

鉛管ホモロジー球面のホモロジカルブロック

村上友哉

Yuya Murakami, Mathematical Institute, Tohoku University

1 序論

本稿は 2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」にて筆者が行った講演「偽テータ関数の漸近展開と鉛管ホモロジー球面の量子不変量」の報告記事であり, 筆者の論文 [Mur22] の和文解説である. 本稿では研究の動機や証明の方針などの解説を中心とし, 証明の細部については [Mur22] に譲ることとする.

[Mur22] の主結果は

$$(3 \text{ 次元多様体の量子不変量}) = \lim_{\tau \rightarrow 1/k} \left(\overset{\text{フォールス}}{\text{偽}} \text{ テータ関数} \right)$$

というタイプの公式を広いクラスの多様体に対して示したもので, その証明の肝は新しく開発した漸近展開の手法である. つまりトポロジーの課題を解析的整数論の手法を用いて解決したものとなっている.

上の公式は左辺と右辺にそれぞれ 3 次元トポロジーと数論の対象が現れている点で大変興味深く, また 3 次元トポロジーにおける重要な予想である **Witten の漸近展開予想** を解決するためのステップの一つでもある. 更に上の公式は量子不変量が**量子モジュラー形式**という近年注目されている新しい対象の具体例になっていることも表しており数論的にも重要である.

本稿の構成を述べる. まず 3 次元トポロジーに属する内容として 2 節, 3 節でそれぞれ量子不変量と鉛管多様体について説明し, 本研究の動機と先行研究を述べ, 4 節で主結果と証明の方針を述べる. 最後に 5 節では漸近展開に関する新手法を紹介する.

本稿で解説する論文 [Mur22] は 2022 年の RIMS 共同研究「保型形式, 保型 L 関数とその周辺」の報告記事 [村 22] で解説した論文 [MM21] の続編的な内容である. そのため本稿の 2 節と 3 節は [村 22, 3 節, 4 節] と重複があるが, 読者の便宜のために重複を厭わず, しかしながら比較的簡略に記述した. また 5 節では筆者が [Mur22] を執筆した後に判明した別証明などの新事項を中心に紹介した.

2 量子不変量

量子不変量とは**量子群**を用いて定義される不変量のことである. 代表的な例としては結び目の Jones 多項式が挙げられる. 本稿で考察するのは **Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量**という 3 次元実多様体の量子不変量である. これは 3 次元多様体 M に対し $\text{WRT}_k(M) \in \mathbb{C}$ (ただし

$k \in \mathbb{Z}_{>0}$) と書かれる複素数列である。これに関する重要な予想として次がある。

予想 2.1 (Witten の漸近展開予想). WRT 不変量の $k \rightarrow \infty$ に関する漸近展開の主要項には Chern–Simons 不変量や Reidemeister torsion などの重要な不変量が現れるであろう。

この予想を証明する方針として, Lawrence–Zagier [LZ99] による次のものがある：

Step 1 3次元多様体 M に付随する ^{フォルス}偽 テータ関数 $f_M(\tau)$ を構成する。

Step 2 等式 $\text{WRT}_k(M) = \lim_{\tau \rightarrow 1/k} f_M(\tau)$ を証明する。

Step 3 $f_M(\tau)$ のモジュラー変換則

$$f_M\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{r/2} f_M(\tau) + (\text{ある解析的関数})$$

を証明する。この式において $\tau \rightarrow -k$ とすることで漸近展開

$$\text{WRT}_k(M) \sim (-k)^{r/2} \lim_{\tau \rightarrow -k} f_M(\tau) + (\text{誤差}), \quad k \rightarrow \infty$$

が得られる。

Step 4 **Step 3** で得られた漸近展開の主要項 $\lim_{\tau \rightarrow -k} f_M(\tau)$ を Chern–Simons 不変量と Reidemeister torsion で記述する。これにより Witten の漸近展開予想の証明が完了する。

ここで **Step 1** に現れた ^{フォルス}偽 テータ関数とは上半平面上を動く変数 τ に関する無限級数として

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} (n \text{ の各成分の符号に関する関数}) q^{(n \text{ の二次形式})}, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$$

