

Les résolvantes des noyaux continus réels vérifiant
le principe semi-complet du maximum

Noriaki SUZUKI

(広大・理 鈴木紀明)

§1. Introduction

Soit X un espace localement compact, non-compact, séparé et dénombrable à l'infini. Nous discuterons les noyaux continus réels V sur X . Dans la théorie du potentiel, il est bien connu que le principe complet du maximum de V est une condition essentielle pour que V soit un noyau de Hunt dont le semi-groupe est sous-markovien. D'autre part, le noyau logarithmique sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ à 2 dimensions ne satisfait pas au principe complet du maximum, mais il satisfait au principe semi-complet du maximum. Donc, il semble aussi bien que les noyaux continus réels vérifiant le principe semi-complet du maximum ont propriétés intéressantes même du noyau logarithmique. En effet, dans le cas des noyaux de convolution sur un groupe localement compact, M. Itô montre que tels noyaux sont de type logarithmique s'ils vérifient une certaine condition à l'infini (voir [3] et [4]). D'autre part, dans le cas où X est un ensemble dénombrable, R. Kondo a montré un résultat analogue en utilisant la méthode probabilistique (voir [5]).

Le but de cet article est de montrer le théorème suivant:

Théorème. Soit V un noyau continu réel sur X et m une mesure de Radon positive fixée à $\text{supp}(m) = X$. Supposons les quatre conditions suivantes:

(A) V vérifie le principe semi-complet du maximum par rapport à m .

(B) Soit c une constante positive quelconque. Si, pour tous $\mu \in D^0(V^*)$ et $a \in \mathbb{R}$, $(V^* + cI)\mu \leq a m$ (resp. $(V^* + cI)\mu = 0$) sur X , alors $a \geq 0$ (resp. $\mu = 0$), où V^* est le noyau transposé de V et I est l'opérateur identique.

(C) Pour toute $f \in C_K^0(X)$, $Vf \in C_0(X)$.

(D) Pour toute $0 \neq f \in C_K^+(X)$, $\lim_{x \rightarrow \delta} Vf(x) = -\infty$, où δ est la point d'Alexandoroff de X .

Alors il existe une résolvante markovienne $(V_p)_{p>0}$ des noyaux continus sur X telle que:

(1) Pour tous $f \in C_K^0(X)$ et $p > 0$, on a

$$Vf = V_p f + p V_p f.$$

(2) La résolvante $(V_p^*)_{p>0}$ des noyaux transposés de $(V_p)_{p>0}$ est uniformément récurrente et toute la mesure invariante par rapport à $p V_p^*$ est proportionnelle à m .

(3) Pour tout $p > 0$, V_p^* est un noyaux de Hunt faiblement régulier et il existe un semi-groupe markovien $(T_t)_{t \geq 0}$, et un seul tel que, pour toute $f \in C_K(X)$, $V_p f = \int \exp(-pt) T_t f dt$.

(4) Si $\int dm = \infty$, alors, pour toute $f \in C_K^0(X)$, $\lim_{p \rightarrow 0} V_p f = Vf$ uniformément sur X .

On note que la résolvante $(V_p)_{p>0}$ est uniquement déterminée (voir la remarque 10). Dans ce cas, elle s'appelle la résolvante de V .

§2. Définitions et préliminaires

Dans cet article, m est une mesure de Radon positive fixée sur X telle que $\text{supp}(m)$, le support de m , est égale à X .

On désigne par:

$C(X)$ l'espace de Fréchet usuel des fonctions finies et continues sur

X ;

$C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues sur X à support compact;

$M(X) = C_K(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X muni de la topologie vague;

$M_K(X) = C(X)^*$ l'espace vectoriel topologique des mesures de Radon réelles sur X à support compact;

$C_0(X)$ le sous-ensemble des fonctions de $C(X)$ tendant vers 0 à l'infini;

$C^+(X)$, $C_K^+(X)$, $M^+(X)$, $M_K^+(X)$ et $C_0^+(X)$ leur sous-ensembles des éléments non-négatifs;

$$C^0(X) = \{f \in C(X); \int |f| d\mu < \infty, \int f d\mu = 0\};$$

$$M^0(X) = \{\mu \in M(X); \int d|\mu| < \infty, \int d\mu = 0\};$$

$$C_K^0(X) = C_K(X) \cap C^0(X) \text{ et } M_K^0(X) = M_K(X) \cap M^0(X).$$

Un noyau continu réel sur X (resp. un noyau de diffusion réel sur X) est, par définition, une application linéaire et continue de $C_K(X)$ dans $C(X)$ (resp. de $M_K(X)$ dans $M(X)$). Desormais, pour un noyau continu réel V (resp. un noyau de diffusion réel V^*), nous désignerons par V^* le noyau transposé de V (resp. V le noyau continu transposé de V^*) défini par

$$\int f dV^*\mu = \int V f d\mu$$

pour $f \in C_K(X)$ et $\mu \in M_K(X)$.

Posons

$$D(V^*) = \left\{ \mu \in M(X); \begin{array}{l} C_K(X) \ni f \rightarrow \int V f d\mu \text{ définit} \\ \text{une mesure de Radon} \end{array} \right\},$$

$D^0(V^*) = D(V^*) \cap M^0(X)$ et $D^+(V^*) = D(V^*) \cap M^+(X)$. Pour $\mu \in D(V^*)$, on

note $\int V f d\mu = \int f dV^*\mu$ pour toute $f \in C_K(X)$.

Définition 1. On dit que V vérifie le principe semi-complet du maximum par rapport à m (désigné par $V \in (PSM)$) si, pour $f \in C_K^0(X)$ et $a \in \mathbb{R}$ quelconques, $Vf \leq a$ sur X dès que la même inégalité a lieu sur $\text{supp}(f^+)$, où $\mathbb{R}$ désigne la droite réelle.

