = 16, 17$  の場合を例に挙げて、その概要を述べる。これからの議論はすべて、2-torsion で行うも

のとする。  $k \leq 10$  での  $\pi_k^S(P^n)$  の結果 [Mu] は、自由に使う。  $\omega_1 = \nu': S^6 \rightarrow S^3$  を出発する cofiber 列 を用いれば、次を得る。

Lemma 5.  $\pi_{18}^S(Q_2) = \mathbb{Z}_8\{\tilde{\zeta}\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\eta\kappa\}$ , ただし、 $\tilde{\zeta}$  は、 $p_2\tilde{\zeta} = -\tilde{\zeta}$  かつ  $\#\tilde{\zeta} = 8$  を満たす任意の元である。

Lemma 6.  $\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = 0; \{2\iota_5, \eta_5, \zeta_6\} = 0$ .

Proof. よく知られているように、 $\pi_{10}(M^6)$  で  $i\nu_5\eta_8^2 \neq 0$ . 一方、

$$i\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = -\{i, 2\iota_5, \eta_5\} \circ \nu_7 = -\{i, 2\iota_5, \eta_5\}_2 \circ \nu_7 \subset -\{i, 2\iota_5, 0\}_2 \ni 0 \bmod i_*\Sigma^2\pi_8(S^3) = 0.$$

これで、前半が証明された。後半は、前半と  $\zeta_6 \in \{\nu_6, 8\iota_9, 2\sigma_9\}$  なること及び Toda bracket の Jacobi identity より、証明される。

次に、 $\Sigma\omega_2$  をある合成で表わそう。 $\nu' \in \{\eta_3, 2\iota_4, \eta_4\}$  より、extension  $\bar{\eta}_3 \in [M^5, S^3]$ , coextension  $\tilde{\eta}_4 \in \pi_6(M^5)$  が存在して、 $\nu' = \bar{\eta}_3\tilde{\eta}_4$ .  $\therefore \omega_2 \in \{i, \nu', \nu_6\} = \{i, \bar{\eta}_3\tilde{\eta}_4, \nu_6\}$ ;  $\Sigma\omega_2 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \nu_7\}$ . Lemma 6 から、 $\tilde{\eta}_5\nu_7 \in \{i, 2\iota_5, \eta_5\} \circ \nu_7 = -i\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = 0$ . 故に、 $\Sigma\omega_2 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \nu_7\} = \{i\bar{\eta}_4, \tilde{\eta}_5, \nu_7\} \bmod i_*\pi_{11}(S^4) + \pi_8(\Sigma Q_2) \circ \nu_8 = \pi_8(\Sigma Q_2) \circ \nu_8$ . 結局、 $\Sigma\omega_2 = \bar{\alpha}\tilde{\nu}_7$  と表わせる。ここで、 $\alpha = i\bar{\eta}_4$  で、extension, coextension は、 $\beta = \tilde{\eta}_5$  に関してとる。  $X = M^6 \cup_{\beta} e^8$  とする。

Lemma 7.  $\omega_{2\eta}^{10} = i\varepsilon_3 \cdot \omega_{2\eta}^{10\sigma}{}_{11} = 0$ .  $\omega_{2\sigma} = 0$ .  $\omega_{2\varepsilon} = i\eta\kappa$ .

Proof.  $\omega_{2\eta}^{10} \in -i\{\nu', \nu_6, \eta_9\} \ni i\varepsilon_3 \bmod 0$ .  $\omega_{2\sigma} = \bar{\alpha}\tilde{\nu}\sigma$ .  $\tilde{\nu}\sigma \in \langle i,$

$\tilde{\eta}, \nu \times \sigma = -i \langle \tilde{\eta}, \nu, \sigma \rangle \subset i_* \pi_{14}^S(M^2) = 0$ . 残りは、省略。

さて、(1) を使って、 $\pi_{16}^S(P)$  を決定しよう。  $k = 12, 13$  のとき、  
 $\pi_k^S(S^0) = 0$  より、 $\pi_{16}^S(P^2) = \mathbb{Z}_2\{i\sigma^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\kappa\}$ .  $\gamma_2\xi = 2i\nu\xi = 0$ ,  $p_3\gamma_3 = \eta$  より、 $\pi_{16}^S(P^3) \cong \pi_{16}^S(P^2) \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_3\mu\}$ .

