

一般導分の双対概念について¹

岡山県立大学・情報工学部 小松 弘明 (Hiroaki Komatsu)
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University

本稿では, Nakajima [7] が与えた余代数 C 上の両側余加群から C への一般余導分の概念を, 代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$ と代数 B 上の余環 $\mathcal{D}$ の上の $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群から $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群への写像にまで拡張する. 拡張された一般余導分を表現する $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 両側余加群を構成し, それを用いて余分離余環の新たな特徴付けを与える.

1. 余環とその上の両側余加群

本稿において, R は単位元を有する可換環を表し, 代数と言えば常に単位元を有する結合的 R 代数を意味する. 代数 A, B 上の (A, B) 両側加群の圏を ${}_A\mathbf{M}_B$ で表す. $M, N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して, M から N への (A, B) 両側加群写像の全体を ${}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で表す.

A を代数とする. 代数 B と代数としての準同型写像 $\eta: A \rightarrow B$ で単位元を単位元へ移すものが与えられたとき, B を A 環という. 次のように言い替えることができる.

$$B \in {}_A\mathbf{M}_A, \quad \mu \in {}_A\mathrm{Hom}_A(B \otimes_A B, B), \quad \eta \in {}_A\mathrm{Hom}_A(A, B)$$

が与えられて, 図式

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B \otimes_A B & \xrightarrow{I_B \otimes \mu} & B \otimes_A B \\ \mu \otimes I_B \downarrow & & \downarrow \mu \\ B \otimes_A B & \xrightarrow{\mu} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes_A B & \xrightarrow{\eta \otimes I_B} & B \otimes_A B \xleftarrow{I_B \otimes \eta} B \otimes_A A \\ & \searrow \text{自然な同型} & \downarrow \mu \swarrow \text{自然な同型} \\ & & B \end{array}$$

が可換であるとき, B を A 環という. ここで, I_X は集合 X の恒等写像を表す.

双対化して,

$$C \in {}_A\mathbf{M}_A, \quad \Delta \in {}_A\mathrm{Hom}_A(C, C \otimes_A C), \quad \varepsilon \in {}_A\mathrm{Hom}_A(C, A)$$

が与えられて, 図式

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_A C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow I_C \otimes \Delta \\ C \otimes_A C & \xrightarrow{\Delta \otimes I_C} & C \otimes_A C \otimes_A C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ \swarrow \text{自然な同型} & \downarrow \Delta & \searrow \text{自然な同型} \\ A \otimes_A C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes I_C} C \otimes_A C \xrightarrow{I_C \otimes \varepsilon} & C \otimes_A A \end{array}$$

が可換であるとき, C を A 余環という. Δ を C の余積といい, ε を C の余単位写像という.

¹ 本論文は投稿予定の論文の予報である.

A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環とする. C の余積と余単位写像をそれぞれ Δ_C と ε_C とし, D の余積と余単位写像をそれぞれ Δ_D と ε_D とする.

$$M \in {}_A\mathbf{M}_B, \quad {}^M\rho \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, C \otimes_A M), \quad \rho^M \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, M \otimes_B D)$$

が与えられて, 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & C \otimes_A M & & M \otimes_B D & \\
 \Delta_C \otimes I_M \swarrow & & \xleftarrow{{}^M\rho} & & \xrightarrow{\rho^M} \\
 C \otimes_A C \otimes_A M & & M & & M \otimes_B D \otimes_B D \\
 I_C \otimes {}^M\rho \swarrow & & \searrow \rho^M & & \searrow I_M \otimes \Delta_D \\
 & C \otimes_A M & & M \otimes_B D & \\
 I_C \otimes \rho^M \searrow & & \swarrow {}^M\rho & & \swarrow \rho^M \otimes I_D \\
 & C \otimes_A M \otimes_B D & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes_B D & \xrightarrow{I_M \otimes \varepsilon_D} & M \otimes_B B \\
 \rho^M \uparrow & \nearrow \text{自然な同型} & \\
 M & & \\
 {}^M\rho \downarrow & \searrow \text{自然な同型} & \\
 C \otimes_A M & \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes I_M} & A \otimes_A M
 \end{array}$$

が可換であるとき, M を (C, D) 両側余加群という. ${}^M\rho$ と ρ^M をそれぞれ M の左余作用と右余作用という. M, N を (C, D) 両側余加群とする. $f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で図式

