

LINEAR FORMS IN
LOGARITHMS

平田 典子 (奈良女子大 理学部)

Noriko HIRATA - KOHNO

Dept. of Math., Nara Women's Univ.,
Kita-Uoya-Nishi-Machi

Nara 630

要約

代数体上定義された可換代数群の指数写像
の代数点に関する代数的数係数の一次式
の値が 0 でないとき、その絶対値と下から
評価するという問題を考える。Alain BAKER
は代数的数の logarithms の値の代数的数
係数の一次結合の値と下から評価した。この
その楕円関数への翻訳としてアベル多様
体、代数群への拡張が D.W. Masser, M. Anderson,
J. Coates, S. Lang, D. Bertrand, G. Wüstholz,
P. Philippon, M. Waldschmidt, Yu. I. Izdukhin
らによって行なわれた。ここではこの問題に

関して今更に最良であった Philippon-Waldschmidt の評価の改良について述べる。

§1 定性的な結果

G . Wüstholz は [Wü] の中で A. Baker の代数的数の logarithms に関する超越性の仕事と次のように一般化した。ここで我々は常に次の表記を用いることにする。

G を次元 m の可換代数群といたとき $T_G = T_e G$ を Lie 群 G の origin e における Lie 代数とする。もし G が $\mathbb{C}$ の部分体 K 上で定義されているならば $T_G(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_K T_G$ とする。

$\exp_G$ を G の指数写像とする。 G は projective space にうめであるが、その埋め込み

は一つ固定する。また $T_G(\mathbb{C})$ の basis により $T_G(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^m$ と同一視できるが、この identification, 即ち $T_G(\mathbb{C})$ の basis を一つ固定しておく。 G_a は additive

algebraic group, G_m は multiplicative algebraic group とある。 $\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ 内での代数的閉包とする。

Theorem (Wüstholz [Wü])

G は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された可換代数群とする。

$u \neq 0$ は $T_G(\mathbb{C})$ の点で $\exp_G(u) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$

なることをする。 V は $T_G(\mathbb{C})$ の hyperplane で

$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されたものである。 $u \in V$ とする。

ならば $0 \neq H \subsetneq G$ なる G の algebraic subgroup

で $T_H(\mathbb{C}) \subseteq V$ なるものが $\exists$ する。

Corollary (Baker, cf. [B])

$\beta_1, \dots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}},$

$\alpha_i \neq 0, \neq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$ とする。

ならば $\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$ は 0

又は超越数である。

Wüstholz の定理から Baker の定理 (上の系)

を導くには $G = G_a \times G_m^n$ とするだけでよい。(cf. [Be])

§2 定量的な結果

定量的な結果を述べるために 代数的数の高さの定義を思い出すと次のようになる。

定義 α を代数的数とする。

$P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ をその最小多項式とする。

α の (usual) height $H(\alpha)$ とは $P(X)$ の係数の絶対値の最大値のこととする (従って $H(\alpha) \in \mathbb{Z}$)。

すなわち Baker の定量的な結果は次の形にある；

Theorem (Baker, [B])

D, n を自然数とする。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}, \neq 0, \neq 1$ とする。次々みたす正定数 C_i (計算可能) が存在する。 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, not all zero, of degree $\leq D$ とする。 $H = \max_{0 \leq j \leq n} (H(\beta_j), 4)$,

$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$ とおく。

もし $\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log |\Lambda| > -C_i \log H$$

注 Bakerの定性的結果より $\beta_0 \neq 0$ ならば $\Lambda \neq 0$ であることがわかる。

一般の代数群上の Philippon - Waldschmidt の結果を次にあげる。

Notations

K degree D の代数体

G' K 上定義された 可換代数群。

connected と仮定する

さらに

$$G = G_a \times G_m^{n_1} \times G'$$

$$\dim G' = n_2 \leq L \quad \dim G = n+1 \leq \delta < \\ (\text{従って } n = n_1 + n_2)$$

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_d) \in T_G(\mathbb{C})$$

such that $\exp_G(u) \in G(K)$.

Theorem (Philippon - Waldschmidt [P-W])

上の G , u を与える。次とみたとき 正定数 C_2 (計算可能) が存在する。 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$

not all zero とする。 $H = \max_{0 \leq j \leq n} (e, H(\beta_j))$,

$$\Lambda = \beta_0 u_0 + \dots + \beta_n u_n \text{ とおく。 且 } \Lambda \neq 0 \text{ ならば}$$

$$\log |\Lambda| > -c_2 (\log H)^{n_2+1}$$

この様な Wüstholz の定理の定量化は ^(以前特別な場合ではあるが) D. Bertrand

によって得られていて その評価は

$$\log |\Lambda| > -c_3 (\log H)^{(n+2)!} \quad \text{ここで } c_3 =$$

Philippon と Waldschmidt は $-c_2 (\log H)^{n_2+1}$

に改良したところがある。ここで我々の改良をのべる。

$n_2 = 0$ の時には我々は Philippon - Waldschmidt

を改良しないので ($n_2 = 0$ の場合は $\log H$ に

関して Baker の評価がすでに best possible

である) $n_2 \geq 1$ とある。

Theorem

上の G, u を与える。次に与える正整数

c_4 (計算可能) が存在する。 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$

not all zero とする。 $H = \max_{0 \leq j \leq n} (e^e, H(\beta_j))$,

$\Lambda = \beta_0 u_0 + \dots + \beta_n u_n$ とおく。もし

$\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log |\Lambda| > -c_4 (\log H) (\log \log H)^{n_2+1}$$