Lemma 4, 7 より、 $\gamma_3\eta^2\sigma = (4t_2\omega_2 + 8i\sigma)\sigma = 0$ .  $\gamma_3\nu^3 = i\nu\nu^3 = i\nu\eta\bar{\nu} \in i\langle \eta, \nu, \eta \rangle \bar{\nu} \ni i\nu^2\bar{\nu} = 0 \bmod 0$ .  $\therefore \pi_{16}^S(P^4) \cong \pi_{16}^S(P^2)$ .

$\nu^2 \in \langle \eta, \nu, \eta \rangle \bmod 0$  であるから、 $\nu$  に関する  $\eta$  の (co-)extension  $\bar{\eta}', \tilde{\eta}''$  をとって、 $\nu^2 = \bar{\eta}'\tilde{\eta}''$ .  $\gamma_4\bar{\eta}' \in -\langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle p$ .

Lemma 8.  $\langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle \ni 0 \bmod 0$ ;  $\gamma_5\nu = 0$ .

Proof.  $n = 4, 5$  のとき、 $\pi_{14}^S(P^n) = i_*\pi_{14}^S(P^3) = \mathbb{Z}_2\{i\bar{\nu}\}$  なる事実は認めることにする。前者を示す。 $\langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle \ni i\bar{\nu}$  とする。 $g_5\langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle = -\langle g_5, \gamma_4, \eta \rangle \nu \subset \pi_{12}^S(S^0)\nu = 0$ .  $g_5(i\bar{\nu}) = g_4\bar{\nu} = \eta\kappa$ .  $g_3\pi_{14}^S(P^2) = 0$ . 後者も同様。

Lemma 8 より、 $\gamma_4\bar{\eta}' = 0$ ,  $\gamma_4\nu^2 = 0$ .  $\nu^2$  の coextension として  $\tilde{\nu}^2 = \tilde{\eta}\tilde{\eta}'', \delta = \bar{\eta}'$  ととる。 $2\tilde{\eta}'' \in -i\langle \nu, \eta, 2\iota \rangle = 0$  より、 $\#\tilde{\nu}^2 = 2$ .  $\therefore$

$\pi_{16}^S(P^5) \cong \pi_{16}^S(P^2) \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}^2\}$ .  $\pi_{16}^S(P^6) \cong \pi_{16}^S(P^5) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$  は明らか。

Lemma 3 より、 $\gamma_6\nu = it_3\omega_3\nu = 0$ .  $\therefore \pi_{16}^S(P^7) \cong \pi_{16}^S(P^5) \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_7\eta\}$ ,  $\pi_{16}^S(P^8) = \mathbb{Z}\{\xi_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\nu^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\sigma^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\kappa\}$ .

次に、 $\pi_{17}^S(P)$  を決定しよう。

Lemma 9. Lemma 5 を満たすある  $\tilde{\xi}$  があって、 $\langle \omega_2, \sigma, 16\iota \rangle \ni \tilde{\xi} \bmod$