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 {}^M\rho \downarrow & & \downarrow N\rho \\
 C \otimes_A M & \xrightarrow{I_C \otimes f} & C \otimes_A N
 \end{array}$$

が可換になるものの全体を ${}^c\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で表す. 同様に, $f \in {}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で図式

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \rho^M \downarrow & & \downarrow \rho^N \\
 M \otimes_B D & \xrightarrow{f \otimes I_D} & N \otimes_B D
 \end{array}$$

が可換になるものの全体を ${}_A\mathrm{Hom}^D(M, N)$ で表す. そして,

$${}^c\mathrm{Hom}^D(M, N) = {}^c\mathrm{Hom}_B(M, N) \cap {}_A\mathrm{Hom}^D(M, N)$$

とおく. ${}^c\mathrm{Hom}^D(M, N)$ を射の集合とする (C, D) 両側余加群の圏を ${}^c\mathbf{M}^D$ で表す.

余環の理論の詳細については Brzeziński と Wisbauer の著書 [2] で知ることができる.

2. 両側余加群の一般余導分

筆者は [4] において代数上の両側加群の一般導分 (generalized derivation) の概念を導入した. それを双対化して, 余代数上の両側余加群の一般余導分 (generalized coderivation) の概念を導入する.

定義 2.1. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環, $M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$, $f \in {}_A\text{Hom}_B(M, N)$ とする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes_B D & \xrightarrow{f \otimes I_D} & N \otimes_B D \\
 \downarrow M_\rho \otimes I_D & \swarrow \rho^M & \searrow \rho^N \\
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \downarrow M_\rho & & \downarrow N_\rho \\
 C \otimes_A M & \xrightarrow{I_C \otimes f} & C \otimes_A N \\
 \downarrow I_C \otimes \rho^M & & \downarrow I_C \otimes \rho^N \\
 C \otimes_A M \otimes_B D & \xrightarrow{I_C \otimes f \otimes I_D} & C \otimes_A N \otimes_B D \\
 & \swarrow I_C \otimes \rho^M & \searrow I_C \otimes \rho^N \\
 & &
 \end{array}$$

ここで, M_ρ と ρ^M は M の左余作用と右余作用を表し, N_ρ と ρ^N は N の左余作用と右余作用を表す. この図式に現れる写像を用いて,

$$\begin{aligned}
 Q(f) = & (N_\rho \otimes I_D) \circ \rho^N \circ f - (N_\rho \otimes I_D) \circ (f \otimes I_D) \circ \rho^M \\
 & - (I_C \otimes \rho^N) \circ (I_C \otimes f) \circ M_\rho + (I_C \otimes f \otimes I_D) \circ (I_C \otimes \rho^M) \circ M_\rho
 \end{aligned}$$

とおく. つまり, 上の図式から得られる写像 $M \rightarrow C \otimes_A N \otimes_B D$ について,

$$\begin{aligned}
 Q(f) = & (f \text{ を通る写像}) - (f \otimes I_D \text{ を通る写像}) \\
 & - (I_C \otimes f \text{ を通る写像}) + (I_C \otimes f \otimes I_D \text{ を通る写像})
 \end{aligned}$$

とおいたのである.

定義 2.2. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環, $M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$, $f \in {}_A\text{Hom}_B(M, N)$ とする. $Q(f) = 0$ が成り立つとき, f を M から N への一般余導分という. M から N への一般余導分の全体が成す集合を $\text{GCoder}(M, N)$ で表す. これは ${}_A\text{Hom}_B(M, N)$ の R 部分加群である.

次の補題は容易である.

補題 2.3. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環, $L, M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$, $f \in {}_A\text{Hom}_B(M, N)$ とするとき, 次が成り立つ.

- (1) 任意の $g \in {}^C\text{Hom}^D(L, M)$ に対して, $Q(f \circ g) = Q(f) \circ g$ が成り立つ.
- (2) 任意の $h \in {}^C\text{Hom}^D(N, L)$ に対して, $Q(h \circ f) = (I_C \otimes h \otimes I_D) \circ Q(f)$ が成り立つ.

補題 2.3 により, 関手 ${}_A\text{Hom}_B$ の部分関手

$$\text{GCoder} : ({}^C\mathbf{M}^D)^{\text{op}} \times {}^C\mathbf{M}^D \rightarrow \mathbf{M}_R$$

が得られる. ここに $\mathbf{M}_R$ は R 加群の圏である.

