

一般の領域における Besov 空間.

京大数研 村松寿延

§ 1. 序

O. V. Besov [1] は $\mathbb{R}^n$ 上の関数空間 $B_{p,q}^{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}(\mathbb{R}^n)$ を導
 入した. $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = \sigma$ の場合が Taibleson [15] の
 Lipschitz 空間 $\Lambda(\sigma; p, q; \mathbb{R}^n)$ に一致する. 一般の領域上
 の関数については Il'in [4] が論じているが, Besov のノル
 ムを直接拡張したノルムで調べるためきわめて複雑かつせま
 い結果しか出ない. この場合われわれは座標系に依存しない
 $\sigma_1 = \dots = \sigma_n$ の場合が大切と考え, その場合について, Taibleson
 に応じたノルムによって Besov 空間を定義する. ここでは,
 Sobolev 空間, Besov 空間についてそれらの補空間を論
 じ, まる埋蔵定理, 境界値の性質などを述べる. $\mathbb{R}^n$ や半空
 間上の関数空間の場合については多くの結果が知られている.
 その時には一次元の結果から容易に n 次元の場合が導けるが,
 一般の領域のときには直接 n 次元を扱わねばならない.

以下の結果の主要部分は[8], [9]で報告した。ただし, ベクトル値関数に拡張し, また negative order の空間についても論ずる。

以後 Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合であって 円錐条件 (LT₀) を満たすものとする。すなわち, $\mathbb{R}^n$ 上の有界, 一樣連続な $\mathbb{R}^n$ -値関数 $\Psi(x)$ と $0 < T_0 \leq \infty$ とがあって, すべての $x \in \Omega$, $z \in B = \{ |z| \leq 1 \}$ $0 < t < T_0$ について, $x + tz + t\Psi(x) \in \Omega$ となる。 $\eta > 1$ ととり $T_0 \leq T_0/\eta$, $\Psi(x) \leq \eta\Psi(x)$ とかえても同じ性質をもつ。ただし, φ は C_0^∞ , $\int \varphi(y) dy = 1$, φ の支持部分とする。したがって, $\Psi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ としてよい (以下同様)。

記号 $\mathbb{R}^n$: n 次元空間, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-index, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

$\alpha \geq \beta \iff \alpha_1 \geq \beta_1, \dots, \alpha_n \geq \beta_n$. $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha-\beta)!}$ ($\alpha \geq \beta$ のとき), $= 0$ (その他).

$X, Y, X_0, Y_0, \dots$ Banach空間.

$C^m(\Omega; X)$: X -値 m 回連続的に微分可能な Ω 上の関数の空間.

$\mathcal{B}^m(\Omega; X)$: m 階までの偏導関数がすべて有界, 連続な X -値関数全体.

$L^p(M, \mu; X) = L^p(M; X)$: 測度空間 (M, μ) 上の X -値 強可測

かつ $\|f(x)\|_X$ が L^p に属する関数の空間.

$L^p(M; \mathbb{C}) \equiv L^p(M)$, $L^p(\Omega, dx; X) \equiv L^p(\Omega; X)$

$L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{-n} dx; X) \equiv L_*^p(\mathbb{R}^n; X)$, $L^p(\mathbb{R}^+, \frac{dx}{x}; X) \equiv L_*^p(\mathbb{R}^+; X)$.

$\Omega'(x'') \equiv \{x' \in \mathbb{R}^s; (x', x'') \in \Omega\}$ 5次え 切口. 又 $x'' \in \mathbb{R}^{n-s}$

$\Omega'' \equiv \{x'' \in \mathbb{R}^{n-s}; \Omega'(x'') \neq \emptyset\}$. Ω の $\mathbb{R}^{n-s}$ への射影.

$$\|f\|_{L^{p;n-s}(\Omega;X)} \equiv \operatorname{ess. sup}_{x'' \in \Omega''} \|f(x', x'')\|_{L^p(\Omega'(x''); X)}$$

$$\|f\|_{L_*^{p;n-s}(\Omega;X)} \equiv \operatorname{ess. sup}_{x'' \in \Omega''} \|f(x', x'')\|_{L^p(\Omega'(x''), |x'|^{-s} dx'; X)}$$

定義 $m \geq 0$, $1 \leq s \leq n$ を整数とする. $1 \leq p \leq +\infty$

とする. 超関数としての m 階までの偏導関数がすべて3次可測

か, $L^{p;n-s}(\Omega;X)$ に属する X -値関数の全体を $W_{p;n-s}^m(\Omega;X)$

で表わし, 次のノルムと半ノルムを導入する:

$$\|f\|_{W_{p;n-s}^m(\Omega;X)} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^{p;n-s}(\Omega;X)},$$

$$|f|_{W_{p;n-s}^m(\Omega;X)} \equiv \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha f\|_{L^{p;n-s}(\Omega;X)}.$$

$j > 0$ を整数とし, $0 < \tau < j$, $1 \leq \xi \leq +\infty$ とする.

$$|f|_{B_{p,\xi;n-s}^{m+\tau,j}(\Omega;X)} \equiv \sup_{x,y \in \mathbb{R}^{n-s}} \sum_{|\alpha|=m} \left\| \Delta_y^j D^\alpha f(x) \right\|_{L^{p,\xi}(\Omega_{j,y}(x); X)} \frac{1}{|y|^{j-\tau}} \frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^s} |y|^s dy \right)^{1/\xi}}$$

が有限となる $W_{p;n-s}^m(\Omega;X)$ の関数の全体を $B_{p,\xi;n-s}^{m+\tau,j}(\Omega;X)$

と示す. ただし, $\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(y)$. Δ_y^j は j 階

差分. $\Omega_{j,y} = \bigcup_{\nu=0}^j (\Omega - \nu y)$. $n=s$ のとき添字 $n-s$ を省く.

$0 < \tau < 1=j$ のとき $\tau=1$, $j=2$ のときが大抵であ,

る, そのときは添字 j を省く. 定理2によると,

$$B_{p, \frac{\mu}{j}}^{\mu}(\Omega; X) = B_{p, \frac{\mu}{j}}^{m+\tau, j}(\Omega; X), \quad m+\tau=\mu, \quad 0 < \tau < j.$$

である.

$S(p, \sigma, X; \varphi, \tau, Y)$: Lions-Peetre^[5]の意味の実補内空間.

$$(X, Y)_{\theta, p} \equiv S(p, \theta, X; p, \theta-1, Y). \quad (\text{Peetre の記法})$$

§2. 積分表示と近似定理.

まず, 我々の基本手段である積分表示を示し, これから近似定理を導く.

Lemma 2.1. $K(x, z) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $\text{supp } K \subset \mathbb{R}^n \times B$ とする.

Ω 上の X -値超関数 f に対して, $0 < t < T_0$, $x \in \Omega$ のとき

$$\begin{aligned} (2.1) \quad V(t, x) &\equiv \int K(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ &\equiv t^{-n} \int K(x, \frac{y-x}{t} - \Psi(x)) f(y) dy \end{aligned}$$

(最後の積分は超関数 f の $C_0^{\infty}(\Omega)$ -関数に対する値を意味する) とおくと, $V(t, x) \in C^{\infty}(\Omega)$, しかも

$$D_x^{\alpha} V(t, x) = \sum_{|\alpha| \geq j \geq 0} t^{-j} V_{j, \alpha}(t, x),$$

ただし, $V_{j, \alpha}$ は $K_{j, \alpha}$ により (2.1) の形で定義され,

$$K_{0,0} = K, \quad K_{0,\alpha} = \frac{\partial K_{0,0}}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial K_{0,0}}{\partial z_i} \quad \left(\alpha = \beta + e_k, \text{ かつ } e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0) \right),$$

$$K_{j,\alpha} = (-1)^j \sum_{|\gamma|=j} \binom{\alpha}{\gamma} D_z^{\gamma} K_{0,\alpha-\gamma}(x, z), \quad \text{特に } K_{|\alpha|,\alpha} = (-1)^{|\alpha|} D_z^{\alpha} K.$$

証明. $|\alpha|$ に関する帰納法により容易にわかる. (詳しくは [8])

Lemma 2.2. $K(x, z) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\text{supp} K \subset \mathbb{R}^n \times B$
 f を Ω 上の X -値超関数とする. $k(x) \equiv \int K(x, z) dz$.

(a) $V(t, x) \rightarrow k(x) f(x) \quad (t \rightarrow 0)$,

ただし V は (2.1) で定義, 収束は超関数として.

(b) $l > 0$ のとき,

$\int_0^T t^{l-1} V(t, x) dt$ は超関数として収束,

$\int_0^T t^{l-|\beta|-1} dt \int D_z^\beta K(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz$ も収束.

(c) $D_x^\alpha \left\{ \int_0^T t^{l-1} V(t, x) dt \right\} = \sum_{|\alpha| \geq j \geq 0} \int_0^T t^{l-j-1} V_{j, \alpha}(t, x) dt,$

ただし, $l > 0$, $V_{j, \alpha}$ は Lemma 2.1 と同じ.