のような表示式で定義されるものである。典型的な例として $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $a \in \mathbb{Z}$ に対して定まる

$$\tilde{\theta}_{N,a}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(n) q^{N(n+a)^2}$$

がある。また **Step 2**, **Step 3** の内容は「WRT 不変量が量子モジュラー形式をなす」と述べることもできる。

Step 1 から **Step 4** までの研究の進展状況は以下の通りである。

- (1) **Poincaré ホモロジー球面** という非自明で最も単純な多様体に対して, Lawrence–Zagier [LZ99] が全てのステップを解決した。
- (2) **Brieskorn ホモロジー球面** という Poincaré ホモロジー球面を含む無限族に対して, 樋上 [Hik05] が全てのステップを解決した。
- (3) **Seifert ホモロジー球面** という Brieskorn ホモロジー球面を含む無限族に対しては 樋上 [Hik06] が全てのステップを解決した。その後, 別証明として 藤–岩木–村上–寺嶋 [FIMT21] によって **Step 1** と **Step 2** が, 松坂–寺嶋 [MT21] によって **Step 3** が, Andersen–Mistegård [And] によって **Step 4** が解決された。
- (4) **H グラフから定まる非 Seifert ホモロジー球面** という Seifert でない多様体のうち非自明で最も単純なものに対して, Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] が **Step 1** を, 森–村上 [MM21] が **Step 2** を, Bringmann–Mahlburg–Milas [BMM20] が **Step 3** を解決した。

- (5) 負定値鉛管多様体^{*1} という上述した全ての多様体を含む広範なクラスの多様体に対して、Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] は **Step 1** を解決し **Step 2** を明確な予想の形で述べた。

本稿の主定理は、(1)–(4) を含み (5) に含まれるケースに対して **Step 2** を解決したというものである。なお Witten の漸近展開予想を解決するための最後のステップである **Step 4** については (3) の場合を超える研究は未だない。

3 鉛管多様体

本節では前節の最後に登場した「鉛管多様体」という十分広範かつ扱いやすい 3 次元実多様体のクラスについて解説する。

そのためにまず **Dehn 手術** という絡み目から 3 次元多様体を構成する方法を紹介する。

定義 3.1. 絡み目は、有限個の S^1 の非交和の S^3 への埋め込みのことである^{*2}。

定義 3.2. 成分数 n の絡み目 L に沿った手術係数 $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の **Dehn 手術** とは、 S^3 からコンパクト向き付け可能 3 次元実多様体を得る以下の操作のことである。

- (1) S^3 内の絡み目 L の管状近傍 $\overline{L}$ を取る。
- (2) $S^3 \setminus \overline{L}$ と n 個のトーラス体をそれぞれ傾き $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n$ で貼り合わせる。

鉛管多様体とは、以下で定義されるようにグラフから定まる絡み目の Dehn 手術によって得られる 3 次元多様体のことである。

定義 3.3. (1) **重み付き木** とは、各成分を有理数で重み付けられた連結有限無向グラフで閉路を持たないもののことである。

- (2) 重み付き木 Γ に対し、各頂点を自明な結び目に、各辺を自明な結び目を絡ませることに、頂点の重みを手術係数に対応させることで手術係数付き絡み目を得る。この絡み目に沿って Dehn 手術することで得られる 3 次元多様体を $M(\Gamma)$ と書き、このようにして得られる 3 次元多様体を **鉛管多様体** と呼ぶ。

(2) におけるグラフと絡み目の対応の例を図 1 と図 2 に示した。

さて、重み付き木 Γ から得られる鉛管多様体 $M(\Gamma)$ の情報、特に $M(\Gamma)$ の不変量は原理的には Γ の情報のみで記述できるはずである。実際、例えば 1 次ホモロジー群は以下のように計算できる。

補題 3.4 ([村 22, 補題 3.4])。整数で重み付けられた木 Γ の頂点数を n 、隣接行列を $W \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})$ とすると $H_1(M(\Gamma), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n / W(\mathbb{Z}^n)$ が成り立つ。