特別な場合として $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ であるときは, 次の定理 2.4 で示すように, $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ 両側余加群 M から $\mathcal{C}$ への一般余導分は余導分 (coderivation) と密接な関係にある. $f \in {}_A\text{Hom}_A(M, \mathcal{C})$ に対して次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \otimes_A \mathcal{C} & & \\
 & \nearrow \rho^M & & \searrow f \otimes I_{\mathcal{C}} & \\
 M & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \\
 & \searrow {}^M\rho & & \nearrow I_{\mathcal{C}} \otimes f & \\
 & & \mathcal{C} \otimes_A M & &
 \end{array}$$

ここで, Δ は $\mathcal{C}$ の余積であり, ${}^M\rho$ と ρ^M はそれぞれ M の左余作用と右余作用である. 特に

$$\Delta \circ f = (f \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \rho^M + (I_{\mathcal{C}} \otimes f) \circ {}^M\rho$$

が成り立つとき, f を余導分という. M から $\mathcal{C}$ への余導分の全体を $\text{Coder}(M, \mathcal{C})$ で表す.

定理 2.4. 代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$, $M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, $f \in {}_A\text{Hom}_A(M, \mathcal{C})$ に対して, 次の条件は同値である. ここで, Δ は $\mathcal{C}$ の余積, ε は $\mathcal{C}$ の余単位写像, ${}^M\rho$ と ρ^M は M の左余作用と右余作用である.

- (1) $f \in \text{GCoder}(M, \mathcal{C})$
- (2) $f - (\varepsilon \circ f)_L \in \text{Coder}(M, \mathcal{C})$ である. ここに, $(\varepsilon \circ f)_L$ は合成写像

$$M \xrightarrow{\rho^M} M \otimes_A \mathcal{C} \xrightarrow{(\varepsilon \circ f) \otimes I_{\mathcal{C}}} A \otimes_A \mathcal{C} \xrightarrow{\nu} \mathcal{C}$$

を表す. ν は自然な同型写像である.

- (3) $\Delta \circ f - (f \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \rho^M - (I_{\mathcal{C}} \otimes f) \circ {}^M\rho \in {}^{\mathcal{C}}\text{Hom}^{\mathcal{C}}(M, \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C})$
- (4) $\Delta \circ f = (f \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \rho^M + (I_{\mathcal{C}} \otimes d) \circ {}^M\rho$ を満たす $d \in \text{Coder}(M, \mathcal{C})$ が存在する.
- (5) $\Delta \circ f' = (f \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \rho^M + (I_{\mathcal{C}} \otimes f'') \circ {}^M\rho$ を満たす $f', f'' \in {}_A\text{Hom}_A(M, \mathcal{C})$ が存在する.

Nakajima [7] は定理 2.4 の条件 (3) を満たす f を一般余導分と呼んだ. これは Nakajima [6] の一般導分の双対概念である. 一般導分には他の定義が知られている. Brešar [1] が定義した一般導分の双対概念が定理 2.4 の条件 (4) に相当し, Leger-Luks [5] が定義した一般導分の双対概念が定理 2.4 の条件 (5) に相当する.

系 2.5. 代数 A 上の余環 $\mathcal{C}$ と $M \in {}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ に対して,

$$\text{GCoder}(M, \mathcal{C}) = \text{Coder}(M, \mathcal{C}) \oplus {}_A\text{Hom}^{\mathcal{C}}(M, \mathcal{C}) = \text{Coder}(M, \mathcal{C}) \oplus {}^{\mathcal{C}}\text{Hom}_A(M, \mathcal{C})$$

が成り立つ.

3. 普遍的一般余導分

Doi [3] は余代数の普遍的一般余導分 (universal coderivation) を構成した. 本節では, 余環の普遍的一般余導分を構成する. ここで言う普遍性は定理 3.3 の意味である.

定義 3.1. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環とする. $M \in {}^C M^D$ に対して, 合成写像

$$C \otimes_A M \otimes_B D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes I_M \otimes \varepsilon_D} A \otimes_A M \otimes_B B \xrightarrow{\nu} M$$

を M_{ε^M} で表す. ここで, ε_C と ε_D はそれぞれ C と D の余単位写像であり, ν は自然な同型写像である. 写像

$$I_{C \otimes_A M \otimes_B D} - Q^{(M_{\varepsilon^M})} : C \otimes_A M \otimes_B D \rightarrow C \otimes_A M \otimes_B D$$

の像を $\mathcal{U}(M)$ とおき, 写像 M_{ε^M} を $\mathcal{U}(M)$ へ制限して得られる写像を

$$u_M : \mathcal{U}(M) \rightarrow M$$

とおく.

