

A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals

Masao ISHIKAWA* and Jiang ZENG†

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 05A30
Secondary 05A15, 15A15, 33D45.

Keywords : Hankel determinants, Pfaffian decomposition, Pfaffian of Catalan numbers, moments of orthogonal polynomials.

概要

ここでは, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants”, [arxiv:1011.5941](https://arxiv.org/abs/1011.5941) の中で証明した q -Catalan Hankel Pfaffian を de Bruijn の公式と Askey の q -Selberg 積分公式を使った別証明を与える. また, 同じ手法を用いることにより, 上記論文の中で述べた予想の一部に証明も与える.

1 Introduction

この記事では, [15] の中で証明した q -Catalan Hankel Pfaffian を de Bruijn の公式と Askey の q -Selberg 積分公式を使った別証明を与える. また, 同じ手法を用いることにより, 上記論文の中で述べた予想の一部に証明も与える.

*Department of Mathematics, University of the Ryukyus, Nishihara, Okinawa 901-0213, Japan, ishikawa@edu.u-ryukyu.ac.jp

†Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 69622 Villeurbanne cedex, France, zeng@math.univ-lyon1.fr

Selberg の積分公式とは

$$\begin{aligned} S_n(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + j\gamma) \Gamma(\beta + j\gamma) \Gamma(1 + (j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-1)\gamma) \Gamma(1 + \gamma)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

と呼ばれるものである。また、1987 年に青本和彦により発見されていた Selberg 型積分

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^k t_i \right) \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt \\ &= S_n(\alpha, \beta, \gamma) \prod_{j=1}^k \frac{\alpha + (n-j)\gamma}{\alpha + \beta + (2n-j-1)\gamma}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

も有名である。この記事の中では述べないが、この記事の手法と、青本和彦に Selberg 型積分を組み合わせる新しい Hankel 型 Pfaffian の公式を得ることもできる。

この記事では、 q -series に関する以下の標準的な記法を使う (see [7, 9]): 任意の整数 n に対して

$$(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (a; q)_n = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty}.$$

ここで $(a; q)_n$ は q -shifted factorial といわれる。また、以下の省略記法も用いる:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_r; q)_\infty &= (a_1; q)_\infty (a_2; q)_\infty \cdots (a_r; q)_\infty, \\ (a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n &= (a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_r; q)_n. \end{aligned}$$

q -超幾何級数 ${}_{r+1}\phi_r$ は

$${}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b_1, \dots, b_r \end{matrix}; q, z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; q)_n}{(q, b_1, \dots, b_r; q)_n} z^n.$$

によって定義される。

2 Pfaffian の和公式

行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \geq 1}$ (または $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$) が **歪対称** であるとは, $a_{j,i} = -a_{i,j}$ がすべての $i, j \geq 1$ (または $1 \leq i, j \leq n$) に対して成り立つことである. n を偶数として, $n \times n$ 歪対称行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ が与えられたとき, A の **パフィアン** ([29, 30])

$$\text{Pf}(A) = \sum \epsilon(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n) a_{\sigma_1, \sigma_2} \cdots a_{\sigma_{n-1}, \sigma_n}, \quad (2.1)$$

によって, 定義される. ここで左辺の和は, $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ の 2-元集合への分割 $\sigma = \{\{\sigma_1, \sigma_2\}, \dots, \{\sigma_{n-1}, \sigma_n\}\}$ を動き, $\epsilon(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$ は置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

の符号を表す. $[n]$ の 2-元集合への分割 σ を **perfect matching** または **1-factor** という.