逆に重み付き木 Γ から鉛管多様体 $M(\Gamma)$ の不変量を定めることもできる。例えば前節で紹介し

^{*1} これは「負定値な隣接行列を持つ整数で重み付けられた木から定まる鉛管多様体 (plumbed manifold)」を指す筆者独自の用語であり、定着している用語ではない。なお [村 22] では “plumbed manifold” の訳語について「定訳が無いようなので本稿では「plumbed 多様体」と呼ぶ」と述べているが、その後松本 [松 16] で “plumbing” が「鉛管工事」と訳されていることが判明したため、本稿では定訳ではないものの「鉛管多様体」という訳語を用いることとした。

^{*2} 本稿ではワイルドでない絡み目（すなわち十分小さな管状近傍が有限個のトーラス体と同相になるもの）のみ考察する。

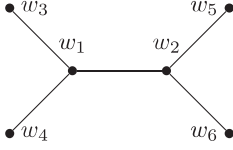


図 1: H グラフ

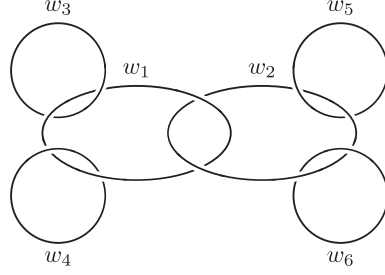


図 2: H グラフに対応する絡み目

た Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] による **Step 1** の解決は Γ を用いて **ホモロジカルブロック** $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ という フォールス テータ関数の不変量を定めることによってなされている。

4 主結果

それでは主結果を述べていこう。以下, Γ を整数で重み付けられた木であってその隣接行列が負定値なものとし, k を正整数とする。このとき鉛管多様体 $M(\Gamma)$ とその WRT 不変量 $\text{WRT}_k(M(\Gamma))$, およびそのホモロジカルブロック $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ が定まる。このとき Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20] による **Step 2** を定式化した予想は以下の通りである。

予想 4.1 (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [GPPV20, Conjecture 2.1, Equation (A.28)]).

$$\text{WRT}_k(M(\Gamma)) = \frac{1}{2(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1})} \lim_{q \rightarrow \zeta_k} \widehat{Z}_\Gamma(q).$$

ただし $\zeta_k := e^{2\pi\sqrt{-1}/k}$ とおく。

[Mur22] の主結果はこの予想を部分的に解決したというものである。グラフ Γ の頂点 v に対し, それから伸びる辺の数を $\deg(v)$ と書き v の **次数** と呼ぶ。このとき主結果は次のように述べられる。

定理 4.2 ([Mur22, Theorem 1.2]). グラフ Γ の $\deg(v) \geq 3$ なる全ての頂点 v に対し

$$\#\{v \text{ と隣接する次数 } 1 \text{ の頂点}\} + 2 - \deg(v) > 0$$

が成り立つなら予想 4.1 は真である。

定理 4.2 の証明方針は従来と比べて大幅に簡略化されている。以下にその方針を記す。

Step A 有理関数 $F_{\Gamma,k}(t) \in \mathbb{C}(t)$ であって定数項が $\text{WRT}_k(M(\Gamma))$ となるものを構成する。

Step B 変数 $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開

$$F_{\Gamma,k}(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n, \quad (\text{単純な因子}) \cdot \widehat{Z}_\Gamma(\zeta_k e^{-t}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n,$$

について

$$b_n = (\text{単純な因子}) \cdot a_n, \quad b_0 = a_0$$

を証明する.

Step C 有理関数 $F_{\Gamma,k}(t)$ が $t = 0$ で正則であることを示す. これにより任意の $n < 0$ に対し $a_n = 0$ が分かるので **Step B** より任意の $n < 0$ に対し $b_n = 0$ が従い, **Step A** と **Step B** より

$$(\text{単純な因子}) \cdot \lim_{q \rightarrow \zeta_k} \widehat{Z}_{\Gamma}(q) = b_0 = a_0 = \text{WRT}_k(M(\Gamma))$$

が示される.

定理 4.2 ではグラフ Γ の頂点に関する条件を仮定しているが, これは **Step C** を示すために用いた技術的な仮定である. 数値実験したところこの条件が成り立たない Γ に対しても予想 4.1 が成立することが期待されるが, 現状では証明出来ておらず今後の課題である.