Définition 2. Soit V^* un noyau de diffusion sur X et $\mu \in D^+(V^*)$. On dit que μ est invariante par rapport à V^* si $V^*\mu = \mu$.

Définition 3 (voir [6], Définition 1). On dit qu'une résolvante $(V_p^*)_{p>0}^{(1)}$ est uniformément récurrente s'il existe une famille $(u_p)_{p>0} \in C^+(X)$ et $p_0 > 0$ vérifiant les quatre conditions suivantes:

- (a) $u_p > 0$ sur X pour tout $p > 0$.
- (b) $\lim_{p \rightarrow 0} u_p(x) = 0$ pour tout $x \in X$.
- (c) Pour toute $f \in C_K^+(X)$, $(u_p V_p f)_{p_0 > p > 0}$ forme une famille normale sur tout compact de X .
- (d) Pour tout $x \in X$, il existe $f \in C_K^+(X)$ telle que

$$\inf_{p_0 > p > 0} u_p(x) V_p f(x) > 0.$$

Définition 4 (voir [2], p.303-304). On dit que V^* est un noyau de Hunt faiblement régulier si:

⁽¹⁾ Une famille $(V_p)_{p>0}$ des noyaux continus (resp. $(V_p^*)_{p>0}$ des noyaux de diffusion) sur X s'appelle une résolvante si, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$V_p - V_q = (q-p) V_p V_q \quad (\text{resp. } V_p^* - V_q^* = (q-p) V_p^* V_q^*) \quad (\text{Equation résolvante})$$

On dit que $(V_p)_{p>0}$ est markovienne si, pour $p > 0$ et $x \in X$ quelconques, $p \int dV_p^* \epsilon_x = 1$, où on désigne par ϵ_x la mesure d'unité à x .

(H.1) Il existe un semi-groupe $(T_t^*)_{t \geq 0}$ ⁽²⁾ des noyaux de diffusion tel que $V^* = \int T_t^* dt$, c'est-à-dire, pour $\mu \in M_K(X)$ et $f \in C_K(X)$ quelconques, $\int f dV^* \mu = \int dt \int f dT_t^* \mu$.

(H.2) $B_m^{V^*}(\mu; \omega)$ ⁽³⁾ $\neq \emptyset$ pour tout l'ouvert ω et $\mu \in M_K^+(X)$.

(H.3) Pour $f \in C_K^+(X)$ quelconque, la plus grande fonction V-sousharmonique minorante de Vf sur X s'annule identiquement et V possède la propriété de la régularisation inférieure; c'est-à-dire, soit Ω un ouvert et u une fonction réelle et borélienne vérifiant $|u(x)| \leq Vg(x)$ avec une certaine $g \in C_K^+(X)$. Si, pour $x \in \Omega$, compact $K \subset \Omega$ et $\varepsilon'_{x,CK} \in B_m^{V^*}(\varepsilon_x; CK)$ quelconques, $u(x) \geq \int u d\varepsilon'_{x,CK}$, alors $\underline{u}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} u(y)$ est V-surharmonique dans Ω , où on désigne par ε_x la mesure d'unité à x .

Ici, une fonction réelle et borélienne sur X est dite V-surharmonique dans Ω si u est semi-continue inférieurement et si, pour tout $x \in \Omega$ et compact $K \subset \Omega$, $u(x) \geq \int u d\varepsilon'_{x,CK}$, où $\varepsilon'_{x,CK} \in B_m^{V^*}(\varepsilon_x; CK)$.

Si $-u$ est V-surharmonique dans Ω , alors u est dite V-sousharmonique dans Ω .

(2) Une famille $(T_t)_{t \geq 0}$ des noyaux continus (resp. $(T_t^*)_{t \geq 0}$ des noyaux de diffusion) sur X s'appelle un semi-groupe si $T_0 = I$, $T_t T_s = T_{t+s}$ pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ et $R \ni t \rightarrow T_t f \in C(X)$ est continue pour toute $f \in C_K(X)$ (resp. $T_0^* = I$, $T_t^* T_s^* = T_{t+s}^*$ pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$ et $R \ni t \rightarrow T_t^* \mu \in M(X)$ est continue pour toute $\mu \in M_K(X)$).

On dit que $(T_t)_{t \geq 0}$ est markovien si, pour tous $t \geq 0$ et $x \in X$ quelconques, $\int dT_t^* \varepsilon_x = 1$.

(3) Pour tout ouvert ω dans X et toute $\mu \in M_K^+(X)$, on désigne par $B_m^{V^*}(\mu; \omega)$ l'ensemble des mesures μ' vérifiant les conditions suivantes;

(B.1) $\mu' \in D^+(V^*)$ et $\text{supp}(\mu') \subset \bar{\omega}$,

(B.2) $V^* \mu' = V^* \mu$ dans ω ,

(B.3) $V^* \mu' \leq V^* \mu$ dans X .

On pose encore $B_m^{V^*}(\mu; \omega) = \{\mu' \in B_m^{V^*}(\mu; \omega); \text{pour } \nu \in D^+(V^*) \text{ vérifiant } \text{supp}(\nu) \subset \bar{\omega} \text{ quelconque, on a } V^* \mu' \leq V^* \nu \text{ dans } X \text{ dès que } V^* \mu \leq V^* \nu \text{ dans } \omega\}$.

