

山型鋼の座屈実験と境界条件*

野 中 泰 二 郎

BUCKLING TESTS OF ANGLES AND BOUNDARY CONDITIONS

By Taijiro NONAKA

Synopsis

Study is made of the formulation of a rotation-free boundary condition for angle specimens centrally compressed in early tests. Confirmed by the extremum principle of potential energy and calculus of variation, the derived boundary condition is combined with the equilibrium equations of the torsional-flexural buckling of a thin-walled open cross section, to solve the bifurcation problem through direct integration. The theoretical solution shows that the critical load for the rotation-free boundary condition is identical with that for the conventional simple-support condition. The solution also indicates, in spite of free rotation, that no twist takes place at one end of the buckled angle relative to the other, with maximum twist at the mid cross section relative to the both ends. These results are compared with early experimental observations, to reach reasonable agreement.

1. ま え が き

鉄骨構造によく用いられる山型鋼部材は、捩れ抵抗の小さい断面形状をしているから、圧縮力を受けると捩れを伴った座屈が生じ易い。四半世紀近くも遡るが、筆者らは単一山型鋼に対する一連の座屈実験を行ない^{1)~5)}、その実験的成果は既に実用設計式に役立てられている。

座屈荷重の予測には、載荷の偏心や部材形状などによって、板要素に対する局部座屈理論が有効な場合があるが、山型鋼の全般的な座屈現象は薄肉開断面材に対する曲げ捩れ座屈理論で良く説明される。薄肉開断面の特徴は、捩れ易いことと共に、捩れに伴って生じる反りが著しいことであって、一様な反りの発生を拘束すれば、捩れ抵抗が増加する。すなわち、捩れに対する断面の抵抗モーメント（トルク）は、一様捩れにおける St. Venant の純捩り成分と、反り拘束に基づく Wagner の曲げ捩り成分とから成る。変形前には平面であった、材軸と垂直な断面は反り変形に依って平面性を失うから、棒状部材の曲げ理論に於ける平面保持の仮定は成立しない。その為、薄肉開断面材の座屈現象は、部材端部での、反りに関する支持条件に依存する。

曲げ捩れ座屈理論は、断面形状の不変性に基づき、すなわち、反り変形が生じても材軸に垂直な面に対する断面の投影は変化しないとの仮定をおいて、弾性分岐点問題を考察し、線型固有値解析を行なうものである。変形の小さい領域での釣合微分方程式は広く知られているところで、特に、中心圧縮柱の弾性座屈にはほぼ厳密に成立する⁶⁾。しかし、曲げと捩れが連成する現象に於ける材端支持条件に関する研究は十分でなく、現実的な支持状況をどの様な境界条件として定式化すべきかが明白にされていない。単純な曲げ理論におけるピン支持の条件を反り捩れに拡張した単純支持の仮定（後述）は一つの明瞭な理想化であって、これを両端の境界条件として用いれば、解が簡単に得られるので、しばしば実用解として用いられる。前述の実

* 京都大学防災研究所を停年で退官される若林 實博士に献ぐ。

験報告においても、「山型鋼の座屈現象は振れに対する境界条件に大きく左右されない」との工学的判断に基づいて、その解を予測値に採用し、実験との良好な一致をみた。しかし当該実験での部材端は*、あらゆる方向の回転を拘束しない様に設計された球座で支えたもので、従って厳正な理論解と比較したわけではなかった。そこで、本報では、球座による支持条件をより忠実に定式化し、厳密な理論解を導いて前に得た予測値並びに実験の観察に基づく座屈現象と比較検討する。

実験は、細長さを変化させると共に、種々の偏心を与えて行なわれたが、ここでは、中心圧縮を受ける山型鋼のみを対象とする。線型弾性の材料挙動を仮定して固有値解析を遂行するが、弾性域を越えて塑性域に入っても、弾性常数を接線係数で置き換えれば、中心圧縮柱の座屈耐力を十分な精度で予測できると考えられる⁷⁾。

2. 実験概況

実験的研究の詳細は既に発表したが、その概況を次に要約する。

試験体には材質 SS 41 の山型鋼 L-90×90×7 を用い、両端ピン支持と仮定したときの、対称面内の曲げ、すなわち、最も弱い方向の圧縮曲げに対する細長比 λ を20から150まで10種類の長さを選んだ。中心圧縮には、本実験で各一体づつ採用した。これを、Fig. 1 および Photo. 1 に示す球座で支え、Photo. 2 に示す様な200トン長柱試験機で載荷し、荷重を、座屈現象が認められるまで、徐々に増加させた。試験体の上下端