$\{16i\rho, i\eta\kappa\}$ .  $\langle\omega_2, 8i, 2\sigma\rangle$  も同様。

Proof.  $\omega_2 = \bar{\alpha}\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{\nu}\sigma = 0$  であるから、 $\langle\omega_2, \sigma, 16i\rangle \supset \bar{\alpha}\langle\tilde{\nu}, \sigma, 16i\rangle \subset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \langle\tilde{\nu}, \sigma, 16i\rangle \rangle = \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \xi \rangle \ni \phi \pmod{\omega_2\pi_8^S(S^0) + 16\pi_{18}^S(Q_2) + i\bar{\eta}\circ\pi_{15}^S(M^2) + \pi_7^S(Q_2)\circ\xi} = H$ . ここで、 $\pi_7^S(Q_2) = \mathbb{Z}\{\widehat{12i}\}$ ,  $\widehat{12i} \in \langle i, 2\nu, 12i \rangle$ .  $\widehat{12i}\circ\xi \in \langle i, 2\nu, 12i \rangle\circ\xi \supset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, 12i \rangle\circ\xi \subset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, 12\xi \rangle \ni 12\phi \pmod{12\pi_7^S(Q_2)\circ\xi + i\bar{\eta}\pi_{15}^S(M^2)} = \{12\widehat{12i}\circ\xi, i\eta\kappa\}$ .  $p_*\phi = -\xi$ .  $8\phi \in -i\bar{\eta}\langle\tilde{\eta}, \xi, 8i\rangle = 0$ .  $\therefore \bar{\eta}\langle\tilde{\eta}, \xi, 8i\rangle \subset \langle 2\nu, \xi, 8i \rangle \ni 0 \pmod{8\rho}$ . 故に、 $\phi$  を Lemma 9 を満たす元  $\tilde{\xi}$  としてよい。Lemma 7 より、 $H = \{i\eta\kappa, 16i\rho, 12\tilde{\xi}\}$ .

この証明から分かるように、 $\tilde{\xi}$  として、 $\langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \xi \rangle$  の元を選べばよい。

Lemmas 3, 9 より、 $\tilde{\eta}'\eta\mu \in \tilde{\eta}'\eta\langle\eta, 2i, 8\sigma\rangle \subset \langle\tilde{\eta}'\eta^2, 2i, 8\sigma\rangle \subset \langle 4\omega_2, 2i, 8\sigma \rangle + \langle 8i\sigma, 2i, 8\sigma \rangle \subset \langle 4\omega_2, 8i, 2\sigma \rangle + \langle 8i\sigma, 2i, 8\sigma \rangle \supset 4\langle\omega_2, 8i, 2\sigma\rangle + i\langle 8\sigma, 2i, 8\sigma \rangle \ni 4\tilde{\xi} + 16i\rho \pmod{\pi_{11}^S(Q_2)\circ 2\sigma} = 0$ .  $\therefore$

$$(4) \quad \tilde{\eta}'\eta\mu = 4\tilde{\xi} + 16i\rho.$$

さて、 $\pi_{17}^S(P^2) = \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$  は明らか。  $t_2\tilde{\xi} = \tilde{\xi}'$  とおく。(4) と Lemma 3 より、

$$(4)' \quad \gamma_3\eta\mu = 4\tilde{\xi}' + 16i\rho; \quad 4i\tilde{\xi}' = 16i\rho.$$

(2) を用いれば、 $f_1\sigma^2 = i\eta\sigma^2 = 0$ ,  $f_1\kappa = i\eta\kappa$  より、 $\pi_{17}^S(P^3) = \mathbb{Z}_8\{\tilde{\xi}'\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$ .

完全列

$$\pi_{17}^S(S^7) \xrightarrow{\gamma_3^*} \pi_{17}^S(P^3) \xrightarrow{i^*} \pi_{17}^S(P^4) \xrightarrow{p^*} \pi_{17}^S(S^8) \longrightarrow \dots$$

において、 $\gamma_3 \mu \neq 0$ ,  $\gamma_3 \eta \mu = 4\tilde{\xi}' + 16i\rho$ ,  $\gamma_3 \eta^2 \sigma = \gamma_3 \nu^3 = 0$ .

Lemma 10. coextensions  $\widehat{\eta^2 \sigma}$ ,  $\tilde{\nu}^3$  をうまく選んで、 $\# \tilde{\nu}^3 = 2$ ,  $\# \widehat{\eta^2 \sigma} = 64$ ,  $2\widehat{\eta^2 \sigma} = \pm i\tilde{\xi}' \pm i\rho$ .