予想 4.1 の証明において最も難しいのは **Step B** における漸近展開の係数 b_n が $n < 0$ に対して消滅することを示す部分である. この問題を [MM21] などの先行研究では初等整数論による非常に複雑な計算によって直接的に証明していたが, 本研究においては **Step C** で有理関数 $F_{\Gamma,k}(t)$ の正則性に帰着させることで間接的に証明している. これによって議論が大幅に簡略化され, 予想 4.1 が成立するための本質部分が明瞭になっている.

このような議論を可能にしているのが冒頭で紹介した漸近展開の公式である. 次節ではその公式を紹介する.

5 漸近展開の公式

以下の命題が我々の主結果において肝となっている漸近展開の公式である.

命題 5.1 ([Mur22, Proposition 5.6]).

- 正整数 k, N ,
- 周期写像 $C: \mathbb{Z}^N / k\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{C}$,
- 多項式 $P(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$,
- ベクトル $\alpha \in \mathbb{R}^N$

に対し, 複素数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^N}$ が存在して以下の漸近公式が成立する.

- (1) ([Mur22, Proposition 5.2]) 任意の急減少関数 $f: \mathbb{R}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t = (t_1, \dots, t_N) \rightarrow (+0, \dots, +0)$ に関する漸近展開

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} C(n) P(n) f(t(n + \alpha)) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} a_n f^{(n)}(0) t_1^{n_1} \cdots t_N^{n_N}$$

が成り立つ.

- (2) ([Mur22, Proposition 5.6]) 任意の急減少関数 $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t = (t_1, \dots, t_N) \rightarrow$

$(+0, \dots, +0)$ に関する漸近展開

$$\frac{1}{2^N} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \operatorname{sgn}(n) C(n) P(n) f(t(n + \alpha)) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a_n f^{(n)}(0) t_1^{n_1} \dots t_N^{n_N}$$

が成り立つ.

ただしここで以下の記法を用いた:

- 実数 x に対し

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

- $t(n + \alpha) := (t_N(n_N + \alpha_N), \dots, t_1(n_1 + \alpha_1))$.
- $F(t) \sim G(t)$ は任意の正整数 R に対し $F(t) = G(t) + O(t^R)$ が成り立つことを表す.
- 正の無限大方向に急減少な C^∞ 級関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し

$$g^{(-1)}(y) := \frac{d^{-1}}{dy^{-1}} g(y) := - \int_y^\infty g(y') dy'.$$

この命題のポイントは漸近係数に現れる数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^N}$ が急減少関数 $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ の取り方によらないという点である. また, $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ と $\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \operatorname{sgn}(n)$ という二つの無限級数が共通する漸近展開を持つというのも非常に不思議であり重要である. これにより異なる f が定める二種類の無限級数の漸近係数の間に関連が付くのである. 命題 5.1 (1) で $f(x) := \exp(-\sum_{v \in V_{\geq 2}} x_v)$ とすると有理関数 $F_{\Gamma, k}(t)$ が得られ, 命題 5.1 (2) で $f(x) := \exp({}^t W x)$ (ただし W はグラフ Γ の隣接行列) とするとホモジカルブロック $\hat{Z}_\Gamma(q)$ が得られる. これによって **Step B** が示されるのである.

命題 5.1 (1) の証明は次の Euler–Maclaurin の和公式から従う漸近公式を用いることでなされる.

補題 5.2 ([Zag06, Equation (44)], [BKM19, Equation (2.8)], [BMM20, Lemma 2.2], [村 22, 補題 4.8]). 実数 α と急減少関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t \rightarrow +0$ に関する漸近評価

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(t(n + \alpha)) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{B_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!} f^{(n)}(0) t^n$$

が成り立つ.

なお, 以下に示すように命題 5.1 (1) はいくつかの既知の和公式よりも強い主張である.

注意 5.3. (1) $N = k = 1, C(n) \equiv 1, P(x_1) = 1$ のとき, 命題 5.1 (1) は Euler–Maclaurin の和公式から従う漸近公式 (補題 5.2) である.

(2) $N = k = 1, C(n) = (-1)^n, P(x_1) = 1$ のとき, 命題 5.1 (1) は Euler–Boole の和公式から従う漸近公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t(n + \alpha)) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{E_n(\alpha)}{n!} f^{(n)}(0) t^n$$

である. ただしここで多項式 $E_n(x)$ は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(\alpha)}{n!} t^n := \frac{2e^{xt}}{1+e^t}$$

によって定義され, **Euler 多項式**と呼ばれる.