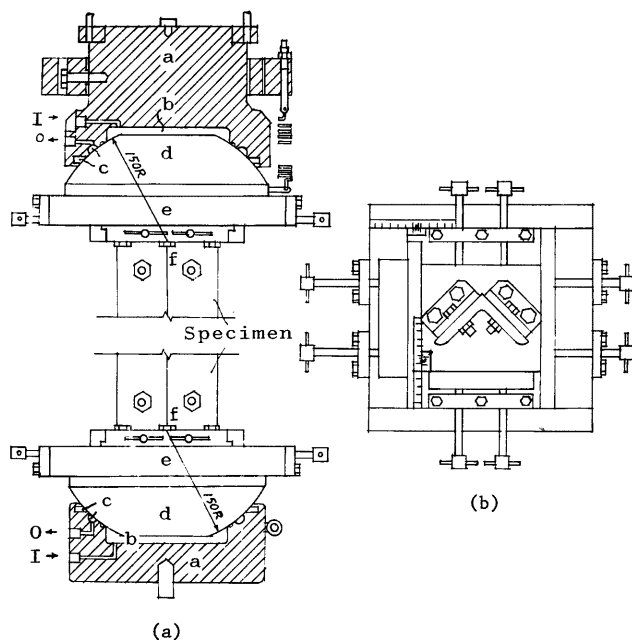


Fig. 1 End supports

* 本実験に先だって予備的な試験を行ない、材端の支持方法を検討した¹⁾。方向性の無い自由回転を与える意図で、鋼球一個で支える支端、および、多数の小さなボールベアリングを球面に敷き詰める支端を試作した結果、いずれも、回転拘束が認められた為、油圧式球座を製作して、本実験を遂行した。

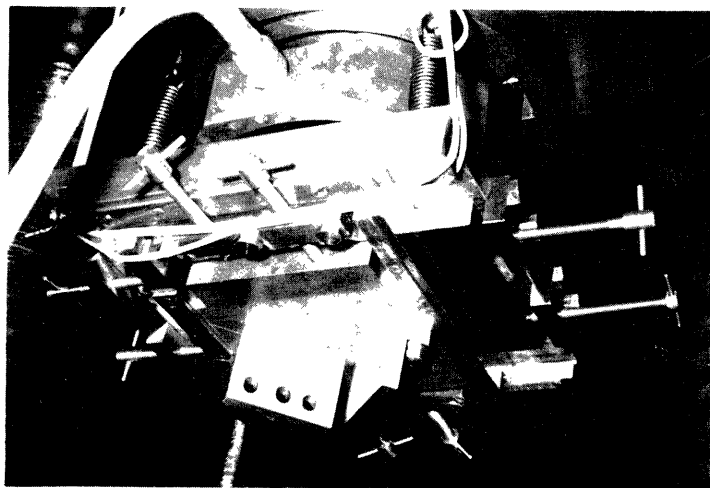


Photo. 1 Upper support

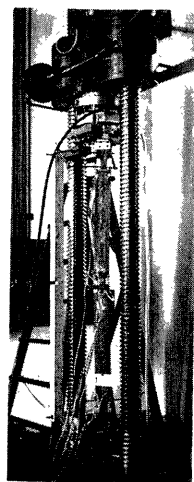


Photo. 2 Experimental apparatus

は、**Fig. 1(a)** の支持板 *c* に密着支持され、この支持板が球座 *d* と一体となって、密着面上の一点 *f* のまわりに自由に回転できる様、球面 *e* に薄い油膜が形成される油圧式球座で支持した。試験機に固定され、図に斜線で示した部分 *a* から加えられた荷重は、上下端の回転中心 *f* を通じて試験体に伝えられた。この中心を、山型鋼断面の図心に来る様、**Fig. 1(b)** に示す微動調整ネジで移動、セットすることにより、中心圧縮を再現させたものである。**Fig. 2** はいわゆる座屈曲線で、横軸は上記の細長比 λ 、縦軸は、座屈荷重を断面積で除した座屈応力 σ ($\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2}$) を示す。図中、黒い丸印が実験値^{*}、曲線は後述の理論解である。

Fig. 3 は実験観測による荷重・変形関係の一例として $\lambda = 80$ の場合を示したものである。(a)は中央断面位置における2方向(図中、1は対称軸、2は非対称主軸方向)の横たわみ、(b)は試験体下端に対する、中央(Middle とあるもの)および上端部(Upper とあるもの)の相対捩れ角、(c)は中央断面における4箇所(5、8は片先、6、7は稜に隣接する点)のひずみの値を、それぞれ横軸に取ったもので、荷重の値を表す縦座標に応じて、それらがどのように変化していくかを示している。(a)、(c)より、圧縮力と共にほぼ真直に縮んでいた山型鋼試験体が、座屈荷重付近で大きく湾曲することが、また(b)からは、捩れの小さい端部に反して、中央断面は荷重と共に徐々に捩れ角が増し、座屈と同時に大きく捩れる様子が分る。座屈以前のたわみや捩れは、試験体の元たわみや不可避の偏心による誤差とみなされるが、(b)に見られる捩れ角の分布は注目値する。球座による支持条件が、上下端で捩れを拘束しないものゆえ、両端での相対捩れ角が顕著になっても不思議ではないからである。

たわみと捩れ角の材軸方向分布が座屈モードを表わし、したがって座屈荷重を決定するわけで、次節で、上の現象を理論的に究明する。

3. 固有値解析

3.1 鈎合方程式

Fig. 4 に実線で示した薄肉等辺山型の一樣断面棒が、断面の図心 *O* を連ねた材軸方向(重心軸)に圧縮力

^{*} 山型鋼断面の図にある黒丸印は載荷位置を示す。前述の報告^{2,3,5)} では、 $\lambda = 100$ の試験体に対する実験値のプロットが欠けていた。