(d) $k(x) f(x) = \int_0^T t^{-1} dt \int \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \{ \Psi_j(x) + z_j \} K(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz + V(T, x).$

系. $\omega(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp} \omega \subset B$, $\int \omega(z) dz = 1$,
 $l \in \mathbb{Z}$, $\omega_\alpha(x, z) \equiv \frac{1}{2^l} (z + \Psi(x))^\alpha \omega(z)$, $\omega_m(x, z) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} D_z^\alpha \omega_\alpha(x, z)$.
 このとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^m m \int_0^T t^{m-1} dt \int \sum_{|\alpha|=m} \omega_\alpha(x, z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ &\quad + \int \omega_m(x, z) f(x + Tz + T\Psi(x)) dz, \\ &= (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \int_0^T t^{m-1} dt \int K_\alpha(x, z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ &\quad + \int \omega_{m+j}(x, z) f(x + Tz + T\Psi(x)) dz, \end{aligned}$$

ただし, $K_\alpha(x, z) \equiv \binom{m+j}{|\alpha|=j} \sum_j \binom{m+j}{j}^{-1} \binom{\alpha+\gamma}{\gamma} D_z^\gamma \omega_{\alpha+\gamma}(x, z) \Big|_x$ $f^{(\alpha)} = D^\alpha f$

$$f^{(\beta)}(x) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \int t^{m-|\beta|-1} dt \int K_{j,\alpha,\beta}(x,z) f^{(\alpha)}(x+tz+t\psi(x)) dz \\ + T^{-|\beta|} \int \omega_{m+j,\beta}(x,z) f(x+Tz+T\psi(x)) dz, \quad (|\beta| \leq m)$$

ただし, $\{C_{\beta,\alpha,\gamma} \mid |\alpha|=j, |\beta|=m\}$ と, $\alpha \geq \beta, |\alpha|=m+j$ と固定 (t とし, $\sum_{\alpha+\gamma=\alpha} C_{\beta,\alpha,\gamma} = 1$ にし)

$$K_{j,\alpha,\beta}(x,z) \equiv (-1)^{|\beta|} (m+j-|\beta|) \sum_{\substack{|\gamma|=j \\ \alpha+\gamma \geq \beta}} C_{\beta,\alpha,\gamma} D_z^\gamma \omega_{\alpha+\gamma-\beta}(x,z),$$

$$\omega_{m+j,\beta} = (-1)^{|\beta|} \sum_{|\alpha| < m+j-|\beta|} D_z^{\alpha+\beta} \omega_\alpha(x,z).$$

$f \in C^m(\Omega; X)$ のときこれらの等式は関数として成立.

証明. (a). $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ とする. $1_x \equiv (x \text{ 変数に関する } 1)$.

$$\int \varphi(x) V(t,x) dx = \langle f(y) \otimes 1_x, t^{-n} K(x, \frac{y-x}{t} - \psi(x)) \varphi(x) \rangle \\ = \langle f(y), t^{-n} \int \varphi(x) K(x, \frac{y-x}{t} - \psi(x)) dx \rangle, \\ \text{(超関数に対する Fubini の定理)}$$

ただし, $\langle, \rangle$ は超関数と関数の duality を示す.

$$\psi_t \equiv t^{-n} \int \varphi(x) K(x, \frac{y-x}{t} - \psi(x)) dx$$

とおくと, $0 < t \leq t_0$ のとき, $\text{supp } \psi_t \subset M_{t_0} \equiv \bigcup_{x \in \text{supp } \varphi} C_{x,t_0}$,

$$C_{x,t_0} \equiv \{y; y = x + tz + t\psi(x), 0 < t \leq t_0, z \in B\}.$$

M_{t_0} は compact $\subset \Omega$. t_0 を十分小にとると, $0 < t \leq t_0$

のとき, $\frac{y-x}{t} - \psi(x) = u$ と変換すると, $x = y - tu - t\psi(t,y-tu)$

となり, $\partial(u_1, \dots, u_n) / \partial(x_1, \dots, x_n) = t^{-n} (1 + O(t))$, このことから

$\mathcal{D}$ の収束の意味で $\psi_t(y) \rightarrow R(y) \varphi(y) (t \rightarrow 0)$ を得る.

(b). (a)と同様にし、任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して、

$$\int \left(\int_{\varepsilon}^T t^{\ell-1} V(t, x) dt \right) \varphi(x) dx = \langle f(y), \psi_{\varepsilon}(y) \rangle,$$

$$\psi_{\varepsilon}(y) \equiv \int_{\varepsilon}^T t^{\ell-n-1} dt \int K(x, \frac{y-x}{t} - \psi(x)) \varphi(x) dx.$$

$\frac{y-x}{t} - \psi(x) = u$ ($0 < t \leq t_0$, $t_0 + \delta$) と変換すれば、 $\psi_{\varepsilon}(y)$

$\rightarrow \psi(y)$ (一樣) かわかる。公式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{\varepsilon}}{\partial y_j} &= \int_{\varepsilon}^T t^{\ell-n-1} dt \left\{ \int K(x, \frac{y-x}{t} - \psi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int \left(\frac{\partial K}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial K}{\partial z_k} \right) (x, \frac{y-x}{t} - \psi(x)) \varphi(x) dx \right\} \end{aligned}$$

に注目すれば、 $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \psi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ を得る。

(b)の第一の結論は部分積分により第一の結果に帰する。

(c). $\varepsilon \leq t \leq T$ の積分を Lemma 2.1 により微分して、
 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすればよい。(b)により (c)の右辺は収束する。

$$\begin{aligned} (d). \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) &= \int \sum_{j=1}^n (z_j + \psi_j(x)) \overbrace{f_j(x + tz + t\psi(x))}^{K(x, z)} dz \\ &= -t^{-1} \int \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \{ (z_j + \psi_j(x)) K(x, z) \} f_j(x + tz + t\psi(x)) dz \end{aligned}$$

と (a) による。ただし $f_j \equiv \partial f / \partial x_j$ 。

系の証明. $\frac{\partial}{\partial z_j} \{ (z_j + \psi_j(x)) D_z^{\alpha} K(x, z) \} = D_z^{\alpha + e_j} \{ (z_j + \psi_j(x)) K(x, z) \}$
 $- \alpha_j D_z^{\alpha} K(x, z)$. ($e_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$) に注意すると、

$$\sum_{|\alpha|=m} D_z^{\alpha} \omega_{\alpha}(x, z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \{ (z_j + \psi_j(x)) \omega_m(x, z) \}.$$

$K = \omega_m$ として (d) を適用して第一の等式を得る. 第二の等式は m を $m+j$ でおきかえ, 部分積分すればわかる. 第三の等式は f に $f^{(\beta)}$ を代入して, 部分積分するとわかる. //

Lemma 2.3. $f, \omega_\alpha, \omega_m$ は Lemma 2.2 系と同じとする. $K = \omega_m$ とおき (2.1) により $V_m(t, x)$ を定義する. このとき

$$D^\beta V_m(t, x) = \int \omega_m(x, z) f^{(\beta)}(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ + \sum_{|\beta|-1 \geq j \geq 0} t^{m-j} \int \sum_{|\alpha|=m} K_{j, \alpha, \beta}(x, z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) dz$$

第二項は

$$\sum_{|\beta|-1 \geq j \geq 0} \sum_{|\alpha|=m-k} t^{m-k-j} \int K_{j, \alpha, \beta, k}(x, z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ (K_{j, \alpha, \beta, k}(x, z) = \sum_{|\gamma|=k} D_z^\gamma H_{j, \alpha, \beta, \gamma}(x, z) \text{ の形})$$

とも表わせる.

証明. 部分積分により

$$D_j V_m(t, x) = \int \omega_m(x, z) f_j(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ + (-1)^m \sum_{|\beta|=m-1} \sum_{k=1}^n t^m \int \frac{\partial \Psi_k(x)}{\partial x_j} \omega_\beta(x, z) f^{(\beta+e_j)}(x + tz + t\Psi(x)) \frac{dz}{dz}$$

が示され, これに Lemma 2.1 を適用すれば, $|\beta|$ に関する帰納法により証明が終る. 後半は部分積分による. //

Lemma 2.4. $H_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $|\alpha| = j-1$, $\text{supp } H_\alpha \subset \mathbb{R}^n \times B$ $\int H_\alpha(x, z) dz = 0$, $K(x, z) = \sum_{|\alpha|=j-1} D_z^\alpha H_\alpha(x, z)$ とする. このとき次の性質をもつ $C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ の関数 $\tilde{K}(x, z, w)$ が存在する.

$$\text{supp } \tilde{K} \subset \mathbb{R}^n \times B \times (2j-1)B,$$

$$\begin{aligned} V(t, x) &\equiv \int K(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz, \\ &= \iint \tilde{K}(x, z, w) \Delta_{(t/j)(w-z)}^j f(x + tz + t\Psi(x)) \underbrace{dz dw}_{dz dw}. \end{aligned}$$

さらに, K が $\Omega \times \mathbb{R}^n$ でその導関数も含めて有界ならば, $\tilde{K}$ も $\Omega \times \mathbb{R}^{2n}$ で同様な性質をもつ. ただし, Ψ を $(2j-1)\Psi$ でおきかえる.

証明. 略 ([8] を参照).