$D = (V, E)$ を cycle を持たない digraph とする. (u, v) が頂点の組のとき, $\mathcal{P}(u, v)$ を u から v に向かう道全体の集合とする. n を正の整数とすると, n -**頂点** とは D の n 個の頂点の組とする. また $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ と $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ が n -頂点であるとき, $\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ への n -**道** とは n 個の道の組 $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ であって, $i = 1, \dots, n$ に対して $P_i \in \mathcal{P}(u_i, v_i)$ となることである. n -道 $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ が **交わらない** とは, 任意の異なる $i \neq j$ に対して P_i と P_j が共通の頂点を持たないことである. $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ によって $\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ への n -道全体の集合を表す, また $\mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ によって, $\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ への交わらない n -道全体がなす $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ の部分集合を表す, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ と $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ を D の n -頂点の集合とすると, $\mathbf{u}$ が $\mathbf{v}$ と D -**整合** であるとは, $i < j$ かつ $k < l$ であるならば, u_i から v_l への道 $P \in \mathcal{P}(u_i, v_l)$ と u_j から v_k への道 $Q \in \mathcal{P}(u_j, v_k)$ が必ず交わることである. 置換 $\pi \in S_n$ に対して, $\mathbf{v}^\pi$ が n -頂点 $(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$ を意味するとする. n -道 $\mathbf{P}$ の重み $w(\mathbf{P})$ は, 各道の重みの積として定義され, 各道の重みは, それをなす各辺の重みの積として定義される. ここでグラフの各辺には重みが与えられているとする. したがって $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ と $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ が n -頂点のとき, n -道の母関数 $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{GF}[\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} w(\mathbf{P})$ と, 交わらない n -道の母関数 $F_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{GF}[\mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} w(\mathbf{P})$ を定義する

ことができる. 特に (u, v) が任意の頂点の組のとき,

$$h(u, v) = \text{GF}[\mathcal{P}(u, v)] = \sum_{P \in \mathcal{P}(u, v)} w(P)$$

と書くことにする. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. $2n$ -頂点 $v = (v_1, v_2, \dots, v_{2n})$ が与えられたとき, これらの $2n$ 個の頂点 $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ を結ぶ交わらない n -道 $P_1, \dots, P_n$ 全体の集合を $\mathcal{N}(v) = \mathcal{N}(v_1, v_2, \dots, v_{2n})$ によって表す. このとき

$$\sum_{\pi \in S_{2n}} \text{GF}[\mathcal{N}(v^\pi)] = \text{Pf}(h(v_i, v_j))_{1 \leq i < j \leq 2n} \quad (2.3)$$

が成立する.

ここでは, この証明は行わないが, この定理から次のパフィアンの和公式が証明できる. このパフィアンの和公式は, のちに de Bruijn の定理を証明するのに使う.

定理 2.2. ([16, 17]) n と N を $n \leq N$ である正整数とし, n を偶数とする. $H = (h_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N}$ を任意の $n \times N$ 行列とし, $A = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ を N 次の歪対称行列とする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{I \subseteq [N] \\ \#I = n}} \text{Pf}(A_I) \det(H_I^{[n]}) = \text{Pf}(Q), \quad (2.4)$$

ここで, 歪対称行列 Q は $Q = (Q_{i,j}) = HAH^T$ によって定義され, その (i, j) 成分は

$$Q_{i,j} = \sum_{1 \leq k < l \leq N} \alpha_{k,l} \det(H_{k,l}^{i,j}), \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (2.5)$$

によって与えられる.

次の命題は, 実際にパフィアンを計算するときに便利なので, ここに引用しておく [16, 17].

命題 2.3. $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ を任意の数列とし n を正整数とする. $B = (b_{i,j})_{i,j \geq 1}$ を次によって成分が定義される歪対称行列とする.

$$b_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } j = i + 1 \text{ for } i \geq 1, \\ -\alpha_j & \text{if } i = j + 1 \text{ for } j \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.6)$$

$I = (i_1, \dots, i_{2n})$ を $1 \leq i_1 < \dots < i_{2n}$ を満たす添字集合とすると,

$$\text{Pf}(B_I) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n \alpha_{i_{2k-1}} & \text{if } i_{2k} = i_{2k-1} + 1 \text{ for } k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.7)$$

が成り立つ.