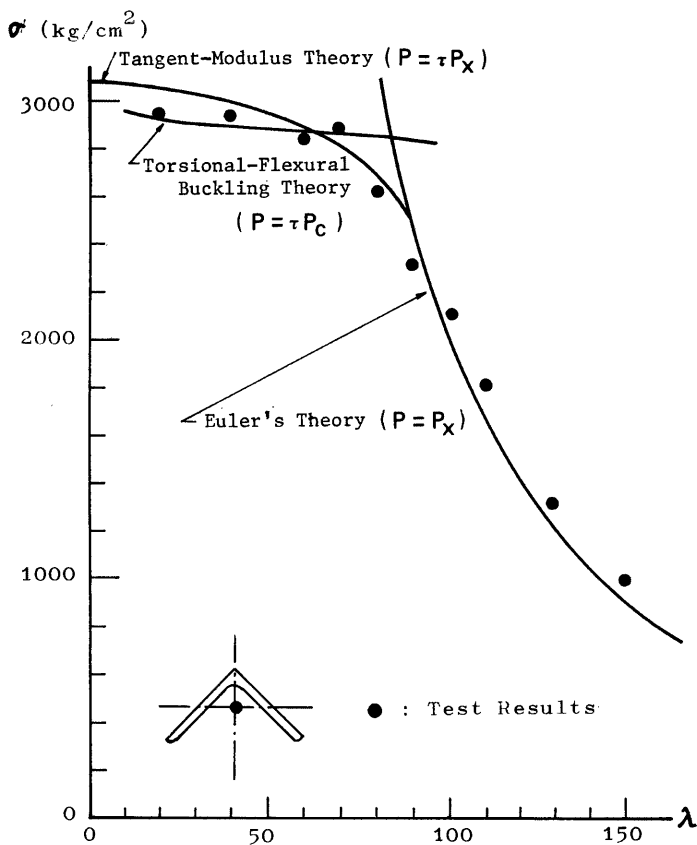
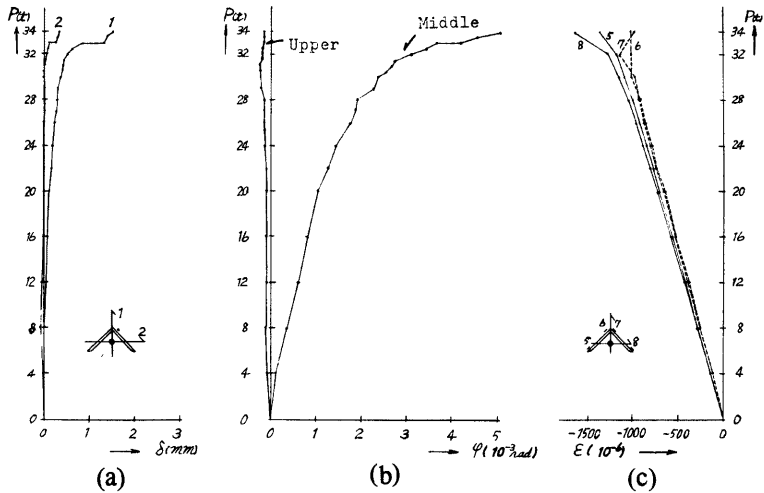


Fig. 2 Experimental results and column curve

P を受けるものとする。真っ直ぐな形状のほか、 P が座屈荷重の大きさに達すると、図に破線で示した様に、振れ撓んだ状態での釣合状態も可能である。その様な変形が小さいものと仮定し、材料挙動の線型弾性と断面形状の不変性を仮定すると、曲げ振れ座屈理論による、以下に記す釣合微分方程式が厳密に成立することが知られている。

図において、山型鋼断面のせん断中心は2つの脚の中心線の交点 S にあるから、点 O を原点として、断面の主軸の方向に x, y 軸をとれば S は対称主軸、すなわち y 軸上、原点から y_0 の位置にある。 z 軸を材軸方向にとり、 x, y, z が直交右手系をなすものとする。空間に固定したこの様な座標系における、せん断中心の x, y 方向の変位をそれぞれ u, v で表わし、断面の振れ角を φ とする。薄肉の仮定に基づいて、脚の厚さ方向の反りを無視すると、山型断面の反り抵抗は0であって、釣合条件は、次の連立微分方程式で表される（誘導については附録参照）。

Fig. 3 Example of load-deformation relation, $\lambda=80$

(a) Load-deflection relation (b) Load-twist relation (c) Load-strain relation

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \left(\frac{d^2 u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(GJ - r_0^2 P) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - P y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 E はヤング係数、 I_x 、 I_y はそれぞれ、主軸 x および y 軸まわりの断面2次モーメントで、 G はせん断弾性係数、 J は St. Venant の捩れ定数である。また r_0 はせん断中心まわりの極2次モーメントで、断面積 A を用いて次式で定義される。

$$r_0^2 \equiv y_0^2 + \frac{I_x + I_y}{A} \quad \dots\dots\dots (4)$$

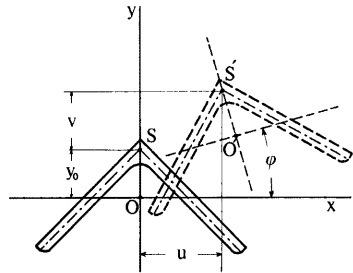


Fig. 4 Angle cross-section

比例限度を超える中心圧縮载荷に対しては、弾性係数 E 、 G をそれぞれ、それらに対応する接線弾性係数で置き換えると、接線係数理論に基づく釣合式になるから、容易に非線型域にまで拡張できる⁷⁾。

3.2 常用解

曲げに対するピン支持の条件は、材端で変位に対する関係式

$$u=0, \quad v=0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2}=0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2}=0 \quad \dots\dots\dots (5, 6, 7, 8)$$