De la même manière que dans la remarque 5 et la proposition 11 dans [3], on aura la proposition suivante:

Proposition 5. Soit $V \in (\text{PSM})$ et c une constante ≥ 0 . Alors on a:

(1) $V+cI$ vérifie le principe semi-complet du maximum transitif à V ; c'est-à-dire, pour $f \in C_K^0(X)$ et $a \in \mathbb{R}$ quelconques, $Vf \leq a$ sur X dès que $(V+cI)f \leq a$ sur $\text{supp}(f^+)$.

(2) V^*+cI vérifie le principe du semi-balayage relatif à V^* ; c'est-à-dire, pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert relativement compact $\omega \neq \emptyset$ dans X quelconques, il existe $\mu'_\omega \in M_K^+(X)$ et $a'_\omega \in \mathbb{R}$ tels que:

$$(SB.1) \quad \int d\mu'_\omega = \int d\mu.$$

$$(SB.2) \quad \text{supp}(\mu'_\omega) \subset \overline{\omega}.$$

$$(SB.3) \quad (V^*+cI)\mu'_\omega + a'_\omega m = V^*\mu \quad \text{dans } \omega.$$

$$(SB.4) \quad (V^*+cI)\mu'_\omega + a'_\omega m \leq V^*\mu \quad \text{dans } X.$$

Dans ce cas, μ'_ω (resp. a'_ω) s'appelle une mesure semi-balayée (resp. une constante semi-balayée) de μ sur ω relativement à (V^*+cI, V^*) .

§3. La preuve du théorème

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que V vérifie toutes les conditions dans le théorème.

D'abord on va construire la résolvante de V . Pour cela, la proposition suivante est essentielle.

Proposition 6. Soit $c \geq 0$. Pour $\mu \in M_K^+(X)$ et un ouvert $\omega \neq \emptyset$ dans X quelconques, il existe $\mu'_\omega \in D^+(V^*)$ et $a'_\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant (SB.1), (SB.2), (SB.3) et (SB.4).

Preuve. Soit $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ une exhaustion de ω , c'est-à-dire, $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ est une famille d'ouverts relativement compacts $\neq \emptyset$ dans X vérifiant

$\bar{\omega}_n \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega$. On connaît déjà que pour tout $n \geq 1$, il existe $\mu'_n \in M_K^+(X)$ et $a'_n \in \mathbb{R}$ tels que $\int d\mu'_n = \int d\mu$, $\text{supp}(\mu'_n) \subset \bar{\omega}_n$ et

$$(3.1) \quad \begin{cases} V*\mu = (V*+cI)\mu'_n + a'_n m & \text{dans } \omega_n \\ V*\mu \geq (V*+cI)\mu'_n + a'_n m & \text{dans } X. \end{cases}$$

(voir la proposition 5 (2)). Comme $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty} \subset M^+(X)$ est vaguement bornée, on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_n$ existe dans $M^+(X)$. Posons

$$(3.2) \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_n.$$

Alors $\text{supp}(\lambda) \subset \bar{\omega}$.

Montrons que

$$(3.3) \quad (a'_n)_{n=1}^{\infty} \text{ est bornée.}$$

Comme $V*(\mu - \mu'_n) \geq a'_n m$ sur X et $\int d\mu = \int d\mu'_n$, on voit $a'_n \leq 0$. Soit $f \in C_K^+(X)$ telle que $\int f d\mu = 1$ et $\text{supp}(f) \subset \omega_1$. Alors,

$$a'_n = \int V f d\mu - \int (V f + c f) d\mu'_n \geq \int V f d\mu - \int ((V f)^+ + c f) d\mu'_n.$$

Comme $(V f)^+ \in C_K^+(X)$ et $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a'_n > -\infty$.

On a ainsi (3.3).

Montrons que

$$(3.4) \quad (V*\mu'_n)_{n=1}^{\infty} \text{ est relativement compact dans } M(X).$$

Il suffit de montrer que $(V*\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soit $f \in C_K^+(X)$

à $\text{supp}(f) \subset \omega$; alors l'égalité $V*\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (V*cI)\mu'_n + a'_n m$ sur ω et

(3.3) montrent que $(\int f dV*\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Pour $g \in C_K^+(X)$ quelconque,

on choisit $f \in C_K^+(X)$ telle que $\text{supp}(f) \subset \omega$ et $g-f \in C_K^0(X)$. D'après la

condition (C) dans le théorème, $(\int V(g-f) d\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Ainsi

$(\int g dV*\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

Montrons

$$(3.5) \quad \lambda \in D^+(V^*).$$

Pour (3.5) il suffit de montrer que, pour un compact K dans X et $f \in C_K(X)$ à $\text{supp}(f) \subset K$ quelconques, qu'il existe une constante $c(K) > 0$ vérifiant $|\int V f d\lambda| \leq c(K) \|f\|_\infty$. Pour toute $f \in C_K^+(X)$, (3.4) donne $|\int V f d\lambda| < \infty$. On peut supposer que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Soit $f_0 \in C_K^+(X)$ à $\text{supp}(f_0) \subset K$ et $\int f_0 dm = 1$ quelconque fixée. Pour toute $f \in C_K^+(X)$ à $\text{supp}(f) \subset K$, on pose $a_f = \int f dm$. Alors $0 \leq a_f \leq m(K) \|f\|_\infty$. Comme $\text{supp}((Vf_0)^+)$ est compact, il existe une constante $M > 0$ telle que $Vf_0 \leq M$ sur X . La continuité de V implique $\max_{x \in K} |Vf(x)| \leq c_0 \|f\|_\infty$ pour toute f ci-dessus avec une constante $c_0 > 0$. En posant $M_0 = \max\{M, \max_{x \in K} |Vf_0(x)|\} m(K)$, on a

$$(3.6) \quad Vf \leq V(a_f f_0) + M_0 \|f\|_\infty + c_0 \|f\|_\infty \text{ sur } K \supset \text{supp}(f).$$

Comme $V \in (PSM)$, la même inégalité a lieu sur X , et donc

$$\int V f d\lambda \leq (2M_0 + c_0) \|f\|_\infty \int d\lambda.$$

D'autre part, (3.4) montre qu'il existe $c_1 \leq 0$ telle que $\sup_{n \geq 1} \int V f d\mu'_n \geq c_1 \|f\|_\infty$, et donc $c_1 \|f\|_\infty \leq \int V f d\lambda$, d'où (3.5).