Lemma 2.5. $0 < \tau < j$, $0 < \sigma < i$ のとき, $\tau > \sigma$ ならば $B_{p, \frac{j}{j-\tau}}^{\tau, j}(\Omega; X) \subset B_{p, \frac{j}{j-\sigma}}^{\sigma, i}(\Omega; X)$. 埋め込みは連続.

定理 1. (近似定理). $1 \leq p < \infty$ とする. Ω の近傍で C^∞ の関数全体を $C^\infty(\bar{\Omega}; X)$ で表す.

$C^\infty(\bar{\Omega}; X) \cap W_p^m(\Omega; X)$ は $W_p^m(\Omega; X)$ で稠密.

$C^\infty(\bar{\Omega}; X) \cap B_{p, \frac{j}{j-\tau}}^{m+\tau, j}(\Omega; X)$ は $B_{p, \frac{j}{j-\tau}}^{m+\tau, j}(\Omega; X)$ で稠密.

証明. Lemma 2.2 系の ω_m を K として (2.1) に代入して, $V_m(t, x)$ を定義する. $\eta > 1$ をとり Ψ を $\eta\Psi$ でおきかえる. $V_m(t, x) \in C^\infty(\bar{\Omega}; X)$ である. なんとなれば, 任意の $x_0 \in \partial\Omega$, $|x - x_0| < \delta$ とする. $\exists x_1 \in \Omega$; $|x - x_1| < \delta$ である. $x + tB + t\Psi(x) \subset x_1 + tB + (L\delta t + \delta)B + t\Psi(x_1) \subset \Omega$. ただし, L は Ψ の Lipschitz 定数とし, $\delta \leq \eta \geq 1 + L\delta + \delta/t$ にとる. 故にこのような x で $V_m(t, x)$ は定義され C^∞ .

さて, $|y| \rightarrow 0$ のとき $\|f(x+y) - f(x)\|_{L^p(\Omega; X)} \rightarrow 0$ が

$f \in L^p(\Omega; X)$ で成立するから, Lemma 2.3 により $f \in W_p^m$ のとき, この空間の収束の意味で $V_m(t, x) \xrightarrow{(t \rightarrow 0)} f(x)$ となる.

Besov 空間の場合. Lemma 2.1 により $m=0$ の場合を示せばよいことがわかる. $V_{m+j}(t, x) \rightarrow f$ を示すのである.

$V_j(t, x) \rightarrow f$ in L^p は既知であるから,

$$(*) \quad \int \| \Delta_y^j (V_j(t, x) - f(x)) \|_{L^p(\Omega_{j,y}; X)}^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{|y|^{n+\tau \frac{3}{2}}} \rightarrow 0$$

を示せばよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をえらび,

$$\int_{|y| \leq \delta} \| \Delta_y^j f(x) \|_{L^p(\Omega_{j,y})}^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{|y|^{n+\tau \frac{3}{2}}} < \varepsilon$$

である. Lemma 2.5 により $f \in B_{p, \frac{3}{2}}^{\sigma, 1}(\Omega; X)$ ($0 < \sigma < \tau, 1$) であるから,

$$\begin{aligned} \| \Delta_y^j (V_j(t, x) - f(x)) \|_{L^p(\Omega_{j,y}; X)} &\leq 2^j \| V_j(t, x) - f(x) \|_{L^p(\Omega; X)} \\ &\leq C_1 \int_{bB} F_1(tz) dz \quad (b = \sup_x |\Psi(x)| + 1) \\ &\leq C_2 t^\sigma |f|_{B_{p, \frac{3}{2}}^{\sigma, 1}(\Omega; X)} \end{aligned}$$

故に (*) の左辺の $|y| \geq \delta$ における積分は

$$C_2^{\frac{3}{2}} \delta^{-\tau} t^{\sigma \frac{3}{2}} |f|_{B_{p, \frac{3}{2}}^{\sigma, 1}(\Omega; X)}$$

で評価され $t \rightarrow 0$ で 0 に近づく. $|y| \leq \delta$ の部分を考える.

V_j の定義から, $B_i \equiv (B - \Psi(x + jy)) \cup \dots \cup (B - \Psi(x + iy))$

とおくとき, 公式,

$$\Delta_y^j (f \cdot g)(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \Delta_y^{j-i} f(x+iy) \cdot \Delta_y^i g(x)$$

により

$$\|\Delta_y^j V_j(t, x)\|_X \leq C_1 \sum_{i=0}^j \int_{B_i} \|\Delta_y^i f(x+tz)\|_X dz \cdot |y|^{j-i}$$

また, $\left\| \int_{B_i} \|\Delta_y^i f(x+tz)\|_X dz \right\|_{L^p(\Omega_{j,y})} \leq (j-i) a b^n F_i(y)$

ただし $F_i(y) \equiv \|\Delta_y^i f(x)\|_{L^p(\Omega_{j,y}; X)}$

であるから

$$\|\Delta_y^j V_j(t, x)\|_{L^p(\Omega_{j,y}; X)} \leq C_2 \sum_{i=0}^j |y|^{j-i} F_i(y)$$

$i=0$ の項の $\sum$ の $|y| \leq \delta$ での積分は明らかに $O(\delta^{(j-\tau)/2})$.

$j > i \geq 1$ とする. $i > \sigma > \tau - j + n$ に σ をとる.

$$\int_{|y| \leq \delta} \left\{ |y|^{j-i-\tau} F_i(y) \right\}^3 |y|^{-n} dy \leq \|f\|_{B_{p,3}^{\sigma,i}}^3 \cdot \delta^{(j-i+\sigma-\tau)/2}$$

($\because f \in B_{p,3}^{\sigma,i}$)

$i=j$ の項は

$$\int_{|y| \leq \delta} F_j(y)^3 |y|^{-\tau/2-n} dy = o(\delta) \quad (\because F_j(y) |y|^{-\tau/2} \in L_+^3)$$

故に, (*) の左辺の $|y| \leq \delta$ での積分は $o(\delta)$. ///.

Lemma 2.5 はこの定理の前半および次の節の Lemma 3.3 (B)(i) を使って証明される.

注意. われわれは Ω について円錐条件を仮定していたが, $C(\bar{\Omega}; X)$ を $C^\infty(\Omega; X)$ とするときには 任意の開集合 Ω で定理が成立する ([8] 定理 1.2).

§ 3. 基本不等式と補間不等式.

補間不等式, 補間定理, 埋蔵定理の基礎になるのは次の不等式である. 準備としてまず

Lemma 3.1. $(M_1, \mu_1), (M_2, \mu_2)$ を σ -有限測度空間, $K \in \mu_1 \times \mu_2$ -可測かつ

$$\left\{ \int_{M_1} |K(x, y)|^r d\mu_1(x) \right\}^{1/r} \leq C_1 \quad \text{a.e } y \text{ in } M_2,$$

$$\left\{ \int_{M_2} |K(x, y)|^r d\mu_2(y) \right\}^{1/r} \leq C_2 \quad \text{a.e } x \text{ in } M_1.$$

とする. このとき K を核とする積分作用素は $L^p(M_1; X)$ から $L^q(M_2; X)$ への有界線型作用素であって, そのノルムは $C_1^{1-r/q} C_2^{r/q}$ をこえない. ただし $1/p - 1/q + 1/r = 1, 1 \leq p, q, r \leq \infty$.

系.

$$\int_{M_1} |K(x, y)| d\mu_1(x) \leq C_1 \quad \text{a.e } y \text{ in } M_2,$$

$$\int_{M_2} |K(x, y)| d\mu_2(y) \leq C_2 \quad \text{a.e } x \text{ in } M_1,$$

$$|K(x, y)| \leq C_3$$

ならば Lemma の結論が $1 \leq p \leq q \leq \infty$ のとき成立する.

次の二つの Lemma が基本不等式である.

Lemma 3.2. $1 \leq s \leq n, 1 \leq p \leq q \leq \infty, 1 \leq \xi, \eta \leq \infty, \lambda = n/p - s/q$.

(A). $0 < t, T < T_0, f \in L^p(\Omega)$ とする.

$$U_0(t, x) \equiv \int_B |f(x + tZ + t\Psi(x))| dZ.$$

以下, C は f, t, T に独立な定数を示す. 次の不等式が成立す.

$$(i) \quad \|U_0(t, x)\|_{L^{q; n-s}(\Omega)} \leq C t^{-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

$$(ii) \left\| \left\{ \int_0^T [t^\xi U_0(t, x)]^\xi \frac{dt}{t} \right\}^{1/\xi} \right\|_{L^{p, n-s}(\Omega)} \leq C T^{\xi-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

ただし, $\xi \leq q, \lambda \geq \lambda$ かつ (a) $\lambda > \lambda$ または (b) $1 < p < q < +\infty, \xi < q$.

$$(iii) \sup_{\substack{x'' \in \mathbb{R}^{n-s}}} \left\| \int_0^T \|t^\xi U_0(t, x)\|_{L^p(\Omega'(x))}^\eta \frac{dt}{t} \right\|^{1/\eta} \leq C T^{\xi-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

ただし $\lambda \geq \lambda$, かつ 次のいずれかが満たされているとする:-

(a) $\lambda > \lambda$, (b) $1 < p < q \leq \infty, \eta \geq p$, (c) $s < n, 1 < p \leq \eta \leq \infty$, (d) $\eta = +\infty$

$$(iv) \sup_{x'', y'' \in \mathbb{R}^{n-s}} \left\| \left\{ \|U_0(t, x) h\left(\frac{|y|}{t}\right)^k t^\xi |y|^{-\sigma} \|_{L_*^\xi([0, T])} \right\} \right\|_{L^p(\Omega'(x))}^\eta \|_{L^\eta(\mathbb{R}^s, |y|^{-s} dy)} \\ \leq C T^{\xi-\sigma-\lambda} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

ただし, $\xi \leq q, 0 < \sigma < k, \lambda \geq \sigma + \lambda, h(t) = \min(t, 1)$ とし, 次のいずれかが満たされているとする:- (a) $\lambda > \sigma + \lambda$; (b) $1 < p < q < \infty, \xi \leq n, p \leq \eta$;

(c) $s < n, \xi \leq q, 1 < p \leq q < \infty, p \leq \eta$; (d) $\eta = +\infty$.