を満足することであるが、捩れ角に対してもこれと同じ形式の条件

$$\varphi=0, \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2}=0 \quad \dots\dots\dots (9, 10)$$

を課し、これらを同時に満足する様な支持条件は、曲げと捩れが同時に生じるときの基本的な境界条件とし

てよく用いられ、単純支持あるいは、独乙語を用いて、*Gabellagerung* と呼ばれる*。この境界条件を両端に適用すれば容易に完全解の得られることが知られている⁹⁾。材長を l と書き、両端が $z=0$ および $z=l$ にあるとすると、

$$u = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad v = C_2 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = C_3 \sin \frac{\pi z}{l} \dots\dots\dots (11, 12, 13)$$

の形の解は両端で上記の境界条件を満足するから、これらを微分方程式(1)~(3)に代入すれば、連立代数方程式

$$\left[-EI_y \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + P \right] C_1 + P y_0 C_3 = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\left[-EI_x \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + P \right] C_2 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$P y_0 C_1 - (GJ - r_0^2 P) C_3 = 0 \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。係数 C_1, C_2, C_3 の総ては0でない条件として、

$$\begin{vmatrix} P - \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} & 0 & P y_0 \\ 0 & P - \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} & 0 \\ P y_0 & 0 & r_0^2 P - GJ \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

あるいは、

$$(P - P_x) [(r_0^2 - y_0^2) P^2 - (r_0^2 P_y + GJ) P + GJ P_y] = 0 \dots\dots\dots (18)$$

を得る。ここに、

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \dots\dots\dots (19, 20)$$

はそれぞれ、 x 軸および y 軸まわりの曲げに対応するオイラーの座屈荷重である。

式(18)の根として得られる P の値が座屈荷重を与え、これによれば、 x 軸まわり、すなわち、対称面内の曲げ座屈 ($P = P_x$) と、 y 軸まわりの曲げと捩れとが連成した曲げ捩れ座屈のいずれかが生じることになる。

Fig. 2 における座屈曲線は、これらに接線係数理論を適用したもので、実験値と良く一致していることが分る(次節で詳述)。

3.3 支持条件の定式化

第2節で述べた実験における材端支持条件を定式化する。球座の回転中心を材端断面の図心に一致させる中心圧縮荷重では、両端で図心の変位が拘束される。

Fig. 4 を参照して、図心 O の x, y 両方向変位成分はせん断中心 S の変位と捩れ角を用いるとそれぞれ、 $u + y_0 \varphi$ および v で表わされるから、条件

$$u + y_0 \varphi = 0, \quad v = 0 \dots\dots\dots (21, 22)$$

が両端で満足されなければならない。なお、材端は平板で圧縮され、従って、反りが生じないが、反り拘束の条件 $d\varphi/dz = 0$ を山型鋼断面に使うのは妥当でない。厚さ方向の反りを無視し、従って反り抵抗の無い棒を考察しているからである(附録参照)。

次に、回転自由の条件を、断面力で表すことを考える。断面寸法が材軸方向の寸法に比べて十分小さい、いわゆる棒材の理論では一般に、一断面に作用する力系を **Fig. 5 (a)** に示す様に、それと静的に等価な、図

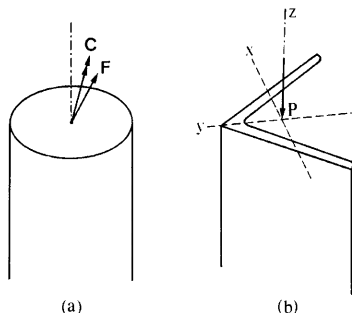


Fig. 5 Resultant-stress system in bar member
(a) General case (b) Angle section

* ただし、反り抵抗のない山型鋼の場合、後に述べる理由で、式(18)の条件は該当しない。

心を通る1つの力 $\mathbf{F}$ と偶力モーメント $\mathbf{C}$ との組に置換し、両者の力学的作用を考察する。当該実験における試験体では、回転自由の条件から後者は両端で存在しない。ベクトル $\mathbf{C}$ を材軸方向のスカラー成分すなわち振りモーメント T と曲げモーメントとに分解し、曲げモーメントを更に、断面の主軸方向の2成分 C_x , C_y とに分けると、両端での条件は

$$T=0 \dots\dots\dots (23)$$

$$C_x=0, \quad C_y=0 \dots\dots\dots (24, 25)$$

と表される*。

モーメントの各成分を変形量 u , v , φ で表せば、両端での境界条件(21)～(25)の合計10式を用いて、微分方程式(1)～(3)の一般解を含む10の積分定数を決定できる。しかしここでは次の様な考察を加えて解析を簡単化する。すなわち、試験体には端部の2支点でのみ荷重が作用し、釣合い上それは2点間を結ぶ直線を作作用線とする、互いに反対向きの一対の力でなければならない。このことは座屈に伴ってたわみや振れが生じても変わらないわけで、Fig. 5(b) に示す様に、座屈前の真っ直ぐな形状での材端断面に垂直な方向に荷重 P が作用し、断面に平行な力の成分が存在しない。従って、空間に固定した座標系 (x, y, z) における、力ベクトル $\mathbf{F}$ の x , y 方向成分 F_x , F_y は条件

$$F_x=0, \quad F_y=0 \dots\dots\dots (26, 27)$$

を満足し、 z 軸方向成分の絶対値が P に等しい。換言すると、中間荷重が存在しないこと、および両端での境界条件式(23)～(25)とから、式(26), (27) が全材長に渡って成立する。