Montrons

$$(3.7) \quad \int d\lambda = \int d\mu.$$

Evidemment $\int d\lambda \leq \int d\mu$ et l'on suppose $\int d\lambda < \int d\mu$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_n = \lambda$ et $\int d\mu'_n = \int d\mu$, il existe $\delta > 0$ telle que pour tout compact K il existe un entier $n_K \geq 1$ vérifiant

$$\int_{CK} d\mu'_n < \delta \text{ pour tout } n \geq n_K.$$

Soit $f \in C_K^+(X)$ à $\text{supp}(f) \subset \omega_1$ et à $\int f dm = 1$. Posons

$$M = \inf_{n \geq 1} \{ \int V f d\mu - \int (V f)^+ d\mu'_n - a'_n - c \int f d\mu'_n \},$$

alors $-\infty < M = \inf_{n \geq 1} \{ \int (V f - (V f)^+) d\mu'_n \} \leq 0$. On choisit un compact $K_0 \subset X$ tel que

$$K_0 \supset \text{supp}((V f)^+) \text{ et } V f < 2M/\delta \text{ sur } CK_0.$$

Dans ce cas, pour tout $n \geq n_{K_0}$,

$$M \leq \int (V f - (V f)^+) d\mu'_n \leq \int_{CK_0} V f d\mu'_n < 2M,$$

mais cela en contradiction avec $M \leq 0$, d'où $\int d\lambda = \int d\mu$.

D'après (3.3) et (3.4), on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow \infty} V^* \mu'_n$ (dans $M(X)$) et $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$ existent. Posons $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} V^* \mu'_n$ et $a' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$. Soit $g \in C_K^0(X)$ quelconque. Comme $Vg \in C_0(X)$, on a

$$\int g d\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g dV^* \mu'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int Vg d\mu'_n = \int Vg d\lambda = \int g dV^* \lambda.$$

Donc il existe une constante a_0 telle que

$$(3.8) \quad \eta = V^* \lambda + a_0 m.$$

Posons $\mu'_\omega = \lambda$ et $a'_\omega = a_0 + a'$; alors on obtient facilement que (μ'_ω, a'_ω) est un couple demandé et la proposition 6 est démontrée.

Remarque 7. (1) La condition (B) dans le théorème donne $a'_\omega \leq 0$, car $V^*(\mu - \mu'_\omega) \geq a'_\omega m$.

(2) Si $\omega = X$, alors μ'_ω et a'_ω sont déterminées uniquement.

(3) De la même manière, il existe aussi un couple analogue (μ'_ω, a'_ω) pour toute $\mu \in D(V^*) \cap M_b^+(X)$, où $M_b^+(X) = \{\mu \in M^+(X); \int d\mu < \infty\}$. Dans ce cas, μ'_ω (resp. a'_ω) s'appelle aussi une mesure semi-balayée (resp. une constante semi-balayée) de μ sur ω relativement à $(V^* + cI, V^*)$.

Dès maintenant, on construira la résolvante demandée.

Soit $p > 0$ quelconque fixé. D'après la remarque 7 (2), on définit l'opérateur linéaire

$$V_p^*: M_K(X) \ni \mu \rightarrow \frac{1}{p} \{ (\mu^+)'_{X,p} - (\mu^-)'_{X,p} \} \in M(X)$$

où $(\mu^+)'_{X,p}$ et $(\mu^-)'_{X,p}$ sont les mesures semi-balayées de μ^+ et de μ^- sur X relativement à $(V_p^* + \frac{1}{p}I, V^*)$.

Lemme 8. L'opérateur V_p^* est un noyau de diffusion sur X .

Preuve. Comme V_p^* est positif (c'est-à-dire, $V_p^*\mu \in M^+(X)$ dès que $\mu \in M_K^+(X)$), il suffit de montrer que pour $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ et $x \in X$ satisfaisant à $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ quelconques,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_p^* \varepsilon_{x_n} = V_p^* \varepsilon_x \text{ dans } M(X).$$

D'abord, on a

$$V_p^* \varepsilon_{x_n} = (pV^* + I)V_p^* \varepsilon_{x_n} + a'_n m \text{ sur } X$$

avec une constante $a'_n \leq 0$. Soit $f \in C_K^+(X)$ à $\int f dm = 1$, alors

$$a'_n = Vf(x_n) - p \int Vf dV_p^* \varepsilon_{x_n} - \int f dV_p^* \varepsilon_{x_n}.$$

Comme $(x_n)_{n=1}^\infty$ est relativement compact et $|\int f dV_p^* \varepsilon_{x_n}| \leq \frac{1}{p} \|f\|_\infty$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a'_n > -\infty$ aussi bien que dans (3.3), et donc $(a'_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.