(B). $0 < \tau < j, 0 < \sigma < k, f \in B_{p, \xi}^{\tau, j}(\Omega; X)$ に対して,

$$U_j(t, x) \equiv \int_B dz \int_{(2j-1)B} \left\| \Delta_{(t/j)(w-z)}^j f(x+tz+t\Psi(x)) \right\|_X \frac{dw}{dw}$$

とおくと, $(\Psi \in (2j-1)\Psi$ で置きかえる) 次の不等式が成立する:

$$(i) \|U_j(t, x)\|_{L^{p, n-s}(\Omega)} \leq C_1 t^{-\lambda} \int_{2B} F_j(tz) dz \leq C t^{\tau-\lambda} \|f\|_{B_{p, \xi}^{\tau, j}(\Omega; X)}$$

ただし, $0 < (2j-1)t < T_0, F_j(y) \equiv \|\Delta_y^j f(x)\|_{L^p(\Omega_j, y; X)}$.

以下 $0 < (2j-1)T < T_0$, C は T, f に独立な定数とする.

$$(ii) \left\| \left[\int_0^T \{t^\ell U_j(t, x)\}^\eta \frac{dt}{t} \right]^{1/\eta} \right\|_{L^{\xi, n-s}(\Omega)} \leq C T^{\ell+\tau-\lambda} |f|_{B_{p, \xi}^{\tau, j}(\Omega; X)}$$

ただし, $\ell+\tau \geq \lambda$, $\eta \leq \xi$ かつ, (a) $\ell+\tau > \lambda$ 或 (b) $p < q < \infty, \xi \leq q$,
 或 (c) $\xi \leq \eta$.

$$(iii) \left\{ \int_0^T \|t^\ell U_j(t, x)\|_{L^{\xi, n-s}(\Omega)}^\eta \frac{dt}{t} \right\}^{1/\eta} \leq C T^{\ell+\tau-\lambda} |f|_{B_{p, \xi}^{\tau, j}(\Omega; X)}$$

ただし, $\ell+\tau \geq \lambda$ かつ (a) $\ell+\tau > \lambda$ 或 (b) $\xi \leq \eta$.

$$(iv) \left\| \left\{ \|U_j(t, x)\|_{L^{\xi, n-s}(\Omega)}^p \left(\frac{|y|}{t}\right)^k |y|^{-\sigma} t^\ell \right\} \right\|_{L_*^{\eta, n-s}(\mathbb{R}^n; L_*^r([0, T])} \\ \leq C T^{\ell+\tau-\sigma-\lambda} |f|_{B_{p, \xi}^{\tau, j}(\Omega; X)}$$

ただし, (a) $\ell+\tau > \sigma+\lambda$ 或 (b) $\ell+\tau \geq \sigma+\lambda$, $\xi \leq \eta$, $r \leq \eta$.

証明. (A)(i)の注. Ω の外で $f=0$ とおく. $b \equiv \sup |\Psi(x)| + 1$.

$$U_0(t, x) \leq \int_{bB''} dZ'' \int_{bB'} |f(x'+tZ', x''+tZ'')| dZ'$$

また:

$$\int_{bB'} |f(x'+tZ', x''+tZ'')| dZ' \leq [a'b^s]^{1-1/p} t^{-s/p} g(x''+tZ''), \quad (\text{Hölder's 不等式})$$

ただし, $g(x'') = \|f(x', x'')\|_{L^p(\Omega'(x''))}$, a', a'' は単位球 B', B'' の体積.

ゆえに

$$\int_{\Omega'(x'')} \left\{ \int_{bB'} |f(x'+tZ', x''+tZ'')| dZ' \right\}^p dx'' \\ \leq [(a'b^s)^{1-1/p} t^{-s/p} g(x''+tZ'')]^{p-p} (a'b^s)^{p-1} \int_{\Omega'(x'')} \int_{bB'} |f(x'+tZ', x''+tZ'')|^p dx' dZ'', \\ \leq [a'b^s]^{p-(p-p)/p} t^{p(\frac{s}{p}-\frac{s}{p})} g(x''+tZ'')^p.$$

したがって, 7 Jessen の不等式 ($p \leq q$ のとき $\|f(x, y)\|_{L_x^p} \left\{ \|f(x, y)\|_{L_y^q} \right\}^{p/q} \leq \|f(x, y)\|_{L_x^p}^{p/q} \|f(x, y)\|_{L_y^q}^{p/q}$)

$$(3.1) \|U_0(t, x)\|_{L^q(\Omega'(x''))} \leq [a'b']^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} t^{\frac{s}{q}-\frac{s}{p}} \int_{bB''} g(x''+tz'') dz''.$$

これから, Hölderの不等式を使って (i) を得る.

(A) (iii) の証. $l > \lambda$ (or $l > \lambda + \tau$) のとき (ii) (iii) (or (iv)) は (i) より直ちにえられる. 故に, $l = \lambda$ (or $l = \lambda + \tau$) として

(b) 以下の場合を示せば十分である. (Oklomder [1], O'Neil [2], Peetre [4] の主張による.)

(b) $1 < p < q \leq \infty$, $l = \lambda$ のとき. $1 \leq p_1 < p < p_2 \leq q$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ にとる. $f \in L^{(p, \eta)}(\Omega)$ のとき,

$$f(x) = v(t, x) + w(t, x) \quad \text{a.e. } t$$

$$t^{x_0} v(t, x) \in L_*^\eta(\mathbb{R}^+; L^{p_1}(\Omega)), \quad t^{x_0 - x} w(t, x) \in L_*^\eta(\mathbb{R}^+; L^{p_2}(\Omega))$$

と表わされる. (i) により

$$\|t^l U_0(t, x)\|_{L^{q; n-s}(\Omega)} \leq C_1 t^{l-\frac{n}{p_1}+\frac{s}{q}} \|v(t, x)\|_{L^{p_1}(\Omega)} + C_1 t^{l-\frac{n}{p_2}+\frac{s}{q}} \|w(t, x)\|_{L^{p_2}(\Omega)}$$

$x \equiv -\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2}$ とすると, $l - \frac{n}{p_1} + \frac{s}{q} = x\theta$, $l - \frac{n}{p_2} + \frac{s}{q} = x(\theta-1)$. 故に,

$$\|[\|t^l U_0(t, x)\|_{L^{q; n-s}(\Omega)}]\|_{L_*^\eta([0, T])}$$

$$\leq C_1 \{ \|t^{x_0} v(t, x)\|_{L_*^\eta(\mathbb{R}^+; L^{p_1}(\Omega))} + \|t^{x_0 - x} w(t, x)\|_{L_*^\eta(\mathbb{R}^+; L^{p_2}(\Omega))} \}.$$

右辺の $\{\dots\}$ の v, w の選び方による $\inf$ は $\text{const.} \|f\|_{L^{(p, \eta)}}$ で評価され, 特に $p \leq q$ ならば $L^{(p, \eta)} \supset L^p$ となり (iii) を得る.

(c) $s < n$, $1 < p \leq q$, $\lambda = l$ の場合. (3.1) により,

$T < t$ で $U_0(t, x) = 0$ とおくと,

$$\begin{aligned} \|\{U_0(t, x)t^\ell\}\|_{L^q(\Omega'(x''))} \|_{L^q_*(R^+)} &\leq C \|t^{+\frac{n}{p}-\frac{s}{p}} \int_{bB''} g(x''+tz'') dz''\|_{L^q_*(R^+)} \\ &= C \| \int K\left(\frac{|u''|}{t}\right) g(x''+u'') \frac{du''}{|u''|^{n-s}} \|_{L^q_*(R^+)} \end{aligned}$$

ただし, $K(\zeta) = \zeta^{(1-1/p)(n-s)}$ ($0 \leq \zeta \leq \beta$), その他 $K(\zeta) = 0$.

核 $K(|u''|/t)$ の積分作用素に Lemma 3.1 を適用して 結論を得る.

(d): $\eta = +\infty$ のとき (i) より 直ちにわかる.