3 De Bruijn の公式と Hankel Pfaffians

0 から a までの q -Jackson 積分は

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n.$$

に、よって定義され、この和は $|q| < 1$ のとき絶対収束する. μ を閉区間 $[0, a]$ 上の任意の測度とする、すなわち、ある weight function w に対して $d_q \mu(x) = w(x) d_q x$ と書ける. 次の命題が de Bruijn の公式と呼ばれる:

命題 3.1. n を正の整数とし、 $1 \leq i \leq 2n$ に対して $\phi_i(x)$ と $\psi_i(x)$ を閉区間 $[0, a]$ 上の連続関数とする. このとき

$$\int \dots \int_{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq a} \det(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j)) d_q \mu(x_1) \dots d_q \mu(x_n) = \text{Pf}(Q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n}, \quad (3.1)$$

が成り立つ. ここで

$$Q_{i,j} = \int_0^a \{\phi_i(x) \psi_j(x) - \phi_j(x) \psi_i(x)\} d_q \mu(x) \quad (3.2)$$

であり、 $(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j))$ は第 i 行 ($1 \leq i \leq 2n$) が

$$(\phi_i(x_1), \psi_i(x_1), \dots, \phi_i(x_n), \psi_i(x_n))$$

で与えられる $2n \times 2n$ 行列である.

証明. n と N を $n \leq N$ を満たす正整数とし、 $H = (h_{i,j})_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2N}$ を任意の $2n \times 2N$ 行列とする. $2N \times 2N$ 歪対称行列 $A = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 2N}$ を

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ is odd and } j = i + 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

によって定義する. このとき, 直接計算によって $Q = (Q_{i,j}) = HAH^T$ の各成分は

$$Q_{i,j} = \sum_{1 \leq k < l \leq 2N} \alpha_{k,l} \begin{vmatrix} h_{i,k} & h_{i,l} \\ h_{j,k} & h_{j,l} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{vmatrix} h_{i,2k-1} & h_{i,2k} \\ h_{j,2k-1} & h_{j,2k} \end{vmatrix},$$

となることがわかる. また $[2N]$ の任意の n -元部分集合 I に対して, 命題 2.3 から, 明らかに

$$\text{Pf}(A_I) = \begin{cases} 1 & \text{if } I = \{2k_1 - 1, 2k_1, \dots, 2k_n - 1, 2k_n\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる. 定理 2.2 を適用した後に $N \rightarrow \infty$ とすると,

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n} \det H_{2k_1-1, 2k_1, \dots, 2k_n-1, 2k_n} = \text{Pf}(Q_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 2n} \quad (3.3)$$

が得られる. ここで

$$Q_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{vmatrix} h_{i,2k-1} & h_{i,2k} \\ h_{j,2k-1} & h_{j,2k} \end{vmatrix}$$

である. (3.3) 式において $h_{i,2k-1} = (1-q)a\phi_i(aq^{k-1})w(aq^{k-1})q^{k-1}$ かつ $h_{i,2k} = \psi_i(aq^{k-1})$ とおくと

$$\begin{aligned} & (1-q)^n a^n \sum_{0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n} \det(\phi_i(q^{k_j}) | \psi_i(q^{k_j})) \prod_{\nu=1}^n w(q^{k_\nu}) q^{k_\nu} \\ & = \text{Pf}(Q'_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 2n}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

が得られる. ここで

$$Q'_{i,j} = (1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} \begin{vmatrix} \phi_i(aq^k) & \psi_i(aq^k) \\ \phi_j(aq^k) & \psi_j(aq^k) \end{vmatrix} w(aq^k) q^k \quad (3.5)$$

これで望む式が証明された. $\square$

系 3.2. $d_q \mu(x) = w(x) d_q x$ を区間 $[0, a]$ 上の測度とし, $\mu_i = \int_0^a x^i d_q \mu(x)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\begin{aligned} & \text{Pf}\left((q^{i-1} - q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}\right)_{1 \leq i < j \leq 2n} \\ & = \frac{1}{n!} q^{\binom{n}{2}} (1-q)^n \int_0^a \dots \int_0^a \prod_i x_i^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \prod_{i < j} (qx_i - x_j)(x_i - qx_j) \\ & \quad d_q \mu(x_1) \dots d_q \mu(x_n). \end{aligned} \quad (3.6)$$

が成り立つ.