Soit λ un point vaguement adhérent de $(V_p^* \varepsilon_{x_n})_{n=1}^\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De la même manière que dans (3.5), (3.7) et (3.8), on a aussi $\lambda \in D^+(V^*)$, $p \int d\lambda = 1$ et $V_p^* \varepsilon_x = (pV^* + I)\lambda + a' m$ avec une constante a' . Comme $V_p^* \varepsilon_x = (pV^* + I)V_p^* \varepsilon_x + a'_x m$ avec une constante $a'_x \leq 0$,

$$(pV^* + I)(\lambda - V_p^* \varepsilon_x) = (a'_x - a')m \text{ sur } X,$$

et donc, d'après la condition (B) dans le théorème, $\lambda = V_p^* \varepsilon_x$, car $\int d\lambda = \int dV_p^* \varepsilon_x = \frac{1}{p}$. Comme λ est un point vaguement adhérent de $(V_p^* \varepsilon_{x_n})_{n=1}^\infty$

quelconque, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V^* \varepsilon_p}{x_n} = \frac{V^* \varepsilon_p}{x}$. Ainsi le lemme 8 est démontré.

Lemme 9. La famille $(V^*_p)_{p>0}$ est une résolvante markovienne.

Preuve. Pour $p > 0$, $q > 0$ et $\mu \in M_K^+(X)$ quelconques, on désigne par a'_p et par a'_q les constantes semi-balayées de μ sur X relativement à $(V^* + \frac{1}{p}I, V^*)$ et à $(V^* + \frac{1}{q}I, V^*)$ respectivement. Alors,

$$\begin{aligned} & (V^* + \frac{1}{q}I)(V^*_p \mu - V^*_q \mu) \\ &= (V^* + \frac{1}{p}I)V^*_p \mu - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})V^*_p \mu - (V^* + \frac{1}{q}I)V^*_q \mu \\ &= \frac{1}{p}(V^*_p \mu - a'_p m) - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})V^*_p \mu - \frac{1}{q}(V^*_q \mu - a'_q m) \\ &= \frac{p-q}{pq}(V^*_p \mu - V^*_q \mu) + (\frac{1}{q}a'_q - \frac{1}{p}a'_p)m. \end{aligned}$$

Soit $a'_{p,q}$ une constante semi-balayée de $\frac{1}{q}V^*_p \mu$ sur X relativement à $(V^* + \frac{1}{q}I, V^*)$ (voir la remarque 7 (3)). Alors,

$$\begin{aligned} & (V^* + \frac{1}{q}I)(V^*_q V^*_p \mu) = \frac{1}{q}V^*_q V^*_p \mu + a'_{p,q} m \\ &= \frac{1}{pq}(V^*_p \mu - V^*_q \mu) - (\frac{1}{pq}a'_p - a'_{p,q})m, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & (V^* + \frac{1}{q}I)(V^*_p \mu - V^*_q \mu - (q-p)V^*_q V^*_p \mu) \\ &= (\frac{1}{q}a'_q - \frac{1}{p}a'_p + (q-p)(\frac{1}{pq}a'_p - a'_{p,q}))m \end{aligned}$$

Comme $\int dV^*_p \mu - \int dV^*_q \mu - (q-p) \int dV^*_q V^*_p \mu = 0$, on a

$$(3.9) \quad V^*_p \mu - V^*_q \mu = (q-p)V^*_q V^*_p \mu.$$

Par conséquent, $(V^*_p)_{p>0}$ est une résolvante. La markovienne de $(V^*_p)_{p>0}$ est évidente et l'on a le lemme 9.

Remarque 10. Pour tous $p > 0$ et $f \in C_K^0(X)$, l'égalité

$$(3.10) \quad V f(x) - V_p f(x) = p V_p V f(x) \quad (x \in X)$$

a lieu. En outre, la résolvante $(V_p)_{p>0}$ vérifiant (3.10) est uniquement déterminée.

Pour montrer la récurrence uniforme de $(V_p^*)_{p>0}$, on utilisera le lemme suivant.

Lemme 11. Pour $p > 0$ et $x \in X$ quelconques, $\text{supp}(V_p^* \varepsilon_x) = X$.

Preuve. Posons $X_0 = \text{supp}(V_p^* \varepsilon_x)$ pour un nombre $p > 0$. Alors, d'après l'équation résolvante (3.9), on connaît bien que $\text{supp}(V_q^* \varepsilon_x) = X_0$ pour tout $q > 0$. Comme $(q V_q^* \varepsilon_x)_{q>0}$ est vaguement bornée, il existe $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \in M^+(X)$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n V_{q_n}^* \varepsilon_x = \lambda$ dans $M(X)$.

Supposons $\lambda = 0$ et $X \neq X_0$. Soit $f \in C_K^+(X)$ quelconque et $f_0 \in C_K^+(X)$ à $\text{supp}(f_0) \subset X \setminus X_0$ et à $\int f_0 dm = 1$ fixée. Alors, $f - a_f f_0 \in C_K^0(X)$, où $a_f = \int f dm$. Donc $V(f - a_f f_0) \in C_0(X)$ donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \int V(f - a_f f_0) dV_{q_n}^* \varepsilon_x = 0.$$

En vertu de (3.10), on a

$$\infty > V(f - a_f f_0)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f - a_f f_0) dV_{q_n}^* \varepsilon_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f dV_{q_n}^* \varepsilon_x,$$

et donc $(V_{q_n}^* \varepsilon_x)_{n=1}^\infty$ est vaguement bornée. Comme

$$V f(x) - V_{q_n} f(x) = q_n \int V f dV_{q_n}^* \varepsilon_x + a'_n a_f$$

avec une constante $a'_n \leq 0$, il existe $M > -\infty$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$q_n \int V f dV_{q_n}^* \varepsilon_x > M.$$

Comme $\lambda = 0$ et $q_n \int dV_{q_n}^* \varepsilon_x = 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \int V f dV_{q_n}^* \varepsilon_x = -\infty$$

(voir la preuve de (3.7)), d'où une contradiction. On a ainsi $X_0 = X$.