(A)(ii) の証明. (b) $1 < p < q < \infty$, $\ell = \lambda$ のときをいう. $\tau < t$ で $U_0(t, x) = 0$ と定め, $u(t, x) = [t^\ell U_0(t, x)]^\xi$ とおく. x'' を fix しておく. $1 - \tau/q = \theta$ にとる. $\chi_\xi = -\frac{s}{\tau}$ に χ をきめる. (iii) より

$$\|\{t^{\chi\theta} u(t, x)\}\|_{L^{q/\xi}(\Omega'(x''))} \|_{L^{q/\xi}_*(R^+)} \leq [C \|f\|_{L^p(\Omega)}]^\xi$$

$$\|\{t^{\chi(\theta-1)} u(t, x)\}\|_{L^\infty(\Omega'(x''))} \|_{L^{q/\xi}_*(R^+)} \leq [C \|f\|_{L^p(\Omega)}]^\xi$$

故に

$$\left\| \int_0^\infty u(t, x) \frac{dt}{t} \right\|_{(L^{q/\xi}(\Omega'(x'')), L^\infty(\Omega'(x''))), \theta, q/\xi} \leq [C \|f\|_{L^p(\Omega)}]^\xi$$

$(L^{q/\xi}(\Omega'(x'')), L^\infty(\Omega'(x''))), \theta, q/\xi = L^{q/\xi}(\Omega'(x''))$ 故 (iii) を得る.

(A)(iv) の証明. $\ell = \sigma + \lambda$, $\xi \leq \eta$ の場合を考えればよい. $\xi \leq q$ 故, L^q_* と L^q とのノルムをとる順序をかえる. 核 $\{h(|y|/t) |y|^{-\sigma} t^\sigma\}^\xi$ による積分作用素は $L^{q/\xi}(R^+, \frac{dt}{t}) \rightarrow L^{q/\xi}(R^s, \frac{dy'}{|y'|^s})$ の線形, 有界作用素, かつそのノルムは y'' に独立な定数で評価できることが Lemma 3.1 により わかり, (iv) は (iii) に帰する. (B) の証明も同様. (もとより).

Lemma 3.2 と Lemma 2.1, Lemma 2.4 を組合せて,

Lemma 3.3. $K(x, z) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\text{supp } K \subset \mathbb{R}^n \times B$ とし,

(2.1) により $V(t, x)$ を定義する. $0 < \tau < j$, $0 < \sigma < i$, $1 \leq s \leq n$, j, i, s は整数, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 \leq \xi, \eta \leq \infty$, $\lambda = n/p - s/q$ とする. $k, m \geq 0$ は整数とすると. $0 < t, T < T_0$ にとる.

$$g_{l, T}(x) \equiv \int_0^T t^l V(t, x) \frac{dt}{t}$$

とする. $\sqrt[n]{K}(x, z) = \sum_{|\alpha|=N} D_z^\alpha H_\alpha(x, z)$, $\text{supp } H_\alpha \subset \mathbb{R}^n \times B$, $H_\alpha \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^m)$

(A) $f \in W_p^m(\Omega; X)$ ($W_p^0 = L^p$ とする), $m \leq N$ のとき 次の不等式成立:—

$$(i) |V(t, x)|_{W_{q; n-s}^k(\Omega; X)} \leq C(1+t^{-k})t^{m-\lambda} |f|_{W_p^m(\Omega; X)},$$

$$(ii) |V(t, x)|_{B_{q, \eta; n-s}^{k+\sigma, i}(\Omega; X)} \leq C(1+t^{-\sigma-k})t^{m-\lambda} |f|_{W_p^m(\Omega; X)},$$

$$(iii) |g_{l, T}(x)|_{W_{q; n-s}^k(\Omega; X)} \leq C(1+T^k)T^{l+m-k-\lambda} |f|_{W_p^m(\Omega; X)},$$

ただし, $l+m \geq k+\lambda$ かつ, (a) $l+m > k+\lambda$ or (b) $1 < p < q < \infty$.

$$(iv) |g_{l, T}(x)|_{B_{q, \eta; n-s}^{k+\sigma, i}(\Omega; X)} \leq C(1+T^{k+\sigma})T^{l+m-k-\sigma-\lambda} |f|_{W_p^m(\Omega)},$$

ただし, $l+m \geq k+\sigma+\lambda$ かつ, 次のいずれかが成立:—

(a) $l+m > k+\sigma+\lambda$, (b) $1 < p < q \leq \infty$, $p \leq \eta$, (c) $1 < p \leq \eta \leq \infty$, $s < n$, (d) $\eta = +\infty$.

$$(v) \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^{n-s} \\ \mathbb{R}^{n-s}}} \left\{ \int_0^T |t^l V(t, x)|_{W_{q; n-s}^k(\Omega(x))}^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \leq C(1+T^k)T^{l+m-k-\lambda} |f|_{W_p^m(\Omega)},$$

ただし, $l+m \geq k+\lambda$ かつ次のいずれかが成立すると仮定する:-

(a) $l+m > k+\lambda$; (b) $1 < p < q \leq \infty$, $r \leq q$; (c) $s < n$, $1 < p \leq r$; (d) $r = +\infty$.

$$(vi) \sup_{x'' \in \mathbb{R}^{n-s}} \left\{ \int_0^T t^q |V(t, x)|_{B_{q, \eta}^{k+\sigma, j}(\Omega(x''); X)}^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \leq C \left((1+T^{k+\sigma}) T^{l+m-k-\sigma-\lambda} \|f\|_{W_p^m(\Omega)} \right),$$

ただし, $l+m \geq k+\sigma+\lambda$ かつ次のいずれかが成立すると仮定する:-

(a) $l+m > k+\sigma+\lambda$; (b) $1 < p < q \leq \infty$, $r \leq p$; (c) $s < n$, $1 < p \leq r$; (d) $r = +\infty$.

(B) $f \in B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)$, $m+j \leq N$, $0 < T < T_0/(2j-1)$ のとき, 次の不等式が成立する:-

$$(i) |V(t, x)|_{W_{q, n-s}^k(\Omega; X)} \leq C (1+t^{-k}) t^{m+\tau-\lambda} \|f\|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)},$$

$$(ii) |V(t, x)|_{B_{q, \eta, n-s}^{k+\sigma}(\Omega; X)} \leq C (1+t^{-k-\sigma}) t^{m+\tau-\lambda} \|f\|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)},$$

$$(iii) |g_{l, T}(x)|_{W_{q, n-s}^k(\Omega; X)} \leq C (1+T^k) T^{m+\tau-k-\lambda+l} \|f\|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)},$$

ただし, $m+\tau+l \geq k+\lambda$ とし, 次のいずれかを仮定する:-

(a) $m+\tau+l > k+\lambda$; (b) $\xi \leq q < \infty$, $p < q$; (c) $\xi = 1$.

$$(iv) |g_{l, T}(x)|_{B_{q, \eta, n-s}^{k+\sigma}(\Omega; X)} \leq C (1+T^{k+\sigma}) T^{l+m+\tau-k-\sigma-\lambda} \|f\|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)},$$

ただし, $l+m+\tau \geq k+\sigma+\lambda$ かつ (a) $l+m+\tau > k+\sigma+\lambda$ 或 (b) $\xi \leq \eta$.

$$(v) \left[\int_0^T \left\{ t^q |V(t, x)|_{W_{q, n-s}^k(\Omega; X)}^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \right] \leq C (1+T^k) T^{l+m+\tau-k-\lambda} \|f\|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)},$$

ただし, $l+m+\tau \geq k+\lambda$ の $l+m+\tau \geq k+\lambda$, $\xi \leq \Gamma$ とする.

$$(vi) \left\{ \int_0^T |t^l V(t, x)|_{B_{p, \xi}^{k+\sigma, i}(\Omega; X)}^r \frac{dt}{t} \right\}^{1/r} \leq C(1+T^{k+\sigma}) T^{l+m+\tau-k-\sigma-\lambda} |f|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}},$$

ただし, $l+m+\tau \geq k+\sigma+\lambda$ の $l+m+\tau \geq \lambda+k+\sigma$, $\xi \leq \eta$, $\Gamma \leq \eta$ とする.

この Lemma を $n=5$, $p=q$, $\xi=\eta$ の場合に適用し, Lemma 2.2 系の積分表示を使えば次の定理を得る:

定理 2. (補間不等式) $f \in W_p^m(\Omega; X)$, $0 < T < T_0$ に対して

$$T^k |f|_{W_p^k} \leq C \{ T^m |f|_{W_p^m} + \|f\|_{L^p} \} \quad (0 \leq k \leq m \text{ のとき})$$

$$T^{k+\sigma} |f|_{B_{p, \eta}^{k+\sigma, i}} \leq C \sqrt{(1+T^\sigma)} \{ T^m |f|_{W_p^m} + \|f\|_{L^p} \} \quad (0 < k+\sigma < m, 0 < \sigma < i)$$

$$T^m |f|_{B_{p, \infty}^{(m-k)+k, i}} \leq C(1+T^k) \{ T^m |f|_{W_p^m} + \|f\|_{L^p} \} \quad (0 < k < i, k \leq m)$$

ただし, m, k, i は整数である.