3.4 直接積分

条件(21)～(27)のもとに釣合微分方程式(1)～(3)を解いて、直接積分による解を求める。式(1)～(3)は定数係数の線型齊次常微分方程式で、未知数 u , v , φ に関する二階および四階の微係数のみを含むから、 z について一度積分すると、未知数に関する一階および三階の微係数を含む非斉次の微分方程式となる。その際に現れる定数項(積分定数)は明白な物理的意味を持ち、それを、前節で導入した記号で表わせば次の様になる(附録参照)。

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + P \left(\frac{du}{dz} + y_0 \frac{d\varphi}{dz} \right) = -F_x \dots\dots\dots (28)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + P \frac{dv}{dz} = -F_y \dots\dots\dots (29)$$

$$(GJ - r_0^2 P) \frac{d\varphi}{dz} - P y_0 \frac{du}{dz} = T \dots\dots\dots (30)$$

すなわち、式(28)および(29)は、座屈以前の真っ直ぐな形状において材軸 z に垂直な断面に作用する面内力(横力)は、座屈後も、材軸に添って一定であることを意味し、前者は x 方向の横力、後者は y 方向の横力に関するものである**。これら横力は、単純曲げの問題におけるせん断力に加えて、傾斜して作用する軸方向力 P の横方向成分を含んでいる。式(30)は、St. Venant の純振りモーメント $GJ \, d\varphi/dz$ と、軸方向繊維の振れに伴って、圧縮応力 P/A がせん断中心まわりに引き起す振りモーメント成分 $-Pd(r_0^2\varphi + y_0u)/dz$ とから成る全振りモーメントが材軸に添って一定であることを意味する。

x 軸および y 軸方向の釣合式(28)および(29)の両式に(26)式および(27)式をそれぞれ代入して再び積分すると次式が得られる。

* 振りモーメントの中心は断面の図心ではなく、せん断中心であるから、式(23)は必ずしも自明の境界条件ではない。その妥当性を附録で確認する。

** ここでは、横力 F_x , F_y および振りモーメント T の附号は重要でないが、外向き法線の方向と z 軸の正の向きとが一致する断面に作用する断面力ベクトルの成分が、座標軸 x , y および z の正方向と一致するときを正、逆向きを負にとっている。 C_x , C_y についても同様である。

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + P(u + y_0 \varphi) = C_y \dots\dots\dots (31)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + P v = -C_x \dots\dots\dots (32)$$

すなわち、(31)、(32)両式の左辺は一定値をとり、それらは絶対値においてそれぞれ、 xz 平面内(y 軸まわり)および yz 平面内(x 軸まわり)の材端曲げモーメントの値に等しい(附録参照)。(30)~(32)の3式に、境界条件(23)~(25)の3式を代入すると、結局、斉次式

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + P(u + y_0 \varphi) = 0 \dots\dots\dots (33)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + P v = 0 \dots\dots\dots (34)$$

$$(GJ - r_0^2 P) \frac{d\varphi}{dz} - P y_0 \frac{du}{dz} = 0 \dots\dots\dots (35)$$

を得る。

これら3式を、境界条件(21)、(22)両式のもとで解けばよいわけであるが、式(22)および(34)は共に未知数 v に関するもので、 u, y には無関係である。 yz 平面(対称面)内の曲げ座屈、すなわち、オイラー座屈が独立に生じ得るわけで、周知の様に、座屈荷重は式(19)の P_x 、モードは式(12)で与えられる。 x 軸方向変位 u と振れ角 φ とが連成する解を求めるため、独立変数を z の代りに、無次元量

$$\zeta \equiv \frac{\pi z}{l} \dots\dots\dots (36)$$

で表し、 ζ に関する微分を記号'で示せば、釣合式(33)、(35)はそれぞれ

$$\frac{\pi^2 EI_y}{l^2} u'' + P(u + y_0 \varphi) = 0 \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\pi}{l} (GJ - r_0^2 P) (y_0 \varphi)' - \frac{\pi}{l} P y_0^2 u' = 0 \dots\dots\dots (38)$$

となる。更に、

$$GJ - r_0^2 P \neq 0 \dots\dots\dots (39)$$

と仮定して、無次元量

$$q \equiv \frac{P y_0^2}{GJ - r_0^2 P} \dots\dots\dots (40)$$

と比 P/P_y とを P に関する助変数に用いると、上の釣合式は次の様に書き換えられる。

$$u'' + \frac{P}{P_y} (u + y_0 \varphi) = 0 \dots\dots\dots (41)$$

$$(y_0 \varphi)' - q u' = 0 \dots\dots\dots (42)$$

材端 $z = 0, z = l$ はそれぞれ $\zeta = 0, \zeta = \pi$ で表されるから、未知函数 $u(\zeta), \varphi(\zeta)$ に対する境界条件は、式(21)から、

$$u(0) + y_0 \varphi(0) = 0, \quad u(\pi) + y_0 \varphi(\pi) = 0 \dots\dots\dots (43, 44)$$