証明. (3.2) 式において $\varphi_i(x) = q^{i-1}x^{i-1}$ かつ $\psi_i(x) = x^{i+r-1}$ とおくと,

$$Q_{i,j} = (q^{i-1} - q^{j-1}) \int_0^1 x^{i+j+r-2} d_q \mu = (q^{i-1} - q^{j-1}) \mu_{i+j+r-2}.$$

を得る. 一方, (3.1) 式に同様の代入を行うと

$$\begin{aligned} \det(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j))_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n} &= \det(q^{i-1}x_j^{i-1} | x_j^{i-1})_{1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n} \\ &= q^{\binom{n}{2}} (1-q)^n (x_1 \dots x_n)^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \prod_{i < j} (qx_i - x_j)(x_i - qx_j) \end{aligned}$$

を得る. ここで, 最後の等号を示すにはヴァンデルモンド行列式 $\det(a_j^{i-1}) = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$ を使う. したがって

$$\begin{aligned} &\text{Pf}\left((q^{i-1} - q^{j-1}) \mu_{i+j+r-2}\right)_{1 \leq i < j \leq 2n} \\ &= q^{\binom{n}{2}} (1-q)^n \int \dots \int_{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq a} \prod_i x_i^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \\ &\quad \times \prod_{i < j} (qx_i - x_j)(x_i - qx_j) d_q \mu(x_1) \dots d_q \mu(x_n). \end{aligned}$$

が証明された. 示したい式は, この式の簡単な帰結である. $\square$

系 3.3. $d\psi(x) = \psi'(x)dx$ を閉区間 $[a, b]$ 上の測度とする, また $\mu_i = \int_a^b x^i d\psi(x)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\begin{aligned} &\text{Pf}\left((j-i) \mu_{i+j+r-2}\right)_{1 \leq i < j \leq 2n} \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b \prod_i x_i^{r+1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 d\psi(x_1) \dots d\psi(x_n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

が成り立つ.

4 Selberg-Askey 積分公式

4.1 Little q -Jacobi 多項式

Little q -Jacobi 多項式 [9, 22] は

$$p_n(x; a, b; q) = \frac{(aq; q)_n}{(abq^{n+1}; q)_n} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq \end{matrix}; q, xq \right] \quad (4.1)$$

によって定義され,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g(x) d_q\mu(x) &= \frac{(aq; q)_\infty}{(abq^2; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bq; q)_k}{(q; q)_k} (aq)^k f(q^k) g(q^k) \\ &= \frac{(aq; q)_\infty (bq; q)_\infty}{(abq^2; q)_\infty (q; q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{k+1}; q)_\infty}{(bq^{k+1}; q)_\infty} (q^{\alpha+1})^k f(q^k) g(q^k), \quad (4.2) \end{aligned}$$

によって定義される内積に関して, 直行多項式である. ここで $a = q^\alpha$ とする. よって測度は,

$$w(x) = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{(aq, bq; q)_\infty}{(abq^2, q; q)_\infty} \cdot \frac{(qx; q)_\infty}{(bqx; q)_\infty} x^{\alpha+1},$$

によって定義される重み関数によって与えられる. q -二項定理により, little q -Jacobi 多項式の第 n モーメントは

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d_q\mu(x) = \frac{(aq; q)_n}{(abq^2; q)_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

となる. q -ガンマ関数は

$$\Gamma_q(a) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^a; q)_\infty} (1-q)^{1-a}$$

によって定義される $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ 上の関数である.

$$A_n(x, y; q) = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma_q(x + (j-1)k) \Gamma_q(y + (j-1)k) \Gamma_q(jk+1)}{\Gamma_q(x+y+(n+j-2)k) \Gamma_q(k+1)} \quad (4.4)$$

とおくとき, Askey [2] は, 次のような Selberg 積分公式の q -アナログを予想し [2, Conjecture 1], Habsieger [12] と Kadell [19, Theorem 2; $l = m = 0$] によって, 独立に証明された,

現在では, この式は Askey-Habsieger-Kadell の公式として知られる.