(B). $f \in B_{p, \xi}^{m+\tau, j}(\Omega; X)$ と $0 < T < T_0/(2j-1)$ ($0 < \tau < j$) のとき,

$$T^k |f|_{W_p^k} \leq C \{ T^{m+\tau} |f|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}} + \|f\|_{L^p} \} \quad (0 \leq k < m+\tau),$$

$$T^{k+\sigma} |f|_{B_{p, \xi}^{k+\sigma, i}} \leq C(T^\sigma+1) \{ T^{m+\tau} |f|_{B_{p, \xi}^{m+\tau, j}} + \|f\|_{L^p} \} \quad (0 < k+\sigma \leq m+\tau),$$

特に $\xi=1$ のとき,

$$T^m |f|_{W_p^m} \leq C (T^m |f|_{B_{p, 1}^{(m-k)+k, j}} + \|f\|_{L^p}) \quad (0 < k \leq m),$$

m, k, j, i は整数である.

ここに C は f, T に独立な定数. $(\Omega; X)$ を省略しな.

特に, $\lambda = m + \tau$ とおくと, $B_{p, \frac{\tau}{\lambda}}^{m+\tau, \delta}(\Omega; X) = B_{p, \frac{\tau}{\lambda}}^{\lambda}(\Omega; X)$.

$\lambda > m > \lambda''$ のとき $B_{p, \frac{\lambda}{\lambda''}}^{\lambda}(\Omega; X) \subset W_p^m(\Omega; X) \subset B_{p, \frac{\lambda}{\lambda''}}^{\lambda''}(\Omega; X)$,

また, $B_{p, 1}^m(\Omega; X) \subset W_p^m(\Omega; X) \subset B_{p, \infty}^m(\Omega; X)$.

§ 4. 補間定理.

この § では $X, X_0, X_1 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ は Banach 空間とする.

Lemma 3.3 および簡単な計算により,

Lemma 4.1. $0 < T < T_0/3$, $M(x, z) \equiv m \sum_{|a|=m} D_z^a \omega_a(x, z)$,

$$u(t, x) \equiv \begin{cases} \int M(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz, & (0 < t \leq T), \\ m T^m t^{-m} \int \omega_m(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz, & (T < t). \end{cases}$$

このとき, $E: f \mapsto u$ は $L^1(\Omega; \mathcal{X}) + L^\infty(\Omega; \mathcal{X}) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{X})$

として線形, 連続, しかも $0 < \theta < 1$ とするとき,

$$E: B_{p, \frac{\theta}{\lambda}}^{0m}(\Omega; X) \rightarrow L_{*, -\theta m}^{\frac{\lambda}{\lambda''}}(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega; X)) \cap L_{*, m(1-\theta)}^{\frac{\lambda}{\lambda''}}(\mathbb{R}^+; W_p^m(\Omega; X))$$

が有界, かつ $TE = 1$, たゞし, $(Pu)(x) = \int_0^\infty u(t, x) \frac{dt}{t}$.

また, W_p^m を $B_{p, \infty}^m$ におきかえてもよい.

ここで次の記号を使う. 測度空間 (M, μ) と可測かつ a.e. 正値な $\rho(x)$ に対して, $\rho(x)f(x) \in L^p(M, \mu; X)$ なる μ -強可測関数 f の全体を $L^p_\rho(M, \mu; X)$ で示す. $L^p_{*, \sigma}(\mathbb{R}^+; X) \equiv L^p_{t^\sigma}(\mathbb{R}^+; \frac{dt}{t}; X)$. Banach 空間 X, Y に対して Banach 空間 $X \cap Y$ のノルムは $\max\{\|f\|_X, \|f\|_Y\}$, Banach 空間 $X + Y$ のノルムは $\|f\|_{X+Y} =$

$\inf_{f+g=h} \{ \|f\|_X + \|g\|_Y \}$ とする.

Lemma 4.2. $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; L^1(\Omega; X) + L^\infty(\Omega; X))$ に対し,

$$(J_\nu u)(x) \equiv \int_{1/\nu}^T \frac{dt}{t} \int M(x, z) u(t, x + tz + t\Psi(x)) dz \\ + mT^m \int_T^\nu t^{-m-1} dt \int \omega_m(x, z) u(t, x + Tz + T\Psi(x)) dz$$

このとき, $\{J_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$ は

$L^{\frac{m}{m-1}}_{*, -\theta m}(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega; X)) + L^{\frac{m}{m-1}}_{*, -(m-1)m}(\mathbb{R}^+; W_p^m(\Omega; X)) \rightarrow B^{\theta m}_{p, \frac{m}{m-1}}(\Omega; X)$
 の写像として, 線形連続作用素 J に収束し, $u(t, x) = f(x)$
 a.e. t のとき $Ju = f \cdot W_p^m$ を $B^m_{p, \eta}$ におきかえてよい.

以上の Lemma より直ちに,

定理3. (補題定理) $(L^p(\Omega; X); W_p^m(\Omega; X))_{\theta, \frac{m}{m-1}} = B^{\theta m}_{p, \frac{m}{m-1}}(\Omega; X).$

$(L^p(\Omega; X); B^m_{p, \eta}(\Omega; X))_{\theta, \frac{m}{m-1}} = B^{\theta m}_{p, \frac{m}{m-1}}(\Omega; X).$

この定理は $\Omega = \mathbb{R}^n$ のとき Lions-Peetre [5], $\Omega =$ 有界かつ
 なめらかな境界をもつとき Lions-Magenes が示している.

系. $f \in B^{\mu}_{p, \frac{m}{m-1}}(\Omega)$ なるための必要かつ十分条件は

任意の $K \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\text{supp } K \subset \mathbb{R}^n \times B$, と任意の $|\alpha| > \mu$ について,

$$(*) \left\{ \int_0^T \|t^\mu \int D_z^\alpha K(x, z) f(x + tz + t\Psi(x)) dz\|_{L^p(\Omega; X)}^{\frac{m}{m-1}} \frac{dt}{t} \right\}^{1/\frac{m}{m-1}} < +\infty \\ (0 < T < T_0)$$

かつ $f \in L^p(\Omega; X)$. このとき, $m > \mu$ に整数 m をとり $K = \omega_\alpha$

にとったときの (*) の左辺を $\|f\|_{\alpha, \mu}$ とおくと, $\sum_{|\alpha| \leq m} \|f\|_{\alpha, \mu} + \|f\|_p$

は $B^{\mu}_{p, \frac{m}{m-1}}$ ノルムと同値である.

証明. 必要性は Lemma 2.4 と Lemma 3.3 (B) iii) による。
 十分性を示すため, $\mu < m$ に整数 m をとり, $\mu = m\theta$ とおく。
 Lemma 4.1 のように $u(t, x)$ を定めると, 仮定より,
 $u(t, x) \in L_{*, -\theta m}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega; X)) \cap L_{*, -(1-\theta)m}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+; W_p^m(\Omega; X))$
 がわかる (Lemma 2.1 を使う)。定理 3 より $f \in B_{p, \frac{3}{2}}^{\mu}(\Omega; X)$ 。この
 証明により最後にのべた事実も導かれる。

注意. この系に対応する事実は $\Omega = \mathbb{R}^n$, $p = \frac{3}{2} = 2$, (Fourier 変換に関する) の場合につ
 いて Hörmander の "Linear Partial Differential Operator" Cor 2.4.1 (474-5) に
 書かれている。この系は小松孝三郎氏よりお教えいただいた。

定理 4 を示すためには上の二補助定理に加えて, 次の補助
 定理を必要とする。

Lemma 4.3. $0 < \theta < 1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $q \geq p$ とする。

(i) $W_p^m(\Omega; X_{\theta, q}) \hookrightarrow (B_{p_0, \infty}^m(\Omega; X_0), B_{p_1, \infty}^m(\Omega; X_1))_{\theta, q}$
 ただし, $1 \leq p < \infty$ ($X_0 = X_1$ のときは $p = \infty$ も含む), $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ 。

(ii) $W_p^m(\Omega; [X_0, X_1]_{\theta}) \hookrightarrow [B_{p_0, \infty}^m(\Omega; X_0), B_{p_1, \infty}^m(\Omega; X_1)]_{\theta}$
 ただし, $1 \leq p < \infty$ ($X_0 = X_1$ のときは $p = \infty$ も含む), $[,]_{\theta}$ は緩急補間空間。

証明. $k \equiv n^m + 1$. $\mathcal{W} \equiv L^1(\Omega; \mathcal{X}) + L^{\infty}(\Omega; \mathcal{X})$. $\{f_{\alpha}\}_{|\alpha|=m, 0} \in \mathcal{W}^k$ のとき,

$$K(f_{\alpha}) \equiv \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \int_0^T t^{m-1} dt \int \omega_{\alpha}(x, z) f_{\alpha}(x + tz + t\psi(x)) dz \\
+ \int \omega_m(x, z) f_0(x + Tz + T\psi(x)) dz \in \mathcal{W}.$$

このとき Lemma 2.3 (AXiv) により

$$K: [L^p(\Omega; X)]^k \rightarrow B_{p, \infty}^m(\Omega; X) \quad \text{線形, 有界.}$$

これを p_0 と p_1 の間で補間し, 作用素:

$$W_p^m \ni f \mapsto \{D^\alpha f\}_{|\alpha|=m, 0} \in (L^p(\Omega; X))^k$$

と結びつけると (Lemma 2.2 系によりこれに K を合成すれば injection), 結論を得る. ただし, 次の Lemma を使う. ///

Lemma 4.4. M を測度空間, p_0, p_1 を a.e. $x > 0$ の可測関数とする. $0 < \theta < 1$ とし $p_\theta \equiv p_0^{1-\theta} p_1^\theta$. $1/q_\theta = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

- (i) $p \leq q$ のとき $(L_{p_0}^{q_0}(M; X_0), L_{p_1}^{q_1}(M; X_1))_{\theta, p} \hookrightarrow L_{p_\theta}^{q_\theta}(\Omega; X_{\theta, p})$
 (ii) $p \geq q$ のとき $(L_{p_0}^{q_0}(M; X_0), L_{p_1}^{q_1}(M; X_1))_{\theta, p} \supset L_{p_\theta}^{q_\theta}(\Omega; X_{\theta, p})$
 ただし, M は σ -有界, $q_0 < \infty$ とする. (iii) でもこれを仮定する.
 (iii) $[L_{p_0}^{q_0}(M; X_0), L_{p_1}^{q_1}(M; X_1)]_\theta = L_{p_\theta}^{q_\theta}(M; [X_0, X_1]_\theta)$.