命題 5.1 (2) は n の成分 n_i が負の場合に変換 $n_i \mapsto -n_i - 1$ を行った後に Bernoulli 多項式の対称性 $B_i(1-\lambda) = (-1)^i B_i(\lambda)$ を用いることで示される ([Mur22, Proposition 5.6]). とは言え上二つの無限級数の漸近展開が一致することは非常に不思議である. またここで符号関数を $\text{sgn}(0) := 1$ と定めたことによって変換 $n_i \mapsto -n_i - 1$ での対称性が生まれていることも命題の成立に効いており, 大変不思議である.

なお, 上二つの無限級数の漸近展開が一致することは数列 (a_n) の母関数に着目することからも証明することができる. 以下にその別証明を述べる.

命題 5.1 (2) の別証明. 式の煩雑さを避けるために $N = k = 1, C(n) \equiv 1$ のときに証明を与える. 一般の場合も同様である.

命題 5.1 (1) より, 任意の多項式 $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ と実数 α に対して複素数列 $(a_n(P, \alpha))_{n=-\infty}^{\infty}$ が存在して, 任意の急減少関数 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) f(t(n+\alpha)) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(P, \alpha) f^{(n)}(0) t^n$$

が成り立つ. この式において $f(x) = e^{-t}$ と取ると左辺は有理型関数となるので右辺は漸近展開だけでなく $t=0$ での Laurant 展開となっており, そのため「 $\sim$ 」を「 $=$ 」に置き換えることができる. ここで任意の整数 n に対し $f^{(n)}(0) = (-1)^n$ なので左辺の有理型関数は数列 $(-1)^n a_n$ の母関数となる. この母関数を求めるために

$$\varphi(t) := \frac{1}{e^t - 1} \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}), \quad \partial := \frac{d}{dt} \in \text{End}(C^\infty(\mathbb{R}_{>0})), \quad (J: \psi(t) \mapsto \psi(-t)) \in \text{End}(C^\infty(\mathbb{R}_{>0})),$$

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_r x^r, \quad P(\partial) := p_0 + p_1 \partial + \cdots + p_r \partial^r \in \text{End}(C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$$

とおくと, $t > 0$ に対し母関数は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(P, \alpha) (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{-t(n+\alpha)} = e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} P(-\partial) e^{-nt} = -e^{-\alpha t} P(-\partial) J\varphi(t)$$

と書ける.

さて, いま示したいのは $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開

$$\sum_{n \leq -1} P(n) f(t(n+\alpha)) \sim - \sum_{n=0}^{\infty} P(n) f(t(n+\alpha))$$

である. ここで左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq -1} P(n)f(t(n+\alpha)) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(-n-1)f(-t(n+1-\alpha)) \\ &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(P(-x-1), 1-\alpha)(-1)^n f^{(n)}(0)t^n\end{aligned}$$

という漸近展開を持つので, 任意の整数 n に対し

$$(-1)^n a_n(P(-x-1), 1-\alpha) = -a_n(P, \alpha)$$

が成り立つことを示せば良い. これを母関数の一致によって示す.

上で示した $a_n(P, \alpha)$ の母関数の表示より

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n(P(-x-1), 1-\alpha)(-t)^n &= -e^{-(1-\alpha)(-t)} P(\partial-1) J\varphi(-t) \\ &= -e^{-\alpha t} e^t J P(\partial-1) J\varphi(t)\end{aligned}$$

なので

$$e^t J P(\partial-1) J\varphi(t) = P(-\partial) J\varphi(t)$$

を示せば良い. ここで $\text{End}(C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$ の元として $J^2 = 1$, $\partial J = -J\partial$ より $J(\partial-1)J = -\partial-1$ なので $J P(\partial-1)J = P(-\partial-1)$ である. よって左辺は $e^t P(-\partial-1)\varphi(t)$ と書ける. また $C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ の e^t 倍写像を e^t と書くとき, $\text{End}(C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$ の元として $e^t(-\partial-1) = -\partial e^t$ なので帰納法により任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $e^t(-\partial-1)^r = -\partial^r e^t$ が成り立つ. よって $e^t P(-\partial-1) = P(-\partial)e^t$ を得る. 以上より $P(-\partial)e^t \varphi(t) = P(-\partial) J\varphi(t)$ を示せば良いが, これは $e^t \varphi(t) = J\varphi(t)$ から従う. $\square$