Supposons $\lambda \neq 0$. Soit $f \in C_K^0(X)$ quelconque. Comme $Vf \in C_0(X)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n)^2 V_{q_n}^* \varepsilon_x = 0$, on a

$$\begin{aligned} \int f d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \int f dV_{q_n}^* \varepsilon_x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n Vf(x) - (q_n)^2 \int Vf dV_{q_n}^* \varepsilon_x) = 0, \end{aligned}$$

et donc il existe $c > 0$ telle que $\lambda = cm$. Comme $\text{supp}(V_{q_n}^* \varepsilon_x) \supset \text{supp}(\lambda) = X$, on a $X_0 = X$.

Remarque 12. Si $\int dm = \infty$, alors, pour toute $f \in C_K^0(X)$

$$(3.11) \quad \lim_{q \rightarrow 0} V_q f = Vf \quad \text{uniformément sur } X.$$

En effet, soit $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ et $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ à $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ ($q_n > 0$) quelconques. D'après (3.10), il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n V_{q_n}^* \varepsilon_{x_n} = 0$. Soit λ un point vaguement adhérent quelconque de $(q_n V_{q_n}^* \varepsilon_{x_n})_{n=1}^\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De la même façon que dans la preuve du lemme 11, on a $\lambda = cm$ avec une constante $c \geq 0$. Comme $\int d\lambda \leq 1$, $\lambda = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n V_{q_n}^* \varepsilon_{x_n} = 0$.

Lemme 13. La résolvante $(V_p^*)_{p>0}$ est uniformément récurrente.

Preuve. Soit $f_0 \in C_K^+(X)$ à $\int f_0 dm = 1$ fixée. D'après le lemme 11, on a $V_p f_0 > 0$ sur X . De plus, $V_p f_0(x)$ converge d'une manière croissante vers ∞ lorsque $p \downarrow 0$ (voir encore la preuve du lemme 11). Donc, en posant

$$(3.12) \quad u_p(x) = \frac{1}{V_p f_0(x)}$$

on obtient $(u_p)_{p>0} \subset C^+(X)$ et

$$(3.13) \quad \lim_{p \rightarrow 0} u_p = 0 \quad \text{uniformément sur tout compact dans } X,$$

d'après le théorème de Dini.

On montrera que $(u_p)_{p>0}$ est une famille des fonctions demandée. Soit $g \in C_K^+(X)$ à $\int g dm = 1$ quelconque. On va montrer que pour un compact K et $\varepsilon > 0$ quelconques, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$(3.14) \quad |u_p V_p g - u_q V_q g| < \varepsilon \text{ sur } K$$

dès que $p, q \leq r_0$. En posant $\psi = f_0 - g \in C_K^0(X)$, on a $\|V\psi\|_\infty < \infty$ et

$$\begin{aligned} & |u_p(x) V_p g(x) - u_q(x) V_q g(x)| \\ &= \left| \frac{V_p g(x) - V_p f_0(x)}{V_p f_0(x)} - \frac{V_q g(x) - V_q f_0(x)}{V_q f_0(x)} \right| \\ &\leq u_p(x) |V_p \psi(x)| + u_q(x) |V_q \psi(x)|. \end{aligned}$$

Comme $V\psi(x) - V_p \psi(x) = \int p V \psi dV_p^* \varepsilon_x$ et $\int dp V_p^* \varepsilon_x = 1$, on a $\|V_p \psi\|_\infty \leq 2\|V\psi\|_\infty$. On peut donc supposer $\|V\psi\|_\infty \neq 0$. D'après (3.13), il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $p < r_0$

$$u_p(x) < \frac{\varepsilon}{4\|V\psi\|_\infty} \text{ sur } K.$$

Par conséquent, (3.14) a lieu, et donc la condition (c) de la définition 3 est vérifiée.

Comme $u_p(x) V_p f_0(x) \equiv 1$ sur X , la condition (d) de la définition 3 est évidemment vérifiée.

Lemme 14. Soit $p > 0$ quelconque. Toute la mesure invariante par rapport à pV_p^* est proportionnelle à m .

Preuve. On remarque d'abord que $(V_q^*)_{q>0}$ est uniformément récurrente si et seulement si pV_p^* est uniformément récurrente (pour la définition, voir [6], Définition 1 (2)). En utilisant le corollaire 13 dans [6], on obtient que le cône $H(pV_p^*)$ formé par des mesures invariantes par rapport à pV_p^* est à 1 dimension, et donc il suffit de montrer que $m \in H(pV_p^*)$. Pour $g \in C_K^+(X)$ quelconque, on choisit $c_g > 0$ telle que $g \leq c_g/u_p$ sur X ,

car $u_p > 0$ sur X . Donc, pour tout $0 < q < \frac{p}{2}$, on a

$$\begin{aligned} u_p(x) V_q g(x) &\leq u_q(x) c_g \int V_p f dV_q^* \epsilon_x \\ &\leq c_g u_q(x) \frac{V_q f(x)}{p-q} \leq \frac{2c_g}{p}, \end{aligned}$$

et donc $(u_q(x) V_q^* \epsilon_x)_{p/2 > q > 0}$ est vaguement bornée. Soit λ un point vaguement adhérent de la famille ci-dessus lorsque $q \rightarrow 0$. Comme $\lim_{q \rightarrow 0} u_q(x) = 0$, de la même manière que dans la preuve au cas $\lambda \neq 0$ dans le lemme 11, on a $\lambda = m$, car $\int f_0 d\lambda = 1$. En faisant $q \rightarrow 0$ dans l'égalité

$$u_q(x) V_q^* \epsilon_x - u_q(x) V_p^* \epsilon_x = (p-q) V_p^*(u_q(x) V_q^* \epsilon_x),$$

on a $m \in D^+(V_p^*)$ et $m \geq p V_p^* m$. D'après la proposition 5 dans [6], on a $m \in H(p V_p^*)$, ce qui montre le lemme 14.