補題 3.2. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環, $M \in {}^C M^D$ とするとき, 次が成り立つ.

- (1) $Q^{(M_{\varepsilon^M})}$ は自己準同型環 ${}_A \text{End}_B(C \otimes_A M \otimes_B D)$ のべき等元である.
- (2) $\mathcal{U}(M)$ は $C \otimes_A M \otimes_B D$ の部分余加群である.
- (3) u_M は一般余導分である.

定理 3.3. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環, $M, N \in {}^C M^D$ とするとき,

$${}^C \text{Hom}^D(M, \mathcal{U}(N)) \ni f \mapsto u_N \circ f \in \text{GCoder}(M, N)$$

は R 同型写像である.

余環 D の逆余環 (opposite coring) D^{cop} を考える. これは B の逆代数 (opposite algebra) B^{op} の上の余環であるから, $A \otimes_R B^{\text{op}}$ 余環 $C \otimes_R D^{\text{cop}}$ が得られる. このとき, $\mathcal{U}(C \otimes_R D)$ は $(C \otimes_R D^{\text{cop}}, C \otimes_R D^{\text{cop}})$ 両側余加群と見ることができ, 任意の $M \in {}^C M^D$ は $C \otimes_R D^{\text{cop}}$ 左余加群と見ることができる. そして次が成り立つ.

定理 3.4. A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環, $M \in {}^C M^D$ とするとき, (C, D) 両側余加群として $\mathcal{U}(M) \simeq \mathcal{U}(C \otimes_R D) \square_{C \otimes_R D^{\text{cop}}} M$ が成り立つ.

4. 余分離余環

A, B を代数, C を A 余環, D を B 余環とするとき, 任意の $M, N \in {}^C M^D$ に対して,

$$\text{GCoder}(M, N) \supseteq {}^C \text{Hom}_B(M, N) + {}_A \text{Hom}^D(M, N)$$

が成り立つ. 本節では, すべての $M, N \in {}^C M^D$ に対して

$$\text{GCoder}(M, N) = {}^C \text{Hom}_B(M, N) + {}_A \text{Hom}^D(M, N)$$

が成り立つことは, C, D の余分離性と関係があることを示す.

[2] に従って, C の余積 $C \rightarrow C \otimes_A C$ が (C, C) 両側余加群写像として分裂するとき, C は余分離 A 余環であるという. これは代数の分離拡大の双対概念である.

定理 4.1. A, B を代数, C を余分離 A 余環, D を余分離 B 余環とすると, 任意の $M, N \in {}^C\mathbf{M}^D$ に対して,

$$\mathrm{GCoder}(M, N) = {}^C\mathrm{Hom}_B(M, N) + {}_A\mathrm{Hom}^D(M, N)$$

が成り立つ.

定理 4.2. 代数 A 上の余環 C に対して, 次の条件は同値である.

- (1) C は余分離 A 余環である.
- (2) 任意の $M \in {}^C\mathbf{M}^C$ に対して,

$$\mathrm{GCoder}(M, C) = {}^C\mathrm{Hom}_A(M, C) + {}_A\mathrm{Hom}^C(M, C)$$

が成り立つ.

- (3) 任意の $M, N \in {}^C\mathbf{M}^C$ に対して,

$$\mathrm{GCoder}(M, N) = {}^C\mathrm{Hom}_A(M, N) + {}_A\mathrm{Hom}^C(M, N)$$

が成り立つ.

REFERENCES

- [1] M. Brešar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, **33** (1991), 89–93.
- [2] T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [3] Y. Doi, Homological coalgebra, *J. Math. Soc. Japan*, **33** (1981), 31–50.
- [4] H. Komatsu, Generalized derivations of bimodules, *to appear in Internat. J. Pure Appl. Math.*
- [5] G. F. Leger and E. M. Luks, Generalized derivations of Lie algebras, *J. Algebra*, **228** (2000), 165–203.
- [6] A. Nakajima, On categorical properties of generalized derivations, *Scientiae Math.*, **2** (1999), 345–352.
- [7] A. Nakajima, On generalized coderivations, *to appear in Internat. Electric J. Algebra*.