論文 [Mur22] の証明では Bernoulli 多項式の対称性を用いたが, 上の証明ではより弱い性質である Bernoulli 数の母関数 $\varphi(t)$ の対称性を用いているため, より本質部分を捉えているとみなせるであろう. しかしながら二つの無限級数の漸近展開が一致するという現象の納得のいく説明は与えていないように筆者には思われる.

注意 5.4. 上の証明の冒頭と同様の議論によって命題 5.1 の数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^N}$ の母関数を以下のように求めることができる. 以下の計算では命題 5.1 の主張と同様に $t(n+\alpha) := (t_N(n_N+\alpha_N), \dots, t_1(n_1+\alpha_1))$ という記法を用いていることに注意する.

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a_n t_1^{n_1} \cdots t_N^{n_N} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} C(n) P(n) e^{t(n+\alpha)} \\ &= e^{t\alpha} \sum_{n \in \{0, \dots, k-1\}^N} C(n) \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} P(n+km) e^{t(n+km)} \\ &= e^{t\alpha} \sum_{n \in \{0, \dots, k-1\}^N} C(n) \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_N}\right) e^{t(n+km)} \\ &= e^{t\alpha} \sum_{n \in \{0, \dots, k-1\}^N} C(n) P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_N}\right) \frac{e^{tn}}{(1-e^{kt_1}) \cdots (1-e^{kt_N})}.\end{aligned}$$

Bernoulli 多項式が Hurwitz ゼータ関数の特殊値になっていることと同様に, 命題 5.1 の数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^N}$ もあるゼータ関数の特殊値として記述できるだろうか, という疑問を筆者は [MM21] で降抱いていた. このことは Mellin 変換に関する既存のアイデアから解決できることに [Mur22] の執筆後に気付いたため, 本稿の締めくくりとしてここに記しておく.

Lawrence–Zagier [LZ99, pp. 98, Proposition], Zagier [Zag06, Section 1] の手法を用いることで, Mellin 変換に関する次の主張が従う.

補題 5.5. 集合 Λ で添字付けられた複素数列 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と正の実数列 $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, 級数

$$F(t) := \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{-b_\lambda t}$$

が $\mathbb{R}_{>0}$ 上広義一様収束し, $t \rightarrow +0$ に関する漸近展開

$$F(t) \sim \sum_{n > -\infty} c_n t^n$$

を持ち (ただしここで $n > -\infty$ は十分小さい任意の n に対し $c_n = 0$ となることを意味する), Mellin 変換

$$\mathcal{M}F(s) := \int_0^\infty F(t) t^{s-1} dt$$

が $\mathbb{C}$ 上の有理型関数を定めると仮定する. このとき $F(t)$ に付随する L 関数

$$L(s; F) := \frac{\mathcal{M}F(s)}{\Gamma(s)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{a_\lambda}{b_\lambda^s}$$

について, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$c_n = \operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) L(s, F) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!} L(-n; F), & n \geq 0, \\ (-n-1)! \operatorname{Res}_{s=-n} L(s; F), & n < 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{M}F(s) &\equiv \sum_{n > -\infty} c_n \int_0^\infty t^{n+s-1} dt \quad \text{mod } \mathcal{O}(\mathbb{C}) \\ &\equiv \sum_{n > -\infty} \frac{c_n}{s+n} \quad \text{mod } \mathcal{O}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

と書け, $\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 上で零点を持たず極は $s = -n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ にあり全て 1 位で留数が $(-1)^n/n!$ であることから主張が従う. $\square$

補題 5.5 を用いることで, 命題 5.1 の数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^N}$ を以下のようにあるゼータ関数の特殊値として記述できる.

系 5.6. 命題 5.1 の状況で次が成立する.