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} \prod_{i < j} t_i^{2k} (q^{1-k} t_j / t_i; q)_{2k} \prod_{i=1}^n t_i^{x-1} \frac{(t_i q; q)_\infty}{(t_i q^y; q)_\infty} d_q t \\ = q^{kx \binom{n}{2} + 2k^2 \binom{n}{3}} A_n(x, y; q). \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで

$$\int_{[0,1]^n} f(t) d_q t = (1-q)^n \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} f(q^{m_1}, \dots, q^{m_n}) q^{m_1 + \dots + m_n}$$

である. ここでは, 詳しく述べないが, この公式を使って, 次の [15, Theorem 3.1] の中の主定理の別証明が得られる. 詳しい証明は [18] で述べる.

定理 4.1. 正整数 n と整数 $r \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \\ &= a^{n(n-1)} q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r} \prod_{k=1}^{n-1} (bq; q)_{2k} \prod_{k=1}^n \frac{(q; q)_{2k-1} (aq; q)_{2k+r-1}}{(abq^2; q)_{2(k+n)+r-3}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

が成り立つ.

4.2 Motzkin, Delannoy, Schröder & Narayana

$M_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} C_k$ を **Motzkin 数**, $D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ を **central Delannoy 数**, $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k} C_k$ the **Schröder 数** という. また $N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ は **Narayana 数**といわれ,

$$N_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} a^k$$

は, 第 n **Narayana 多項式**と呼ばれ, 一般化された第 1 種チェビシエフ多項式のモーメント列である. ここでは $N_0(a) = 1$ と定義しておく. 各数の母関数は次のようになる.

$$g_M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}, \quad (4.7)$$

$$g_D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 6z + z^2}}, \quad (4.8)$$

$$g_S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 6z + z^2}}{2z}, \quad (4.9)$$

また, Narayana 多項式の母関数もまた次のようになることが知られている [29, p. 238]

$$g_N(z) = \sum_{n \geq 0} N_n(a) x^n = \frac{1 + (1-a)x - \sqrt{(1 - (1+a)x)^2 - 4ax^2}}{2x}. \quad (4.10)$$

ここで $N_0(a) = 1$ とする. [14] において, 我々は, これらの数列のハンケル行列式や, その q -類似を計算した:

$$\begin{aligned}\det (M_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} &= 1 \\ \det (D_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} &= 2^{\binom{n+1}{2}-1} \\ \det (S_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} &= 2^{\binom{n}{2}} \\ \det (N_{i+j-2}(a))_{1 \leq i, j \leq n} &= a^{\binom{n}{2}}\end{aligned}$$

ここでは [15] の中で予想した次の等式の証明を与える. ただし, この予想の最初の証明は [13] によって与えられ, ここで与えるのは 2 番目の証明になる.

定理 4.2. 正整数 $n \geq 1$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\text{Pf} \left((j-i)M_{i+j-3} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1), \quad (4.11)$$

$$\text{Pf} \left((j-i)D_{i+j-3} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = 2^{n^2-1} (2n-1) \prod_{k=1}^{n-1} (4k-1), \quad (4.12)$$

$$\text{Pf} \left((j-i)S_{i+j-2} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = 2^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1), \quad (4.13)$$

$$\text{Pf} \left((j-i)N_{i+j-2}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = a^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (4k+1). \quad (4.14)$$

$\det (\mu_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ ($n \geq 1$) であるという事実から $\mathbb{R}$ 上の測度でモーメント列が $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ になるものが存在することが保障される (see [8, Theorem 3.1]). ψ を $\mathbb{R}$ 上の測度で, モーメント列が $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ であるものとする, すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x) = \mu_n$ である. ここで実際に扱うのは ψ は正值で, あるコンパクトサポート $[a, b]$ をもつものだけである. しかし, 積分区間は $(-\infty, \infty)$ と書いておく. このとき Stieltjes の分布関数 ψ の変換公式は

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z-x} = \frac{1}{z} g\left(\frac{1}{z}\right)$$

と書かれる. ここで $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$ である. よって, 分布関数 ψ は $G(z)$ から次の Stieltjes の逆転公式によって得ることができる:

$$\psi(t) - \psi(t_0) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{t_0}^t \Im G(x+iy) dx,$$

ここで $\Im z$ は z の虚数部分を表す. よって

$$\psi'(t) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{G(t - iy) - G(t + iy)}{2\pi i} \quad (4.15)$$