従って我々の定理は $\beta_0, \dots, \beta_n$ に関する高さの部分
 について $[P-W]$ の $|A|$ の評価を改良したことになる。
 さらに詳しく定数の C_4 について述べよう。これもほんの
 少しだけ $[P-W]$ の定数部分を改良している。実際には
 G の定義体が代数体のときその次数を d とする
 と、 n と d と " G の高さ" (この定義については $[D]$
 を参照) により計算可能な正定数 C_5 が
 存在して C_4 は C_5 と $D = [\mathbb{Q}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) : \mathbb{Q}]$
 と $\exp_G(u) \in G(K)$ の高さ, u の絶対値,
 $\exp_G$ の order (増大度) の関数として explicit
 に書ける。

ここでわかりやすい系として次のようになる。

Corollary

K を degree D の代数体とする。 Φ を Weierstrass
 の楕円関数の invariants g_2, g_3 は K に
 属するとする。 $u_1, \dots, u_n$ をそれぞれ Φ の
 代数点, すなわち Φ の pole か 又は $\Phi(u_i) \in K$
 ($1 \leq i \leq n$) となるような点とする。次をみたす正定
 数 C_6 (計算可能) が存在する。 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$
 $\in K$ not all zero とする。 $H = \max_{0 \leq j \leq n} (e^e \cdot H(\beta_j))$
 $\Lambda = \beta_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ とおくと。

もし $\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log |\Lambda| > -c_6 (\log H) (\log \log H)^{n+1}.$$

この場合 Philippon - Waldschmidt の定理から導かれる評価は

$$\log |\Lambda| > -c_6' (\log H)^{n+1} \text{ であ, } T =$$

または Yu. Kunrui, M. Anderson,

J. Coates, S. Lang らの評価は、いずれも

$\mathbb{Q}$ の complex multiplication を含む場合

で、しかも上の系より悪い評価であ, $T =$

(これらの歴史的流れについては [Y] および

[A] に詳しく書かれている)。

特に $u_1, \dots, u_n$ が $\mathbb{Q}$ の 0 でない同型である場合は (cf [H1])

$$\log |\Lambda| > -c_7 (\log H) (\log \log H)^2$$

となり N. I. Feldman (cf [R]) の

$$\log |\Lambda| > -c_8 (\log H)^3 \text{ の改良にあたる。}$$

証明方法は transcendence method, Baker method と呼ばれる今までの方法と同じで、[P-W] を改良するアイデアについては [H2] に述べられている。または

アイテアは 補助関数 $F(z) = P(\exp G)$ と

考えるとき ($P \in K[X_0, \dots, X_n]$ とする)

$P(\exp G) = (z_0 \text{ の多項式}) \times (z_1, \dots, z_n \text{ の関数})$

for $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ であることより

z_0 による $F(z)$ の偏微分が何回もくり返される

と 0 になるという現象を用いることができる。

このアイテアは古典的な場合には $E. Reyssat$,

Masser, Feldman (cf. [R] および [M]) により考えら

れているものである。このように主なアイテアはきわめて

簡単であるが、それを一般の代数群上にも拡張する

ためにはいくつか微妙な点がある。

References

[A] Anderson, M. - Inhomogeneous linear forms in algebraic points of an elliptic function, in Transcendence Theory: Advances and Applications (eds. A. Baker and D.W. Masser) Academic Press, (1977) p 121 - 143.

[B] Baker, A. - The theory of linear forms in logarithms, in Transcendence Theory: Advances and Applications (eds. A. Baker and D.W. Masser) Academic Press (1977) p 1 - 28.

- [Be] Bertrand, D. - Lemmes de zéros et nombres transcendant, Séminaire Bourbaki, 38^e année, 1985-86, Astérisque, vol 145-146 (1987) p21-44.
- [D] David, S. - Théorie de Baker pour des familles de groupes algébriques commutatifs, Chap 2, Thèse de doctorat, Univ de Paris VI (1989)
- [H1] Hinata-Kohno, N. - Mesures de transcendance pour les quotients de périodes d'intégrales elliptiques, to appear in Acta Arithmetica 56, No. 2.
- [H2] Hinata-Kohno, N. - Diophantine approximations for periods of elliptic functions, preprint
- [M] Masser, D.W. - Elliptic functions and transcendence, Lec. Notes in Math., 437, Springer-Verlag (1975)
- [P-W] Philippon, P. and Waldschmidt, M. - Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques, Illinois J. Math., 32, No. 2 (1988) p 281-314

[R] Reyssat, E. - Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle, Bull. Soc. Math. France, 108 (1980) p 47-79.

[Wü] Wüstholz, G. - Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, Annals of Math., 129 (1989)

p. 501-517.

[Y] Yu Kunnri - Linear forms in elliptic logarithms, J. Number Theory 20 (1985)

p 1-69.