(1) C, P, α に付随する N 変数 L 関数を

$$L(s_1, \dots, s_N; C, P, \alpha) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} \frac{C(n)P(n)}{(n_1 + \alpha_1)^{s_1} \cdots (n_N + \alpha_N)^{s_N}}$$

とおくと任意の $n \in \mathbb{Z}^N$ に対し

$$a_n = (-1)^{n_1 + \cdots + n_N} \operatorname{Res}_{s_1 = -n_1} \cdots \operatorname{Res}_{s_N = -n_N} \Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_N) L(s_1, \dots, s_N; C, P, \alpha)$$

が成り立つ. 特に $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ に対し

$$a_n = \frac{L(s_1, \dots, s_N; C, P, \alpha)}{n_1! \cdots n_N!}$$

が成り立つ.

(2) C, P, α に付随する 1 変数 L 関数を

$$L(s; C, P, \alpha) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} \frac{C(n)P(n)}{(n_1 + \alpha_1)^s \cdots (n_N + \alpha_N)^s}$$

とおくと任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\operatorname{Res}_{s=-m} \Gamma(s) L(s; C, P, \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N, n_1 + \cdots + n_N = m} (-1)^{n_1 + \cdots + n_N} a_n$$

が成り立つ.

(3) N 変数正定値二次形式 $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ を固定する. このとき C, P, α, Q に付随する 1 変数 L 関数を

$$L(s; C, P, \alpha, Q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} \frac{C(n)P(n)}{Q(n + \alpha)^s}$$

とおくと任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\operatorname{Res}_{s=-m} \Gamma(s) L(s; C, P, \alpha, Q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N, n_1 + \cdots + n_N = m} \frac{\partial^m e^{-Q(x_1, \dots, x_N)}}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_N^{n_N}}(0, \dots, 0) a_n$$

が成り立つ.

この主張は純粋に多変数ゼータ関数の特殊値の間の関係式とみなすこともできるため, 本稿の主眼である 3 次元トポロジーと量子モジュラー形式を越えてゼータ値の理論から見ても興味深いものだと筆者には思われる.

謝辞

2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」にて私に講演の機会を下さった山崎義徳先生 (愛媛大学) と安福悠先生 (日本大学) に深く感謝申し上げます. また私の研究生生活を通して懇切丁寧にご指導頂いた指導教員である山内卓也先生 (東北大学) に深く感謝いたします. 本稿で紹介した論文 [Mur22] については寺嶋郁二先生 (東北大学), 森祥仁さん (東北大学), 樋上和弘先生 (九州大学), 松坂俊輝さん (九州大学) に多くのご教授を頂きました. また本研究は JSPS 科研費 JP20J20308 の助成を受けたものです. ここに感謝いたします.

参考文献

- [And] J. E. Andersen. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. *arXiv:1811.05376v4*, Oct 2020.
- [BKM19] K. Bringmann, J. Kaszian, and A. Milas. Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(2):Paper No. 20, 41, 2019.
- [BMM20] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.
- [FIMT21] H. Fuji, K. Iwaki, H. Murakami, and Y. Terashima. Witten – Reshetikhin – Turaev function for a knot in Seifert manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 2021.
- [GPPV20] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.
- [Hik05] K. Hikami. On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres. *Internat. J. Math.*, 16(6):661–685, 2005.
- [Hik06] K. Hikami. On the quantum invariants for the spherical Seifert manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 268(2):285–319, 2006.
- [LZ99] R. Lawrence and D. Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. volume 3, pages 93–107. 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.
- [MM21] A. Mori and Y. Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev invariants, homological blocks, and quantum modular forms. *arXiv:2110.10958*, 2021.
- [MT21] T. Matsusaka and Y. Terashima. Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres. *arXiv:2112.06210*, 2021.
- [Mur22] Y. Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev invariants and homological blocks for plumbed homology spheres. 2022. *arXiv:2205.01282*.
- [Zag06] D. Zagier. *The Mellin transform and other useful analytic techniques*, pages 305–323. Springer, Berlin, 2006.
- [村 22] 村上友哉. 非 Seifert 多様体に対する量子不変量の量子モジュラー性. In *RIMS 講究録別冊「保型形式, 保型 L 関数とその周辺*, 2022.
- [松 16] 松本幸夫. *新版 4 次元のトポロジー*. 日本評論社, 2016.