Soit $p > 0$ fixé. On montrera que V_p^* est un noyau de Hunt faiblement régulier. Pour cela, en utilisant le résultat de M. Itô ([2], p.304), il suffit de prouver que

(D.1) V_p et V_p^* vérifient le principe de domination⁽⁴⁾,

(D.2) V_p^* est non-dégénérée, c'est-à-dire, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$ quelconques, $V_p^* \epsilon_x \neq 0$ et $V_p^* \epsilon_y$ n'est pas proportionnel à $V_p^* \epsilon_x$,

(D.3) pour un fermé $F \subset X$ et $f \in C_K^+(X)$ quelconques, la fonction V -réduite $H_F^{V_p f}$ de $V_p f$ sur F est semi-continue supérieurement et

⁽⁴⁾ On dit que V_p (resp. V_p^*) vérifie le principe de domination si pour $f, g \in C_K^+(X)$ quelconques (resp. $\mu, \nu \in M_K^+(X)$ quelconques), $V_p f \leq V_p g$ sur X dès que $V_p f \leq V_p g$ sur $\text{supp}(f)$ (resp. $V_p^* \mu \leq V_p^* \nu$ dès que $V_p^* \mu \leq V_p^* \nu$ dans un voisinage de $\text{supp}(\mu)$).

$$H_{\infty}^{V_p f}(x) = \inf\{H_{CK}^{V_p f}(x); K: \text{compact}\} = 0 \text{ sur } X^{(5)}.$$

On utilisera les lemmes suivants.

Lemme 15. Le noyau V_p^* possède la propriété de convergence dominée; c'est-à-dire, pour une suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset D^+(V_p^*)$ convergeant vaguement vers $\mu \in M^+(X)$ quelconque, $\mu \in D^+(V_p^*)$ et

$$(3.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_p^* \mu_n = V_p^* \mu$$

dès qu'il existe une suite $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty} \subset M^+(X)$ et un compact $K \subset X$ vérifiant $\text{supp}(\sigma_n) \subset K$, $\int d\sigma_n \leq 1$ et $V_p^* \mu_n \leq V_p^* \sigma_n$ dans X .

Preuve. Comme $(V_q^*)_{q>0}$ est markovienne, $\int d\mu_n \leq \int d\sigma_n \leq 1$ ($n \geq 1$). En considérant $(\mu_n|_{\omega_n})_{n=1}^{\infty}$ ⁽⁶⁾ au lieu de $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$, où $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ est une certaine exhaustion de X , on peut supposer que $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset M_K^+(X)$. Donc on a

$$(3.16) \quad V_p^* \mu_n - V_p^* \mu = p V_p^*(V_p^* \mu_n) + a'_{\mu_n} m$$

avec une constante $a'_{\mu_n} \leq 0$. On peut supposer que $(V_p^* \mu_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ convergent vers $\lambda \in M_K^+(X)$ et $\sigma \in M_K^+(X)$ respectivement. Alors $\lambda \leq V_p^* \sigma$.

On montrera d'abord que

$$(3.17) \quad (a'_{\mu_n})_{n=1}^{\infty} \text{ est bornée.}$$

(5) Une fonction semi-continue inférieurement u sur X est dite V_p -sur-médiane si pour tous $x \in X$ et $\lambda \in M_K^+(X)$ vérifiant $V_p^* \lambda \leq V_p^* \epsilon_x$, on a $\int u d\lambda \leq u(x)$. On désigne par $S^+(V_p)$ l'ensemble des fonctions non-négatives et V_p -surmédianes. Pour un sous-ensemble A dans X et une fonction $g \geq 0$ sur A quelconques, on pose

$$H_A^g(x) = \inf\{u(x); u \in S^+(V_p), u \geq g \text{ sur } A\} \text{ sur } X$$

dès que $\{u \in S^+(V_p); u \geq g \text{ sur } A\} \neq \emptyset$. On dit que H_A^g est la fonction V_p -réduite de g sur A .

(6) Pour $\mu \in M(X)$ et un ensemble μ -mesurable A quelconques, on pose $\mu|_A = \mu$ sur A et $\mu|_A = 0$ sur CA .

Comme

$$(3.18) \quad V^* \sigma_n - V^*_{p,n} \sigma_n = p V^*(V^*_{p,n} \sigma_n) + a'_{\sigma_n} m$$

avec une constante $a'_{\sigma_n} \leq 0$ et $(a'_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$ est bornée aussi bien que (3.3), on a

$$V^*(\sigma_n - p V^*_{p,n} \sigma_n - \mu_n + p V^*_{p,n} \mu_n) \geq (a'_{\sigma_n} - a'_{\mu_n}) m,$$

et donc $a'_{\sigma_n} \leq a'_{\mu_n} \leq 0$, car $\int d(\sigma_n - p V^*_{p,n} \sigma_n - \mu_n + p V^*_{p,n} \mu_n) = 0$. Par conséquent, $(a'_{\mu_n})_{n=1}^{\infty}$ est aussi bornée.