これらの道具を使って上の定理を証明する. (4.15) によって, 計算を行うことによって, モーメント列 $\{M_n\}$, $\{D_n\}$, $\{S_n\}$ に対応する分布関数は, それぞれ次のようになる:

$$\begin{aligned} \psi'_M(x) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{(x+1)(3-x)}, \\ \psi'_D(x) &= \frac{1}{\pi \sqrt{6x-1-x^2}}, \\ \psi'_S(x) &= \frac{1}{2\pi x} \sqrt{6x-1-x^2}, \\ \psi'_N(x) &= \frac{1}{2\pi a} \sqrt{4a - (x-1-a)^2}, \end{aligned}$$

ゆえに, (3.7) によって, 次の等式を得る:

$$\text{Pf} \left((j-i)M_{i+j-3} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[-1, 3]^n} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 \prod_i \sqrt{(x_i + 1)(3 - x_i)} d\mathbf{x},$$

$$\text{Pf} \left((j-i)D_{i+j-3} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{\pi^n n!} \int_{[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]^n} \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j)^4}{\prod_i \sqrt{6x_i - x_i^2 - 1}} d\mathbf{x}.$$

$$\text{Pf} \left((j-i)S_{i+j-2} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]^n} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 \prod_i \sqrt{6x_i - x_i^2 - 1} d\mathbf{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left((j-i)N_{i+j-2}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} &= \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[(1-\sqrt{a})^2, (1+\sqrt{a})^2]^n} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 \\ &\times \prod_i \sqrt{4a - (x_i - 1 - a)^2} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Selberg の積分公式から, 次の公式を得る:

$$\int_{[a,b]^n} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 \prod_{i=1}^n \sqrt{(x_i - a)(b - x_i)} d\mathbf{x} = (b - a)^{2n^2} S_n \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right),$$

$$\int_{[a,b]^n} \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j)^4}{\prod_{i=1}^n \sqrt{(x_i - a)(b - x_i)}} d\mathbf{x} = (b - a)^{2n(n-1)} S_n \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right).$$

よって, 次の補題を証明すれば, 定理の証明が終わる.

補題 4.3. 次の等式が成り立つ:

$$\frac{(4\sqrt{a})^{2n^2}}{(2\pi)^{nn!}} S_n \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right) = a^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (4k + 1). \quad (4.20)$$

$$\frac{(4\sqrt{2})^{2n(n-1)}}{\pi^{nn!}} S_n \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) = 2^{n^2-1} (2n - 1) \prod_{k=0}^{n-1} (4k - 1). \quad (4.21)$$

Proof. Selberg の積分公式によって

$$S_n \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 2j)^2 \Gamma(3 + 2j)}{\Gamma(1 + 2n + 2j) \Gamma(3)}. \quad (4.22)$$

を得る. (4.20) の左辺を L_n とおく. 明らかに $L_1 = a$ であり, $n = 1$ のとき, (4.20) 式は成り立つ. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ と $\Gamma(x + n) = (x)_n \Gamma(x)$ を使うと,

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1} \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right)}{S_n \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right)} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 2n)^2 \Gamma(3 + 2n)}{\Gamma(3 + 4n) \Gamma(3)} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1 + 2n + 2j)}{\Gamma(3 + 2n + 2j)} \\ &= \pi \frac{n+1}{2^{6n+2}} \frac{(1/2)_n (1/2 + 2n)}{(n+1)_n} \\ &= 2^{-(8n+3)} (n+1) (4n+1) \pi \end{aligned}$$

を得る. よって $L_{n+1}/L_n = a^{2n+1} (4n+1)$ となり, 与式が証明できる.

