

主系列表現の行列要素に対する

CONSTANT TERM について

津田 豊久 三島川 寿一

(Hisachi Midorikawa)

§1.

G を非コンパクト、連結実単純 Lie 群 とし、その中心が有限とする。 G の放物型部分群 P は次の様な分解を持つ。 A を P の split torus とすれば $P = Z(A)N$ 。ここで N は P の unipotent radical, $Z(A)$ は A の G に於ける中心化群である。更に $Z(A)$ は或る reductive 部分群 M により、 $Z(A) = MA$, $M \cap A = \{1\}$ と分解される。さて m, n, n を各々 M, A, N の Lie 代数としよう。 P の元 p に対し $\text{Ad}(p)$ の n への制限を $\text{Ad}(p)|_n$ と書くことにする。そこで P 上の函数 d_p は次の如く定義される;

$$d_p(p) = |\det \text{Ad}(p)|_n|^{\frac{1}{2}}.$$

この稿での主題は、主系列表現の K -有限な行列要素 f に対する N 上の積分 $f^{(P)}(ma) \equiv \int_N (d_p f)(man) dn$ を具体的に書き表わすことにある。Harish-Chandra の意味の Schwarz 空間の元 f に対しては上記の積分が存在すること

については知られているが (Schwarz space の定義については P. 156, [5] 参照, 積分の存在については Proposition 8.3. 7.5, [5] 参照), 主系列表現に属する K -有限な行列要素は Schwarz 空間に含まれない。そこで上記積分 $f^{(P)}$ の或る種の正当化を試み、 $f^{(P)}$ についての具体的表示を求めることにする。

§2.

この節の始めに、^{まず} G の主系列ユニタリ表現の説明しておく。
 $P = MAN$ を G の cuspidal な放物型部分群とする。この時、 M は二乗可積分な G の既約ユニタリ表現を持つが、この様な表現を discrete series に属する表現と呼ぶことにする。 ω を M の discrete series に属する表現とし、 $\lambda \in A$ のユニタリ指標とする。そこで P の表現 $\omega \otimes \lambda$ を次の如く構成する;

$$(\omega \otimes \lambda)(man) = (\lambda \cdot dp)(a) \omega(m),$$

$$m \in M, a \in A, n \in N.$$

$\omega \otimes \lambda$ から誘導された G の表現を $\pi = \text{Ind}_P^G \omega \otimes \lambda$ と書く。 π はユニタリ表現であるが、これは主系列ユニタリ表現と呼ばれている。次に主系列表現の K -有限な行列要素に対する積分の正当化を試みる。 $G = KA_0N_0$ を G の岩沢分解, θ を対 (G, K) に対する Cartan involution とする。以下、我々は G の極大放物型部分群 $P = MAN$ として $A \subset A_0$, $N \subset N_0$

なる条件を満たすもののみを考える。そこで G は $G = KMAN$ と分解される。 N の元 n に対して $\pi = \theta(n)$ と置く。 π に対しては次の様な Ω の元 $H(\pi)$ が一意的に定まる; $\pi \in K \text{Map}^{H(\pi)} N$. $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数 $\mathfrak{g}_c$ をその複素化とし、 $\mathfrak{g}_c$ の展開環を $U(\mathfrak{g})$ と書くことにする。 $U(\mathfrak{g})$ の元は自然に G 上の C^∞ -函数全体からなる環 $C^\infty(G)$ にかう作用する。 $U(\mathfrak{g})$ の元 b の $C^\infty(G)$ 上の作用を、我々は $\underset{bf}{f}(b; x)$ ($x \in G, f \in C^\infty(G)$) 等と書くことにする。 π を主系列ユニタリ表現 (或る G の放物型部分群から誘導された) とし、 $\mathfrak{z}$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とする。 π の指標 Θ_π の具体的な表示 (例えば [2] 参照) が解っているので、或る $\mathfrak{z}$ の character χ_π に対し $z \Theta_\pi = \chi_\pi(z) \Theta_\pi$ となる事が証明出来る。従って $\pi(z) = \chi_\pi(z) 1$, $z \in \mathfrak{z}$ を得る。 ここで 1 は π の表現空間の恒等変換とする。 χ_π は π の無限小指標と呼ばれている。 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環、 $\mathfrak{a}_c$ をその複素化、 $W(\mathfrak{a}_c)$ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ の Weyl 群とする。 Harich-Chandra 同型写像 μ によつて $\mathfrak{a}_c$ の双対空間上の W -不変な多項式全体のなる環 $I(\mathfrak{a}_c)$ と同一視される。 そこで上の χ_π に対し或る $\mathfrak{a}_c$ 上の線型形式 λ が存在して $\mu(z)(\lambda) = \chi_\pi(z)$ がすべての $z \in \mathfrak{z}$ に対して成立する。 ここで χ_π が正則指標であるとは、 λ が $\mathfrak{a}_c$ 上正則であることを言う。