と書き換えられる。

(41)、(42) 両式から $y_0 \varphi$ を消去すると、 u に関する微分方程式

$$u'''' + p^2 u' = 0 \dots\dots\dots (45)$$

および、その一般解

$$u = A \sin(p\zeta) + B \cos(p\zeta) + D \dots\dots\dots (46)$$

が得られる。ここに

$$p \equiv \sqrt{\frac{P}{P_y} (1 + q)} \dots\dots\dots (47)$$

はやはり P に関する助変数で、次の様にも書ける。

$$1+q=\frac{P_y}{P}p^2>0 \quad (48)$$

また、 A, B, D は積分定数である。式(46)を式(41)に代入し、式(47)あるいは(48)を用いると、次式を得る。

$$y_0\varphi=qA\sin(p\xi)+qB\cos(p\xi)-D \quad (49)$$

一般解(46)、(49)を境界条件(43)に代入すれば、

$$B=0 \quad (50)$$

であることが判り、さらに、境界条件(44)を併せ用いて関係式

$$A\sin(\pi p)=0 \quad (51)$$

を得る。したがって、座屈荷重 P の値は最小の固有値

$$p=1 \quad (52)$$

から決定される。式(40)、(47)および(52)から

$$\frac{P}{P_y}\left(1+\frac{P_y y_0^2}{GJ-r_0^2 P}\right)=1 \quad (53)$$

あるいは、書き換えて次式を得る。

$$(r_0^2-y_0^2)P^2-(r_0^2 P_y+GJ)P+GJ P_y=0 \quad (54)$$

これは、前記(48)式の連成解と同一の座屈荷重を与える。 P の値の範囲を調べるため、記号

$$P_t \equiv \frac{GJ}{r_0^2} \quad (55)$$

を用いて式(54)を

$$\left(1-\frac{y_0^2}{r_0^2}\right)P^2-(P_y+P_t)P+P_y P_t=0 \quad (56)$$

と書き改め、二次方程式の根

$$P=\frac{1}{1-\frac{y_0^2}{r_0^2}}\left[\frac{P_y+P_t}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P_y-P_t}{2}\right)^2+\frac{y_0^2}{r_0^2}P_y P_t}\right] \quad (57)$$

を得る。

式(57)で特に $y_0=0$ と置くと次の簡単な関係式を得る。

$$P=\frac{P_y+P_t}{2}\pm\left|\frac{P_y-P_t}{2}\right|=P_y, P_t \quad (58)$$

$y_0=0$ はせん断中心と図心とが一致することを、そして上式は、そのときの座屈荷重が P_y または P_t のいずれか小さい方の値に等しいことを意味する。すなわち、その様な断面部材では、図心を連ねた材軸と、2断面主軸のいずれかとを含む2つの面内での曲げ座屈および捩れ座屈が独立に生じ、 P_x, P_y, P_t のうち最小の値が真の座屈荷重に等しいという周知の事実を意味する。なお、式(55)で定義される P_t は、反り抵抗のない断面に対する単純捩れの座屈荷重に等しい*。式(57)と式(58)を比較すれば分る様に、式(57)の2根のうち、一方は P_y, P_t のうちの大きい方より大きく、他方は P_y, P_t のうちの小さい方より小さい**。従って、連成座屈の荷重は、その小さい方でこれを P_c と書くと、

$$P_c=\frac{1}{1-\frac{y_0^2}{r_0^2}}\left[\frac{P_y+P_t}{2}-\sqrt{\left(\frac{P_y-P_t}{2}\right)^2+\frac{y_0^2}{r_0^2}P_y P_t}\right] \quad (58)$$

で、 P_x と P_c の小さい方が曲げ捩れ座屈理論による真の座屈荷重である。

* このことは、式(35)で $y_0=0$ と置いても理解できる。

** このことと、式(55)とから、仮定(39)が正しいことが分る。

連成座屈すなわち P_c に対応する座屈モードは、式(36)、(46)、(49)、(50)、および(52)から、次の様に決定される。

$$u = A \sin \frac{\pi z}{l} + D \dots\dots\dots (59)$$

$$y_0 \varphi = q A \sin \frac{\pi z}{l} - D \dots\dots\dots (60)$$

ここに、 q の値は、(48)、(52)の両式から、

$$q = \frac{P_y}{P_c} - 1 > 0 \dots\dots\dots (61)$$

既に述べた様に、材料の、比例限度と降伏応力度の間の圧縮応力に相当する非線型域では、線型域での弾性係数 E および G をそれぞれに対応する接線係数で置き換えた接線係数理論が有効である。Bleich に従って⁷⁾、引張・圧縮における接線係数が τE であるとき、せん断に対してもその接線係数を τG で近似する ($0 \leq \tau \leq 1$)。上に求めた座屈荷重は P_x 、 P_y 、 P_t の一次の斉次式であり、これらがそれぞれ τE 、 τE 、 τG に比例するから、 P を P/τ で置き換えれば、上の各式はそのまま非線型域にも成立する。Fig. 2 の理論曲線はこの様にして求めたものである。

4. 考 察・結 語

当該実験の支持条件を用いて求めた前節の解 P_x 、 P_c は、結局、単純支持条件に対する解、(18)式、と同じ座屈荷重を与え、Fig. 2 にみられる様に、実験結果と良く一致している。

一方、連成座屈のモードに関しては、せん断中心の変位 u および捩れ角 φ に対する前節の解、(59)、(60)の両式が単純支持の場合のモード、(11)、(13)の両式、に比べて余分の積分定数 D を含む。しかし、 D は剛体変位を表し、座屈荷重には無関係である。実際、図心の x 方向変位は(59)、(60)の両式から*、

$$u + y_0 \varphi = \frac{P_y}{P_c} A \sin \frac{\pi z}{l} \dots\dots\dots (62)$$