証明. Peetre [13] の定理により

$$(Y_0, Y_1)_{\theta, p} = S(p_0, \theta, Y_0; p_1, \theta-1, Y_1) \quad \left(\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right)$$

したがって, (i) のとき $p_0 \leq q_0, p_1 \leq q_1$ (ii) のときには, $p_0 \geq q_0, p_1 \geq q_1$ にとる. (i), (ii) は Lions-Peetre [5] と類似の方法で示される. (iii) は Calderon [2] にある. ///

Lemma 4.5. (Grisvard [3] の可換性定理の一般化).

$X \supset X_0, X_1, Y_0, Y_1$. $1 \leq p, q_0, q_1 \leq \infty, 0 < \sigma_0, \sigma_1 < 1$ とする.

- (A) ^{連続}線形作用素 $E: X \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ が存在して, $E: S_i(X_i, Y_i)_{\sigma_i, q_i} \rightarrow W_i = L^{q_i}_{*, \lambda_i \sigma_i}(\mathbb{R}^+; X_i) \cap L^{q_i}_{*, \lambda_i(\sigma_i-1)}(\mathbb{R}^+; Y_i)$ が連続とする. ($i=0,1$).
 しかも $f \in S_0 + S_1$ に対して, $PEf = f$ とする. ただし,
 $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$. $0 < \theta < 1$ とし, $\lambda_\theta \equiv (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$, $\lambda\sigma_\theta \equiv (1-\theta)\lambda_0\sigma_0 + \theta\lambda_1\sigma_1$.

$$1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1, \quad X_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{\theta,p}, \quad X_\theta = [X_0, X_1]_\theta.$$

$$(i) \quad p \leq q \text{ のとき } (S_0, S_1)_{\theta,p} \subset (X_{\theta,p}, Y_{\theta,p})_{\sigma,q} = S_\theta$$

$$(ii) \quad [S_0, S_1]_\theta \subset (X_\theta, Y_\theta)_{\sigma,q}$$

(B). $\mathcal{L}_i \equiv L_{*, \lambda_i \sigma_i}^{2i}(\mathbb{R}^+; X_i) + L_{*, \lambda_i(\sigma_i-1)}^{2i}(\mathbb{R}^+; Y_i)$. 線型連続作用素 $J: \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{X}$ が存在して, $J: \mathcal{L}_i \rightarrow S_i$ ($i=0,1$) が連続, かつ $u(t)=f$ a.e. t なる u に対して $Ju=f$ とする. このとき,

$$(i) \quad p \geq q \text{ ならば } (S_0, S_1)_{\theta,p} \supset S_\theta,$$

$$(ii) \quad [S_0, S_1]_\theta \supset (X_\theta, Y_\theta)_{\sigma,q}.$$

証明. 前補助定理と作用素の補間によりわかる. $///$

注意 $q=\infty$ のときの証明には注意を要する. このときには $q_0=q_1=\infty$. Lemma 4.4 (ii) において $q=\infty$ のときには右辺を可算 γ の値のみをとる関数に限ると成立. また $f \in (X, Y)_{\theta,\infty}$, $\varepsilon > 0$ のとき, $f = v(t) + w(t)$ (a.e. t), $e^{\theta t} \|v(t)\|_X, e^{(1-\theta)t} \|w(t)\|_Y \leq (1+\varepsilon)(1-\theta)^{\theta-1} \|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}}$ かつ, v, w は可算 γ の値のみとる.

定理 4. (Besov 空間の補間). $0 < \theta < 1$, $\mu_0, \mu_1 > 0$, $\mu = (1-\theta)\mu_0 + \theta\mu_1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, $1 \leq r < \infty$ とする.

$$\mathcal{B}_0 \equiv B_{p_0, q_0}^{\mu_0}(\Omega; X_0), \quad \mathcal{B}_1 \equiv B_{p_1, q_1}^{\mu_1}(\Omega; X_1), \quad X_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{\theta,p}, \quad X_\theta = [X_0, X_1]_\theta.$$

$$(i) \quad r \geq q \text{ ならば } (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta,r} \supset B_{p,q}^\mu(\Omega; X_{\theta,r})$$

$$(ii) \quad r \leq q \text{ ならば } (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta,r} \subset B_{p,q}^\mu(\Omega; X_{\theta,r})$$

$$(iii) \quad [\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1]_\theta = B_{p,q}^\mu(\Omega; X_\theta)$$

この定理から Gagliardo-Nirenberg の不等式, すなわち,
二つの空間よりの埋蔵定理が直ちに導かれる.

定理 4 の証明. (i) の証. Lemma 4.2, Lemma 4.3 および
Lemma 4.5 (B) により, 整数 m を $m > \sigma_0, \sigma_1$ にとるとき,

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta, r} &= ((L^p(\Omega; X_0), B_{p, \infty}^m(\Omega; X_0))_{\sigma_0, q_0}, (L^p(\Omega; X_1), B_{p, \infty}^m(\Omega; X_1))_{\sigma_1, q_1})_{\theta, r} \\ &\supset ((L^p(\Omega; X_0), L^p(\Omega; X_1))_{\theta, r}, (B_{p, \infty}^m(\Omega; X_0), B_{p, \infty}^m(\Omega; X_1))_{\sigma, q})_{\theta, r} \\ &\supset (L^p(\Omega; X_{\theta, r}), W_p^m(\Omega; X_{\theta, r}))_{\sigma, q} = B_{p, q}^\mu(\Omega; X_{\theta, r}). \end{aligned}$$

最後の等式は定理 3 による. ($\sigma = \mu$, $\mu_i = \sigma_i m$ ($i=0, 1$), $\mu = \sigma m$).

(ii) の証. Lemma 4.1, Lemma 4.5 (A) と Lemma 4.4 (i) により,

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta, r} &\subset ((L^p(\Omega; X_0), L^p(\Omega; X_1))_{\theta, r}, (W_{p_0}^m(\Omega; X_0), W_{p_1}^m(\Omega; X_1))_{\theta, r})_{\theta, r} \\ &\subset (L^p(\Omega; X_{\theta, r}), W_p^m(\Omega; X_{\theta, r}))_{\sigma, q} = B_{p, q}^\mu(\Omega; X_{\theta, r}). \end{aligned}$$

 $(W_{p_0}^m(\Omega; X_0), W_{p_1}^m(\Omega; X_1))_{\theta, r} \subset W_p^m(\Omega; X_{\theta, r})$ は Lemma 4.4 (i) より容易
にわかる. (iii) の証明も同様. ///

この定理は $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合について, (i), (ii) で $r = q$ のとき
および (iii) を Grisvard [3] が示している.

注意. 上の証明により, $X_0 = X_1$ の場合については Lorentz
空間を使うと補内空間 $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)_{\theta, r}$ が決定できる.

§ 5. 埋蔵定理と境界値の存在.