積分 $f^{(p)}$ の正当化は次の定理によりなされる。

[定理1] π を G の主系列ユニタリ表現で、その無限小指標 χ_π が正則であると仮定する。この時 π の K -有限な行列要素 f に対し極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_N (dpf)(man) e^{-\varepsilon \mathcal{F}(H(\pi))} dn$ は存在する。但し $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{a}$ 上の線型形式で $dp(a) = e^{\mathcal{F}(\log a)}$ ($a \in A$) により定められたものとする。

f を上記定理と同一なものとし、我々は今 $f^{(P)}$ を

$$f^{(P)}(ma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_N (dpf)(man) e^{-\varepsilon \mathcal{F}(H(\pi))} dn$$

によって定義する。

§3.

この節では $f^{(P)}$ を具体的に表わす。 $P = MAN$ を G の極大放物型部分群とすれば $\dim A = 1$ 。従って $\mathcal{F}(H_0) = 1$ を満たす $\mathfrak{a}$ の元 H_0 を取ることにより、 A は $a_t = \exp t H_0$, $t \in \mathbb{R}$ によって parametrize できる。 f を K -有限な G の主系列ユニタリ表現の行列要素とすれば Harish-Chandra の結果により次の事が解る； MA 上の函数 f_P が存在して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{ (dpf)(m \exp t H_0) - f_P(m \exp t H_0) \} = 0$$

が任意の $m \in MA$ に対して成立する (P.235, Theorem 1, [3])。

我々の主目的はこの函数 f_P により、 $f^{(P)}$ が書き表わされる

という事である。その為には以下の準備を行なう。

n と $\theta(n)$ によって生成された $\mathfrak{g}$ の部分環を $\mathfrak{g}^*$ としよう。この時 $\mathfrak{g}^*$ は split rank が 1 の半単純部分環である (Lemma 1.2.3.16, [4] 参照)。 $\mathfrak{g}^*$ に対する G の解析的部分群を G^* 、 G^* の岩沢分解を $G^* = K^* A^* N^*$ とする。 G^* の定め方から、 $A = A^*$, $N = N^*$, $K^* = K \cap G^*$ として良い。 $N_K(A)$, $Z_K(A)$ を各々 A の K に於ける normalizer, centralizer とする。 対 (P, A) の Weyl 群 W は $W = N_K(A)/Z_K(A)$ により与えられ、 $\dim A = 1$ の仮定から W の 数は 2 である。 そこで W の非自明な元を $\bar{w}$ と表わし $\bar{w}$ の代表を w と表わすことにする。

さて f 及び f_P を上述のものとし、 f が K -有限であることに注意すれば f_P を MAK 上の函数に拡張することにより

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ d_P(m \exp t H_0) f(m \exp t H_0 k) - f_P(m \exp t H_0 k) \right\} = 0$$

, $m \in MA$, $k \in K$

とすることが出来る。 そこで MA 上の函数 $C(\pi) f_P$ を次の如く定義する;

$$[C(\pi) f_P](ma) = \int_N e^{-S(H(\pi))} f_P(m a w \bar{k} \bar{m})^{-1} d\bar{n}$$

$$m \in M, a \in A,$$

ここで $\bar{k}(\pi)$ は K^* の元で $\pi \in \bar{k}(\pi) A N$ という条件によつ

で定めたものとする。Harish-chandraによるC-函数の理論によりこの積分の存在は解つてゐる (Lemma 5.3, Lemma 10.1, [1] 参照)。そこで次の定理を得る。

[定理 2] π を G の主系列ユニタリ表現でその無限小指標が正則なものとする。又 f を K -有限な π の行列要素とする。

この時

$$\int_N (d_p f)(man) dn = [C(\pi)f_p](ma)$$

がすべての $m \in M$, $a \in A$ について成立する。

注意 1. 上記定理の積分は、§2 で $f^{(p)}$ と書いたものを意味する。

注意 2. π の無限小指標が正則でなくとも、 $C(\pi)f_p$ が定義出来る表現 π に対しても定理 2 と同様な命題が成立する。

References

- 1 Harish-Chandra; Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. Math., 1976 pp. 117-201.
- 2 T. Hirai; The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto univ., vol 8 1968 pp. 313-363.

- 3 V. S. Varadarajan; Harmonic analysis on real reductive groups, Springer Verlag Lecture Notes in Math. vol 576 1977
- 4 G. Warner; Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer Verlag 1972
- 5 Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer Verlag 1972