となって、 D を含まない。また、 $u(z)$ 、 $\varphi(z)$ の、材端 $z=0$ に対する相対的分布は、それぞれ、関係式

$$u(z) - u(0) = A \sin \frac{\pi z}{l} \dots\dots\dots (63)$$

$$\varphi(z) - \varphi(0) = \frac{q}{y_0} A \sin \frac{\pi z}{l} \dots\dots\dots (64)$$

で表され、相対変位、相対捩れ角とも材端で零、中央で最大になることが分る。

先に触れた Fig. 3(b)の横軸は式(64)の相対捩れ角を表すもので、上端および中央断面の相対捩れ角の測定値が、 $z=l$ および $z=l/2$ における理論値にそれぞれ呼応していることが分る。油圧式球座による材端支持条件が、上下端で捩れを拘束しないものであるに拘らず、単純支持の場合と同様、捩れ角が中央で最大となるモードで座屈することが解析的に確認されたわけで、「山型鋼の座屈現象が捩れに対する境界条件に大きく左右されない」との、既報での判断に対し、本報で理論的根拠を与えた。

附 録：エネルギー原理に基づく釣合式と境界条件

本文では、釣合微分方程式(1)~(3)から出発し、直接積分によって分岐点問題の解を求めた。ここでは、エネルギー原理と変分法によって、上記釣合式を誘導し、理論解の基礎とした関係式、特に、境界条件式(23)の適用性を確認する。

圧縮力を受ける薄肉開断面部材の釣合式が、釣合状態に関する物理的考察によるほか、ポテンシャルエネルギーが停留値をとる条件からも導かれることはよく知られているところで、その定式化過程で、関連する境界条件に関する情報も得られるので都合である。山型鋼部材を対象として、以下にその概略を述べる。

* 加えて、式(48)および式(52)も利用している。

一様な圧縮応力 $\sigma = P/A$ を受け、真っ直ぐに縮んだ釣合状態から横にたわみ或は捩れた別の釣合状態に移行するときのポテンシャルエネルギーの変化量 U は、たわみ捩れることによる歪エネルギー V 、外力のなす仕事を W と書くと、

$$U = V - W \quad \text{..... (A1)}$$

である。この様な変形を微小なものと仮定し、せん断中心の主軸方向変位 u, v と捩れ角 ϕ とで表すと、2方向の曲げに伴う歪エネルギーと捩れに伴う歪エネルギーとが独立になって次式が成立する。

$$V = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI_y \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 + \frac{1}{2} EI_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 + \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right] dz \quad \text{..... (A2)}$$

任意断面において、 (x, y) なる位置にある質点がこの様な変形によって横方向に (dx, dy) だけ移動するものとする (Fig. 4 参照),

$$dx = u - \phi(y - y_0), \quad dy = v + \phi x \quad \text{..... (A3)}$$

真っ直ぐな形状のとき材軸と平行であった長さ ds の要素は、この横変位に伴って傾斜し、その x, y 及び z 軸方向への投影が、それぞれ $d(dx), d(dy), dz$ の長さであるとする。応力 σ は変化しないものと考えたと傾斜後の長さも ds で、 z 方向には変位差

$$\begin{aligned} ds - dz &= \sqrt{[d(dx)]^2 + [d(dy)]^2 + (dz)^2} - dz \\ &= \left\{ \sqrt{\left[\frac{d(dx)}{dz} \right]^2 + \left[\frac{d(dy)}{dz} \right]^2 + 1} - 1 \right\} dz \\ &\approx \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{d(dx)}{dz} \right]^2 + \left[\frac{d(dy)}{dz} \right]^2 \right\} dz \quad \text{..... (A4)} \end{aligned}$$

が生じる。外力仕事 W は、これに一様な圧縮応力 $\sigma = P/A$ 及び面積要素 dA を乗じ、断面内及び材軸方向に積分して求められる。式 (A3) を (A4) に代入し、 (x, y) 座標の原点が図心にあるゆえ断面一次モーメントが零であることを利用すると、断面内の面積積分は、

$$\sigma \left[\frac{1}{2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) A + \dot{u} y_0 \dot{\phi} A + \frac{1}{2} (I_x + I_y + y_0^2 A) \dot{\phi}^2 \right]$$

となる。ここに記号 $\dot{\cdot}$ は z に関する微分を表す。従って、

$$W = P \int_0^l \left[\frac{1}{2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \dot{u} y_0 \dot{\phi} + \frac{1}{2} r_0^2 \dot{\phi}^2 \right] dz \quad \text{..... (A5)}$$

式 (A2), (A5) を式 (A1) に代入し、未知函数 u, v, ϕ の変分に対するポテンシャルエネルギー U の第一変分をとると、

$$\delta U = \int_0^l (EI_y \ddot{u} \delta u + EI_x \ddot{v} \delta v + GJ \dot{\phi} \delta \phi - P \dot{u} \delta \dot{u} - P \dot{v} \delta \dot{v} - P y_0 \dot{u} \delta \dot{\phi} - P y_0 \dot{\phi} \delta \dot{u} - P r_0^2 \dot{\phi} \delta \dot{\phi}) dz \quad \text{..... (A6)}$$