Proof.  $2\widehat{\eta^2 \sigma} \in -i\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle$ .  $p_3 \langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \subset \langle \eta, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \ni \xi$  より、 $\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \ni \tilde{\xi}' \pmod{i\rho}$ . Lemma 9, (4)' より、 $8\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \subset \langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 16\iota \rangle \supset \langle \gamma_3 \eta^2, \sigma, 16\iota \rangle \subset \langle 4t_2 \omega_2, \sigma, 16\iota \rangle + \langle 8i\sigma, \sigma, 16\iota \rangle \ni 4\tilde{\xi}' + 8i\rho \pmod{\gamma_3 \pi_{10}^S(S^0) + 16\pi_{17}^S(P^3)} = \{4\tilde{\xi}', 16i\rho\}$ .  $\therefore 16\widehat{\eta^2 \sigma} \equiv 4i\tilde{\xi}' + 8i\rho = \pm 8i\rho \pmod{16i\rho}$ . 従って、 $\widehat{\eta^2 \sigma}$  については証明された。

$2\tilde{\nu}^3 \in -i\langle \gamma_3, \nu^3, 2\iota \rangle$ .  $\langle \gamma_3, \nu^3, 2\iota \rangle \supset \langle \gamma_3 \nu, \nu^2, 2\iota \rangle = \langle \pm i\nu \nu, \langle \eta, \nu, \eta \rangle, 2\iota \rangle$  で、Jacobi identity を使えばよい。

Lemma 10, (4)' より、 $\pi_{17}^S(P^4) = \mathbb{Z}_{64}\{\widehat{\eta^2 \sigma}\} \oplus \mathbb{Z}_8\{\pm i\rho - 2\widehat{\eta^2 \sigma}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}^3\}$ .

$\omega_2$  を出発する cofibre 列から得られた次の完全列を考える；

$$\pi_{18}^S(S^{10}) \xrightarrow{\omega_2^*} \pi_{18}^S(Q_2) \xrightarrow{i^*} \pi_{18}^S(Q_3) \xrightarrow{p^*} \pi_{18}^S(S^{11}) \longrightarrow \dots$$

$\tilde{\sigma} \in \langle i, \omega_2, \sigma \rangle$  とおく。Lemma 7, 9 より、 $16\tilde{\sigma} \in -i\langle \omega_2, \sigma, 16\iota \rangle \ni -i\tilde{\xi}' \pmod{16i\rho}$ . 故に、 $\tilde{\sigma}$  をうまく選べば、次が成り立つ。

Lemma 11.  $16\tilde{\sigma} = -i\tilde{\xi}'$ ,  $\pi_{18}^S(Q_3) = \mathbb{Z}_{128}\{\tilde{\sigma}\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$ .

$t_3 \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}'$  とおく。Lemma 10, 11, (4)' より、 $16\tilde{\sigma}' = -i\tilde{\xi}'$ ,  $64\tilde{\sigma}' = 4i\tilde{\xi}' = 16i\rho = 32i\eta^2\sigma$ . 故に、(1) より、 $\pi_{17}^S(P^5) = \mathbb{Z}_{128}\{\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\eta^2\sigma - 2\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\nu^3\}$ .

Lemma 8 より、 $\gamma_5\nu^2 = 0$ . 故に、(1) より、 $\pi_{17}^S(P^6) \cong \pi_{17}^S(P^5)$ .

Lemma 12.  $8i\tilde{\sigma} = 8a\omega_4 + 16bi\rho$ ,  $a$ : odd.  $\pi_{18}^S(Q_4) = \mathbb{Z}_{128}\{\omega_4\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma} - a\omega_4 - 2bi\rho\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$ .

Proof. 次の可換図式を考える ;

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{19}(Q_3, Q_2) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{18}(Q_2) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{18}(Q_3) & & \\ \downarrow p_* & & \downarrow j_{2*} & & \downarrow j_{3*} & & \\ \pi_{19}(S^{11}) & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_{18}(Sp_2) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_{18}(Sp_3) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_{18}(S^{11}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Mimura-Toda より、 $\pi_{18}(Sp_2) = \mathbb{Z}_8\{[\xi_7]\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\bar{\varepsilon}_3\}$ ,  $\pi_{18}(Sp_3) = \mathbb{Z}_{16}$ .