On montrera ensuite que $(V^*(V^*_{p,n} \mu_n))_{n=1}^{\infty}$ est relativement compact dans $M(X)$. Soit $K \subset X$ un compact et $f_o \in C_K^+(X)$ à $\text{supp}(f_o) \subset K$ et à $\int f_o dm = 1$. Il suffit de montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute $f \in C_K^+(X)$ à $\text{supp}(f) \subset K$

$$(3.19) \quad \sup_{n \geq 1} |\int V f d V^*_{p,n} \mu_n| \leq c \|f\|_{\infty}.$$

De la même façon que dans (3.6), il existe une constante $c_o > 0$ telle que $\|V f - a_f V f_o\|_{\infty} \leq c_o \|f\|_{\infty}$, où $a_f = \int f dm$. On a donc

$$\begin{aligned} |\int V f d V^*_{p,n} \mu_n| &\leq |a_f \int V f_o d V^*_{p,n} \mu_n| + c_o \|f\|_{\infty} \int d V^*_{p,n} \mu_n \\ &\leq \|f\|_{\infty} (m(K) |\int V f_o d V^*_{p,n} \mu_n| + \frac{1}{p} c_o), \end{aligned}$$

car $0 \leq a_f \leq m(K) \|f\|_{\infty}$ et $\int d V^*_{p,n} \mu_n = \frac{1}{p} \int d \mu_n \leq \frac{1}{p}$. En posant $K_o = \text{supp}((V f_o)^+)$, on a

$$\begin{aligned} \infty &> \frac{1}{p} \|(V f_o)^+\|_{\infty} \geq \int (V f_o)^+ d V^*_{p,n} \mu_n \\ &\geq \int V f_o d V^*_{p,n} \mu_n \\ &\geq \int_{CK_o} V f_o d V^*_{p,n} \mu_n \geq \int_{CK_o} V f_o d V^*_{p,n} \sigma_n \geq -\frac{1}{p} \|(V f_o)^+\|_{\infty} + \int V f_o d V^*_{p,n} \sigma_n \\ &\geq -\frac{1}{p} \|(V f_o)^+\|_{\infty} + \frac{1}{p} \inf_{x \in K} \{V f_o(x) - V_{p,n} f_o(x) - a'_x\} \end{aligned}$$

$$\geq -\frac{1}{p} \|(Vf_0)^+\|_\infty + \frac{1}{p} \inf_{x \in K} \{Vf_0(x) - V_p f_0(x)\} > -\infty$$

car $a'_x \leq 0$, où a'_x est la constante semi-balayée de ε_x sur X relativement à $(V^* + \frac{1}{p}I, V^*)$, d'où (3.19).

D'après (3.16), (3.17) et (3.19), on peut supposer que V^*_μ converge vaguement, et donc $\mu \in D^+(V^*)$. De la même manière que dans (3.5), (3.7) et (3.8), on a $\lambda \in D^+(V^*)$, $\int dV^*_\mu = \int d\lambda$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $(V^* + \frac{1}{p}I)\lambda = (V^* + \frac{1}{p}I)V^*_\mu + a\mu$ dans X . Donc la condition (B) dans le théorème donne $\lambda = V^*_\mu$, d'où (3.15).

La condition (B) dans le théorème donnera encore le lemme suivant:

Lemme 16. Le noyau V^*_p possède la propriété de unicité, c'est-à-dire; pour toutes μ et $\nu \in D(V^*) \cap M_b^+(x)$, $\mu = \nu$ dès que $V^*_\mu = V^*_\nu$.

Lemme 17. Soit $p > 0$ fixé. Posons $U^*_q = V^*_{p+q}$ ($q > 0$). Alors, pour $\mu \in M_K^+(X)$ quelconque, on a

$$(3.20) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} qU^*_q \mu = \mu \text{ (vaguement).}$$

Preuve. Soit λ un point vaguement adhérent quelconque de $(qU^*_q \mu)_{q>0}$ lorsque $q \rightarrow \infty$. Comme

$$V^*_\mu - U^*_q \mu = qV^*U^*_q \mu \text{ et } V^*(qU^*_q \mu) \leq V^*_\mu,$$

on obtient que $V^*_\mu = \lim_{q \rightarrow \infty} V^*(qU^*_q \mu) = V^*\lambda$, en faisant $q \rightarrow \infty$ et utilisant le lemme 15, et donc le lemme 16 donne $\mu = \lambda$, d'où (3.20).

Lemme 18. Le noyau V^*_p est un noyau de Hunt faiblement régulier.

En effet, la proposition 1 et la remarque 11 dans [2] et le lemme 17 montrent que V^*_p vérifie (D.1). On a déjà montré (D.2) dans les lemme 10 et lemme 15. D'après (D.1) et le lemme 13 dans [2], V^*_p vérifie (D.3).

Lemme 19. Il existe un markovien semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ des noyaux continus d'une manière unique tel que $V_p = \int \exp(-pt) T_t dt$.

Preuve. En vertu du lemme 18, on voit l'existence et l'unicité de $(T_t)_{t \geq 0}$ (voir la proposition 13 dans [1]).

Les présents lemmes et remarques sont tous les étapes de la preuve du théorème, et le théorème est définitivement établi.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Itô: Sur les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians II, Nagoya Math. J., 75 (1979), 1-36.
- [2] M. Itô: On weakly regular Hunt diffusion kernels, Hokaido Math. J., 10 (1981) sp., 303-335.
- [3] M. Itô: Une caractérisation des noyaux de convolution réels de type logarithmique, Nagoya Math. J., (à paraître).
- [4] M. Itô: Sur le principe semi-complet du maximum pour les noyaux de convolution réels, Nagoya Math. J., (à paraître).
- [5] R. Kondo: On a construction of recurrent Markov chains, Osaka J. of Math., 6 (1969), 13-28.
- [6] N. Suzuki: Invariant measures for uniformly recurrent diffusion kernels, Hiroshima Math. J., (à paraître).