ここで変分 δ と微分 $\dot{\cdot}$ の順序を入れ替え部分積分を実行すると、結局次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^l \{ EI_y \ddot{u} + P \ddot{u} + P y_0 \dot{\phi} \} \delta u + \{ EI_x \ddot{v} + P \ddot{v} \} \delta v + \{ P y_0 \dot{u} - GJ \dot{\phi} + P r_0^2 \dot{\phi} \} \delta \phi \} dz \\ &\quad + [EI_y \dot{u} \delta u + EI_x \dot{v} \delta v - (EI_y \dot{u} + P \dot{u} + P y_0 \dot{\phi}) \delta u - (EI_x \dot{v} + P \dot{v}) \delta v \\ &\quad - (P y_0 \dot{u} - GJ \dot{\phi} + P r_0^2 \dot{\phi}) \delta \phi]_0^l \quad \text{..... (A7)} \end{aligned}$$

u, v, ϕ の独立性を考慮し、 $\delta U = 0$ である為の必要条件として次式を得る。

$$EI_y \ddot{u} + P(\ddot{u} + y_0 \dot{\phi}) = 0 \quad \text{..... (A8)}$$

$$EI_x \ddot{v} + P \ddot{v} = 0 \quad \text{..... (A9)}$$

$$(GJ - r_0^2 P) \dot{\phi} - P y_0 \dot{u} = 0 \quad \text{..... (A10)}$$

これらが即ち本文で用いた釣合式(1)~(3)である。式 (A7) 右辺大括弧内の各項は仕事量を表しており、これらの値が境界 $z=0$ 及び $z=l$ で零となる条件は、幾何学的拘束条件

$$\delta \dot{u} = 0 \quad \text{..... (A11)}$$

$$\delta \dot{v} = 0 \quad \text{..... (A12)}$$

$$\delta u = 0 \quad \dots\dots\dots (A\ 13)$$

$$\delta v = 0 \quad \dots\dots\dots (A\ 14)$$

$$\delta \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (A\ 15)$$

または、自然境界条件

$$EI_y \ddot{u} = 0 \quad (\delta \dot{u} \neq 0) \quad \dots\dots\dots (A\ 16)$$

$$EI_x \ddot{v} = 0 \quad (\delta \dot{v} \neq 0) \quad \dots\dots\dots (A\ 17)$$

$$EI_y \ddot{u} + P(\dot{u} + y_0 \dot{\varphi}) = 0 \quad (\delta u \neq 0) \quad \dots\dots\dots (A\ 18)$$

$$EI_x \ddot{v} + P\dot{v} = 0 \quad (\delta v \neq 0) \quad \dots\dots\dots (A\ 19)$$

$$(GJ - r_0^2 P)\dot{\varphi} - P y_0 \dot{u} = 0 \quad (\delta \varphi \neq 0) \quad \dots\dots\dots (A\ 20)$$

によって満足される。尚、本文の式(28)～(30)における左辺がそれぞれ、 δu 、 δv 、 $\delta \varphi$ を乗じて対応する仕事になることから、それらが横力及び振りモーメントに等しいことも容易に理解される。

式(A 16)及び(A 17)はたわみ角が自由に生じ得る時の境界条件で、それぞれ、 $C_y = 0$ 、 $C_x = 0$ を意味している。* 同様に、式(A 20)は振れ角 φ を拘束しない時の境界条件で、せん断中心軸まわりの振りモーメント T を0と置く境界条件の妥当性が確認される。本文ではこれらと変位拘束条件(A 14)、ならびに(A 13)、(A 15)両式の線型結合 $\delta u + y_0 \delta \varphi = 0$ を採用したわけである。上記拘束条件(A 11)～(A 15)が条件 $\delta \varphi = 0$ を含まないことは、「山型鋼の様に反り抵抗のない断面部材では、反りの拘束条件 $\varphi = 0$ を使用すべきでない」という本文での主張を裏付けている。

参 考 文 献

- 1) 横尾義貫・若林 実・野中泰二郎：山型鋼の座屈実験（その1，予備実験），日本建築学会論文報告集，第69号，昭和36年10月，pp. 705-708.
- 2) 横尾義貫・若林 実・野中泰二郎：単一山型鋼の座屈耐力に関する実験的研究，日本建築学会論文報告集，第100号，昭和39年7月，pp. 34-40.
- 3) Wakabayashi, M. and T. Nonaka: On the Buckling Strength of Angles in Transmission Towers, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Vol. 15, Part 2, Nov., 1965, pp. 1-18.
- 4) 若林 実・野中泰二郎：山型鋼の座屈挙動に関する実験的研究，京大防災研究所年報，第9号，昭和41年3月，pp. 1-9.
- 5) 横尾義貫・若林 実・野中泰二郎：単一山型鋼の座屈に関する実験的研究，製鉄研究，第265号，1968年12月，pp. 1-21.
- 6) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225，1974年5月，pp. 1-15.
- 7) Bleich, F. and H.H. Bleich: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952, pp. 104-148 (Chapter III).
- 8) Timoshenko, S., P. and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1961, pp. 232-234.

* 式(31)及び(32)の左辺は、それぞれ、式(A16)及び(A17)の左辺に比べて余分の項 $P(u + y_0 \varphi)$ 及び Pu を含んでいるが、これらの値は境界条件式(21)、(22)によって材端で零となる。