同様にして

$$S_n \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 2j)^2 \Gamma(3 + 2j)}{\Gamma(-1 + 2n + 2j) \Gamma(3)} \quad (4.23)$$

が成り立つ. (4.21) 式の左辺を L'_n とおく. このとき $L'_1 = 1$ である. 一方,

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)}{S_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)} &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 2n)^2 \Gamma(3 + 2n)}{\Gamma(1 + 4n) \Gamma(3)} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(-1 + 2n + 2j)}{\Gamma(1 + 2n + 2j)} \\ &= \pi \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^{6n+2}} \frac{(1/2)_{n-1}}{(n)_n} (4n-1) \end{aligned}$$

であるので, $L'_{n+1}/L'_n = 2^{4n-1}(4n-1)(2n+1)\frac{(1/2)_{n-1}}{(n)_n}$ が成り立つ. 最後に

$$2^{4n-1}(4n-1)(2n+1)\frac{(1/2)_{n-1}}{(n)_n} = 2^{2n+1}(4n-1)\frac{2n+1}{2n-1}$$

を示せばよい. すなわち $(n)_n = 2^{2n-2}(2n-1)(1/2)_{n-1}$, であるが, これは $(n-1)!(n)_n = (2)_{2n-2} = (1)_{n-1}(3/2)_{n-1}2^{2n-2} = 2^{2n-2}(n-1)!(2n-1)(1/2)_{n-1}$ を使って証明できる. $\square$

参考文献

- [1] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its applications 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] R. Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM J. Math. Anal., t. 11, 1980, p. 203–951.
- [3] N. G. de Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, J. Indian Math. Soc., **19** (1955), 133–151.
- [4] M. Adler and P. Van Moerbeke, “Toda Versus Pfaff Lattice and Related Polynomials”, *Duke Math. J.*, **112** (2002), 1–58.
- [5] M. Aigner, *A Course in Enumeration*, Springer-Verlag, (2007).
- [6] W. Al-Salam and L. Carlitz, “Some orthogonal q-polynomials”, *Math. Nachr.*, **30** (1965), 47–61.
- [7] G. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, (1999).

- [8] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [9] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).
- [10] I. Gessel and G. Viennot, “Binomial determinants, paths, and hook length formulae”, *Adv. Math.* **58** (1985), 300–321.
- [11] R. Gosper, “Decision procedure for indefinite hypergeometric summation”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **75** (1978), 40–42.
- [12] L. Habsieger, Une q -intégrale de Selberg et Askey, *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988), no. 6, 14751489
- [13] M. Ishikawa and C. Koutschan, “Zeilberger’s Holonomic Ansatz for Pfaffians”, [arxiv:1011.5941](#).
- [14] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “A q -analogue of Catalan Hankel determinants”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19–42.
- [15] M. Ishikawa. H. Tagawa and J. Zeng, “Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants”, [arxiv:1011.5941](#).
- [16] M. Ishikawa and M. Wakayama, “Minor summation formula of Pfaffians”, *Linear and Multilinear Alg.* **39** (1995), 285–305
- [17] M. Ishikawa and M. Wakayama, “Applications of minor summation formula, III: Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities”, *J. Combin. Theory Ser. A.*, **113** (2006), 113–155.
- [18] M. Ishikawa and J. Zeng, “ q -Selberg integrals and q -Catalan Hankel Pfaffians”, in preparation.
- [19] K. W. J. Kadell, A proof of Askeys conjectured q -analogue of Selberg’s integral and a conjecture of Morris, *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988), 969–986.
- [20] D. Knuth, “Overlapping Pfaffians”, *Electron. J. Combin.*, **3** (1996), R5.

- [21] C. Krattenthaler, “Evaluations of Some Determinants of Matrices Related to the Pascal Triangle”, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **B47g** (2002), 19 pp.
- [22] R. Koekoek, P. Lesky and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer-Verlag, (2000).
- [23] B. Lindström, “On the vector representations of induced matroids”, *Bull. London Math. Soc.* **5** (1973), 85–90.
- [24] J. Luque and J. Thibon, “Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 5267–5292.
- [25] M. Mehta and R. Wang, “Calculation of a Certain Determinant”, *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227–232.
- [26] M. Noumi, *Painlevé equations through symmetry*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 223, American Mathematical Society, (2004).
- [27] M. Petkovšek, H. Wilf and D. Zeilberger, $A = B$, A K Peters, (1996).
- [28] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume I*, Cambridge University Press, second edition, 2011.
- [29] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume II*, Cambridge University Press, 1997, 1999.
- [30] J. Stembridge, “Nonintersecting Paths, Pfaffians, and Plane Partitions”, *Adv. Math.* **83** (1990), 96–131.