$\Delta'\sigma_{11} = j_2^* \sigma_{10}$ ,  $4p'j_2^* \sigma_{10} = 4\nu^* \sigma_{10} \neq 0$ .  $\therefore \pi_{18}(Sp_3) = \mathbb{Z}_{16}\{[8\sigma_{11}]\}$ ,  $2[8\sigma_{11}] = i[\xi_7]$ . Toda brackets  $\{i, \nu', \xi_6\}$ ,  $\{i, \omega_2, 8\sigma_{10}\}$  は well-defined で、これらの元  $\tilde{\xi}_6''$ ,  $\theta$  は  $j_{2*}$ ,  $j_{3*}$  によって、 $[\xi_7]$ ,  $[8\sigma_{11}]$  を hit する。故に、James splitting により、stable で、 $2\theta = i\tilde{\xi}_6''$ .  $8\tilde{\xi}_6'' \in -i\{\nu', \xi_6, 8\iota_{17}\} \ni 0 \bmod 0$ .  $\therefore \langle 2\nu, \xi, 8\iota \rangle \ni 0 \bmod 8\rho$ ,  $\pi_{18}(S^3) = \mathbb{Z}_2\{\bar{\varepsilon}_3\}$ ,  $\bar{\varepsilon} = \eta\kappa$ . Lemma 6 より、 $\tilde{\xi}_7'' \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \xi_7\} \supset \{i\bar{\eta}_4, \tilde{\eta}_5, \xi_7\} \bmod \{i\bar{\varepsilon}_4\} + \pi_8(\Sigma Q_2) \circ \xi_8$ . 故に、Lemma 9 の証明より、stable で、 $\tilde{\xi}_7'' \in \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \xi \rangle \bmod \{i\eta\kappa, 12\tilde{\xi}\}$ .  $\therefore \tilde{\xi}_7'' \equiv \tilde{\xi} \bmod \{i\eta\kappa\} + \{12\tilde{\xi}\}$ ;  $i\tilde{\xi}_7'' = xi\tilde{\xi}$ ,  $x$ : odd;  $2\theta = -xi\tilde{\xi}$ .

$(Q_4, Q_3)$ ,  $(Sp_4, Sp_3)$  の homotopy 完全列を含む可換図式を考え、

James splitting を使えば、 $8\omega_4 = i\theta$ .  $\therefore 16\omega_4 = 2i\theta = -xi\tilde{\zeta}$ .  $\theta \in \langle i, \omega, 8\sigma \rangle \supset \langle i, \omega_2, \sigma \rangle \circ 8\iota \ni 8\tilde{\sigma} \bmod i_*\pi_{18}^S(Q_2) = \{16\tilde{\sigma}, i\rho\}$ . つまり、 $\theta = 8\tilde{\sigma} + di\rho$ ,  $c: \text{odd}$ ;  $16\tilde{\sigma} + 2di\rho = 2\theta = xi\tilde{\zeta} = -16x\tilde{\sigma}$ . 故に、Lemma 11 より、 $d = 16e$  で、 $8\omega_4 = 8ci\tilde{\sigma} + 16ei\rho$ .  $(c, 16) = 1$  より、 $a: \text{odd}$ ,  $ac + 16y = 1$  を満たす  $a, y$  が存在する。  $b = ae$  とすれば、関係式が得られる。これは次の短完全列が分裂することを意味する；

$$0 \longrightarrow \pi_{18}^S(Q_3) \xrightarrow{i_*} \pi_{18}^S(Q_4) \xrightarrow{p_*} \pi_{18}^S(S^{15}) \longrightarrow 0.$$

証明終わり。

(1) と Lemma 12 より、 $\pi_{17}^S(P^7) = \mathbb{Z}_{128}\{t_4\omega_4\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - at_4\omega_4 - 2bi\rho\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\tilde{\nu}^2\sigma - 2i\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\nu}^3\}$ . これと Lemma 2 より、 $\gamma_{\eta^2} = 4\alpha + wi\tilde{\nu}^3$ ,  $\alpha = i\tilde{\sigma}' - at_4\omega_4 - 2bi\rho$  としてよい。

$\nu_4: S^7 \longrightarrow S^4$  を出発する cofibre 列を使って、次を得る。

Lemma 13.  $\pi_{16}^S(\mathbb{H}P^2) = \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}''\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\eta}''\sigma\}$ ,  $\tilde{\nu}'' \in \langle i, \nu, \bar{\nu} \rangle$ ,  $\tilde{\eta}'' \in \langle i, \nu, \eta \rangle$ ;  $\pi_{17}^S(\mathbb{H}P^2) = \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\eta}''\eta\sigma\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\mu}''\}$ ,  $\tilde{\nu}^3 = \tilde{\nu}''\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\mu}'' \in \langle i, \nu, \mu \rangle$ .

Lemma 13 より、 $\gamma_3(\mathbb{H})\eta^2 = wi\tilde{\nu}^3$ .  $\therefore h_3i\tilde{\nu}^3 \in i\langle h_2i', \gamma_3, \nu^3 \rangle = i\langle i''q_1, \gamma_3, \nu^3 \rangle \subset i\langle i'', \nu, \nu^3 \rangle \ni i\tilde{\nu}^3 \bmod i_*\pi_{16}^S(\mathbb{H}P^2)\nu^3 = 0$ .  $\gamma_3(\mathbb{H})\eta^2 \in \langle i, \gamma_2(\mathbb{H}), \nu \rangle \eta^2 = -i\langle \gamma_2(\mathbb{H}), \nu, \eta \rangle \eta \ni i\tilde{\nu}^3 \bmod i\tilde{\eta}''\eta\sigma$ .  $\therefore p_*\langle \gamma_2(\mathbb{H}), \nu, \eta \rangle \subset \langle 2\nu, \nu, \eta \rangle \ni \bar{\nu} \bmod \eta\sigma$ ,  $\text{Ker } p_* = i_*\pi_{16}^S(S^4) = 0$ .

故に、 $w: \text{odd}$  で、 $\gamma_{\eta^2} = i\tilde{\nu}^3 + 4\alpha$ . (1) より、次の結果を得る。

Theorem 2. i)  $\pi_{17}^S(P^8) = \mathbb{Z}_{128}\{\gamma_8\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - a\gamma_8 - 2bip\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\eta^2\tilde{\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'\}.$

ii)  $\pi_{17}^S(P^9) = \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - 2bip\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\eta^2\tilde{\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'\}.$

Theorem A の記号の説明の続き;  $\tilde{\nu}^2 \in \langle i, \gamma_4, \nu^2 \rangle$ ;  $\phi = i\tilde{\sigma}' - 2bip$ ;  $\phi = i\eta^2\tilde{\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'.$

§ 4. 最後に、 $S^1$ -transfer の image を決定しよう。

$B_k = \text{Im} \{g_{n*}: \pi_{k-1}^S(P^{n-1}) \rightarrow \pi_k^S(S^0), k \leq 2n-1\}$  で、 $B_1 = B_2 = 0$ ;  $B_3 = \pi_3^S(S^0)$ ;  $B_4 = B_5 = 0$ ;  $B_6 = \pi_6^S(S^0)$ ;  $B_7 = 2\pi_7^S(S^0)$ ;  $B_8 = \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}\}$ ;  $B_9 = \mathbb{Z}_2\{\eta^2\sigma\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu^3\}$ ;  $B_{10} = \mathbb{Z}_3\{\beta_1\}$ ;  $B_{11} = \pi_{11}^S(S^0)$  であった。  $B_{12} = 0.$

Theorem B.  $B_{13} = \mathbb{Z}_3\{\alpha_1\beta_1\}$ ;  $B_k = \pi_k^S(S^0)$ ,  $k = 14, 19$ ;  $B_{15} = \mathbb{Z}_{240}\{2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta\kappa\}$ ;  $B_{16} = \mathbb{Z}_2\{\omega^*\}$ ;  $B_{17} = \mathbb{Z}_2\{\eta\omega^*\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta^2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu\kappa\}$ ;  $B_{18} = \mathbb{Z}_8\{\nu^*\}$ , ここに、 $\omega^* = \eta^* + a\eta\rho$ ,  $a = 0$  または  $1$  である。

証明の概要。Theorem 1 の証明より、 $g_4\tilde{\nu} = \eta\kappa$  であった。 $g_n \zeta_{n-1}$  は complex J-homomorphism の image の生成元であることを思い出せば、 $g_8\zeta_7 = 2\rho$ ,  $g_9\zeta_8 = \eta^2\rho$ ,  $g_{10}\zeta_9 = \xi$ .  $\therefore B_{15} = \mathbb{Z}_{240}\{2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta\kappa\}.$

Lemma 14.  $g_4\tilde{\sigma}' = \sigma^2$ ;  $g_6\tilde{2\nu}! \equiv \kappa \pmod{\sigma^2}.$

Proof.  $g_4\tilde{\sigma}' = g_4t_2\tilde{\sigma} = g_2(H)\tilde{\sigma} \in \langle \nu, 2\nu, \sigma \rangle \ni 0 \pmod{\sigma^2}$ . 一方、 $\langle i, 2\nu, \sigma \rangle = \Sigma^\infty\{i, 2\nu_{10}, \sigma_{13}\}$  より、 $\tilde{\sigma} = \Sigma^\infty\tilde{\sigma}_{13}$ ,  $\tilde{\sigma}_{13} \in \{i, 2\nu_{10}, \sigma_{13}\}$  としてよい。 $H: \pi_{22}(S^8) \rightarrow \pi_{22}(S^{15})$  を Hopf homomorphism とすれば、 $H(g_2(H) \circ \Sigma\tilde{\sigma}_{13}) = H(g_2(H)) \circ \Sigma\tilde{\sigma}_{13} = \pm p \circ \Sigma\tilde{\sigma}_{13} = \pm \sigma_{15}$ .  $\therefore g_2(H) \circ \Sigma\tilde{\sigma}_{13} \equiv$

$$\pm \sigma g_{15} \bmod \Sigma \pi_{21}(S^7) = \{\Sigma \sigma' \circ \sigma_{15}, \kappa_8\}. \therefore g_4 \tilde{\sigma}' = \sigma^2.$$

$$g_6 \tilde{2\nu}' = g_6 t_3(\tilde{2\nu}' - 2i\sigma) = g_3(H) \tilde{2\nu}' \in \langle \nu, \overline{2\nu}, \tilde{2\nu} \rangle \equiv \langle \nu, 2\nu, \nu, 2\nu \rangle \ni \kappa \bmod \sigma^2. \therefore g_6 \tilde{2\nu}' \equiv \kappa \bmod \sigma^2.$$

$$\text{Lemma 15. } g_4 \tilde{\mu} = 0; g_7 \tilde{\nu}'' = \omega*; g_7 \tilde{\sigma}' = \nu*; g_3 \tilde{\sigma}^2 = \bar{\sigma}.$$

Proof.  $g_4 = \pm \sigma p \pm \bar{\nu}$ ,  $\bar{\nu}: g_2 = \nu$  の extension であり、 $0 = g_4 \gamma_3 = \sigma \eta + \bar{\nu} \gamma_3$  より、 $\bar{\nu} \gamma_3 = \eta \sigma$ .  $\tilde{\mu} \in \langle \gamma_3, 8\sigma, 2\iota \rangle \bmod \gamma_3 \pi_8^S(S^0) + 2\pi_{16}^S(S^0) + i_* \pi_{15}^S(P^2) = \{\gamma_3 \eta \sigma, \gamma_3 \bar{\nu}\} + \{i \langle i', \eta, \xi \rangle\}$  より、 $g_4 \tilde{\mu} = \sigma \mu + \bar{\nu} \tilde{\mu}$ ,  $\bar{\nu} \tilde{\mu} \in \langle \eta \sigma, 8\sigma, 2\iota \rangle \ni \eta \rho = \sigma \mu \bmod \langle \nu, \eta, \xi \rangle = 0$ .  $\therefore \eta \langle \nu, \eta, \xi \rangle = - \langle \eta, \nu, \eta \rangle \ni \xi \ni \nu^2 \xi = 0 \bmod 0$ .  $\therefore g_4 \tilde{\mu} = 0$ .

$g_7 \tilde{\nu}'' \in \langle g_6, \gamma_5, \nu \rangle = \Sigma^\infty \{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15} \gamma_5, \nu_{26}\}_1 \cdot H\{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15} \gamma_5, \nu_{26}\}_1 \ni \pm \nu_{27}$ . [T2] の Lemma 12.15 より、 $H(\omega_{14}) = \nu_{27}$  となる元  $\omega_{14} \in \pi_{30}(S^{14})$  が存在する。  $\therefore \{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15} \gamma_5, \nu_{26}\}_1 \ni \pm \omega_{14} \bmod \Sigma^2 g_6 \circ \pi_{30}(\Sigma^{15} P^4) + \pi_{27}(S^{14}) \circ \nu_{27} + \Sigma \pi_{29}(S^{13})$ .  $\therefore g_7 \tilde{\nu}'' \equiv \omega \bmod g_6 \pi_{15}^S(P^4) + \{\eta \rho\} = \{\eta \rho\}$ .  $\therefore i_* \pi_{15}^S(P^4) = Z_2\{\tilde{i\mu}\}$ ,  $i: P^4 \subset P^8$  は認めることにする。  $\omega \equiv \eta* \bmod \eta \kappa$  より、第2の主張を得る。第3の主張の証明は略す。

$$g_3 \tilde{\sigma}^2 \in \langle \nu, \eta, \sigma^2 \rangle \subset \langle \nu, \eta \sigma, \sigma \rangle \ni \bar{\sigma} \bmod 0. \text{ 証明終わり.}$$

Remark. Knapp によれば、 $S^1$ -transfer の image に入らない元は、次の通りである： $\mu$ -series  $\mu_r, \eta m_r, r \geq 0$ ;  $\rho_r, \eta \rho_r, r \geq 1$ ,  $\rho_r$  は  $J$ -image  $J\pi_{8r-1}^S(SO)$  の 2-成分の生成元である。

Conjecture.  $S^1$ -transfer の image に入らない元は、本質的に、上記の Knapp が指摘した元のみである。

## References

- [B-B] W. D. Barcus and M. G. Barratt, On the homotopy classification of the extension of a fixed map, Trans. Amer. Math. Soc., 88(1958), 57-74.
- [J] I. M. James, The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture Note, 24(1976), Cambridge.
- [K] K. Knapp, Some applications of the K-theory to framed cobordism: e-invariant and transfer, Habilitationsschrift, Bonn, 1979.
- [M] M. Mimura, Quelques groupes d'homotopie metastables des espaces symmetriques  $Sp(n)$  et  $U(2n)/Sp(n)$ , C. R. Acad. Paris, 262(1966), 20-21.
- [M-T] M. Mimura and H. Toda, Homotopy groups of symplectic groups, J. Math. Kyoto Univ., 3(1964), 217-50.
- [Mo] R. E. Mosher, Some stable homotopy of complex projective space, Topology, 7(1968), 179-93.
- [Mu] J. Mukai, The  $S^1$ -transfer map and homotopy groups of suspended complex projective spaces, Math. J. Okayama Univ., 24(1984), 179-200.
- [T1] H. Toda, A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., 32(1959), 103-19.
- [T2] H. Toda, Composition methods in homotopy groups of spheres, Ann. of Math. Studies, 49(1962), Princeton.

あとがき。

以上が、本研究集会当日に用意していた原稿であるが、今読み返してみると、記述不足や誤りがある。ここでは、次の3点について、注意する。

1. p. 3. Theorem 1 の証明において、 $i^*: \varepsilon(P^n) \rightarrow \varepsilon(P^{n-1})$  は onto としたが、一般には、 $n \geq 3$  のとき、 $\text{Im } i^* = \{ \alpha \in \varepsilon(P^{n-1}) \mid \alpha \gamma_{n-1} = \pm \gamma_{n-1} \}$  [B-B] である。これ以外の証明は通用するので、 $3 \leq n \leq 6$  のとき、 $i^*$  は onto で、 $\varepsilon(P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  となる。Theorem 1 に変更はない。

2. p. 11. Theorem A の記号の説明；より正確には、 $\Phi = i\sigma^{\sim'}$ ， $\Phi = i' \eta^{\sim 2} \sigma$  としてよい。 $2\Phi = \pm i\rho$  となる。

3. p. 12. 講演の中で、教えていただいたことであるが、 $\langle \sigma, 2\sigma, \sigma, 2\sigma \rangle$  という Kervaire invariant 1 の元は（証明は知らないが） $S^1$ -transfer の image ではないとのことで、Conjectue には反例がある。

以上 ( 1992.1.8 )