基本不等式と Lemma 2.2 系の積分表示により, 直ちに,

定理 5. $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 \leq s, \eta \leq \infty$, $1 \leq s \leq n$ とす
る. $\lambda \equiv n/p - s/q$. 次の埋蔵作用素が附加条件の下で存在する:-

$$(i) \quad W_p^m(\Omega; X) \rightarrow W_{q; n-s}^k(\Omega; X)$$

$$(a) \quad m \geq k + \lambda \quad \text{or} \quad (b) \quad m \geq k + \lambda, \quad 1 < p < q < \infty.$$

$$(ii) \quad W_p^m(\Omega; X) \rightarrow B_{q, \eta; n-s}^\sigma(\Omega; X), \quad m \geq \sigma + \lambda \quad \text{or}$$

$$(a) \quad m > \sigma + \lambda; (b) \quad 1 < p < q < \infty, p \leq \eta, (c) \quad s < n, 1 < p \leq \eta, \quad ; \text{or} \quad (d) \quad \eta = +\infty$$

$$(iii) \quad B_{p, \xi}^\tau(\Omega; X) \rightarrow W_{q; n-s}^k(\Omega; X), \quad \tau \geq k + \lambda \quad \text{or}$$

$$(a) \quad \tau > k + \lambda; (b) \quad \xi \leq q < \infty, p < q; \text{or} \quad (c) \quad \xi = 1.$$

$$(iv) \quad B_{p, \xi}^\tau(\Omega; X) \rightarrow B_{q, \eta; n-s}^\sigma(\Omega; X), \quad \tau \geq \sigma + \lambda \quad \text{or}$$

$$(a) \quad \tau > \sigma + \lambda, \quad \text{or} \quad (b) \quad \xi \leq \eta.$$

Il'in [4] は (iv) について きわめて せまゝ 範囲の Ω について,
 $p \leq \xi, \quad q \leq \eta, \quad \xi \leq \eta$ の場合についてのみ証明している。
 その証明は きわめて 長い。

この定理に 次の補助定理を組合せると 部分空間による 切取
 へのトレースの存在に関する結果を得る。

Lemma 5.1. 任意の $x'' \in \mathbb{R}^{n-s}$ に対して, 次のトレースが存在する。

$$W_{p; n-s}^m(\Omega; X) \rightarrow W_p^m(\Omega'(x''); X),$$

$$B_{p, \xi; n-s}^\tau(\Omega; X) \rightarrow B_{p, \xi}^\tau(\Omega'(x''); X),$$

証明. Fubini の定理により 容易にわかる。 ///

定理 1 によると Sobolev または Besov 空間において 境界ま
 で含めて なめらかな関数が稠密に存在するから, Ω の境界上の
 点 x_0 をとるとき, $f \mapsto D^p f(x_0)$ なる写像が, $m - |p| - n/p > 0$
 のとき $W_p^m(\Omega; X)$ からの線形連続作用素になることがわかる。

さらにわれわれの方法で “ $f \mapsto D^p f(x_0)$ ” が

$$W_{p_0}^{m_0}(\Omega; X_0) \cap W_p^{m_1}(\Omega; X_1) \rightarrow (X_0, X_1)_{\theta, p} \left(\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \right)$$

に得られ、連続に拡張できる (トレースの定理の一般化) も容易に

わかる。ただし, $0 < \theta < 1$, $\theta = (|p| + n/p_0 - m_0) / (m_1 - n/p_1 - m_0 + n/p_0)$,

分母は 0 でないとする。 W を B に代えても同様である。

境界の一部がなめらかな S 次元多様体 (相対コンパクトとする) をなすとき, その部分へのトレースも同様に論ずることができ
る。Orlicz 空間への埋蔵も容易にわかる。

§ 6. negative order の Besov 空間.

$\mathcal{D}'(\Omega; X)$ で X -値超関数の空間を示す。

定義. $m \geq 0$, 整数 とする。

$$W_p^{-m}(\Omega; X) \equiv \{ f \in \mathcal{D}'(\Omega; X); f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^p(\Omega; X) \}$$

$\mu \leq 0$ のとき, $\mu = -m + \tau$, $0 < \tau \leq 1$ と表わして,

$$B_{p, \tau}^\mu(\Omega; X) \equiv \{ f \in \mathcal{D}'(\Omega; X); f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in B_{p, \tau}^\tau(\Omega; X) \}$$

$B_{p, \tau}^0(\mathbb{R}^n)$ については Nikolsky-Lions-Lizorkin [10] が論じている。

Lemma 6.1. $j, m \geq 0$, 整数 を固定すると, $\{K_\alpha(x, z)\}_{|\alpha| \leq m}$

を次の条件をみたすように作れる;— まず $K_\alpha \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, K_α
の各は $\mathbb{R}^n \times B$ に含まれ, K_α は z についての j 階偏導関数の和であり,

$$f_\alpha(x) \equiv \int_0^T t^{m-|\alpha|} dt \int K_\alpha(x, z) f(x + tz + t\Psi(\omega)) dz \quad (m \geq |\alpha| > 0)$$

$$f_0(x) \equiv \int_0^T t^{m-1} dt \int K_0(x, z) f(x + tz + t\Psi(\omega)) dz + \int \omega_{m+j}(x, z) f(x + tz + t\Psi(\omega)) dz$$

とおくと, $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha \cdot (-1)^{|\alpha|}$ が任意の $f \in \mathcal{D}(\Omega; X)$ で成立.

証明. Lemma 2.2 系 により

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=m} \int_0^T t^{-1} dt \int D_z^\alpha K_\alpha(x, z) f(x+tz+t\psi(x)) + g_T(x),$$

$$= \dots, \quad g_T(x) = \int \omega_{m+1}(x, z) f(x+Tz+T\psi(x)) dz.$$

Lemma 2.1 を使って 導関数を計算すると, ($|\alpha|=m$ に 21715 の K_α をとる).

$$f(x) - (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha f_\alpha = \int_0^T dt \int \sum_{|\beta|=m-1} D_z^\beta \left\{ (-1)^{m-1} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha \geq \beta}} \binom{\alpha}{\beta} K_{\alpha, \alpha-\beta}(x, z) \right\} f(x+\dots) dz$$

$$+ \dots + g_T(x) \quad (K_{\alpha, 0, \gamma} \text{ は } K_{\alpha, \gamma} \text{ と書く})$$

ここで $|\beta|=m-1$ のとき, $K_\beta(x, z) = (-1)^{m-1} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha \geq \beta}} \binom{\alpha}{\beta} K_{\alpha, \alpha-\beta}(x, z)$

とおく.

$$f(x) - (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha f_\alpha - (-1)^{m-1} \sum_{|\beta|=m-1} D^\beta f_\beta = \int_0^T dt \sum_{|\beta|=m-1} \int D_z^\beta K_\beta(x, z) f(x+\dots) dz$$

$$+ \dots$$

となり 以下次々と K_α がきまる. 作り方から $\{K_\alpha\}$ は Lemma の条件をみたす. ///

Lemma 6.2. μ : 実数, $m \geq 0$ 整数とする.

$$f \in B_{p, \delta}^\mu(\Omega; X) \iff f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in B_{p, \delta}^{m+\mu}(\Omega; X).$$

証明. $\Leftarrow$ は埋蔵定理と定義より明白. $\Rightarrow$ を示す. $m=1$

のときをいえば十分. $\mu < j$ に $j \geq 0$, 整数をとる, Lemma

6.1 の $\{K_\alpha\}_{|\alpha| \leq 1}$ を作る. ($m=1$ である). (a) $\mu > 0$ のとき,

Lemma 3.3 (B) (iv) により, $f_\alpha \in B_{p, \delta}^{1+\mu}(\Omega; X)$ となる. $0 \geq \mu$

> -1 のときは定義である. $\mu < -1$ のとき, $\mu = -k + \tau$, $0 < \tau \leq 1$,

$k \geq 0$, 整数とする. $f = \sum_{|\beta| \leq k} D^\beta g_\beta$, $g_\beta \in B_{p,q}^\tau$ (定義) である.
 既に証明したことから $g_\beta = \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha g_{\beta,\alpha}$, $g_{\beta,\alpha} \in B_{p,q}^{1+\tau}$ と表わされる.
 $f_\alpha = \sum_{|\beta| \leq k} D^\beta g_{\beta,\alpha}$ とおくと, Lemma の (4) の部分により,
 $f_\alpha \in B_{p,q}^{k+1}$ かつ 17.1 から $f = \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha f_\alpha$. //.

この Lemma により, 定理 1 ~ 5 は order を 0 または負としても成立することがわかる. ただし定理 2 は

$$T^k |f|_{W_p^k} \leq C \{ T^m |f|_{W_p^m} + (1+T^j) \|f\|_{W_p^j} \} \quad (j \leq k \leq m, m \geq 0)$$

$$T^\mu |f|_{B_{p,q}^\mu} \leq C (1+T) \{ T^\tau |f|_{B_{p,q}^\tau} + (1+T^j) \|f\|_{W_p^j} \} \quad (j < \mu \leq \tau, \tau > 0, \mu = k + \sigma, 0 < \sigma \leq 1) \text{ など}$$

という形になる. 定理 3 は

$$(W_p^k(\Omega; X), W_p^l(\Omega; X))_{\theta, \theta} = B_{p,q}^\mu(\Omega; X), \quad \mu = k(1-\theta) + l\theta.$$

$$(B_{p,q}^\sigma(\Omega; X), B_{p,q}^\tau(\Omega; X))_{\theta, \theta} = B_{p,q}^\mu(\Omega; X), \quad \mu = \sigma(1-\theta) + \tau\theta.$$

となる.

補足 1 Lemma 3.2 (A) (iii) において, $l=n$, $p=1$, $q=\infty$ のとき, $\inf_x |\psi(x)| = c > 0$ ならば不等式が成立する. 境界の近傍では $|\psi(x)| \geq c > 0$ であるから, 境界値の存在 (5.5) というときこの事実がつかえる.

補足 2 我々の埋蔵定理は S 次元切口へのトレースの切口の移動に関する連続性の結果を含んでいる. たとえば Sobolev 空間のときには, 定理 5 (ii) で $\eta = +\infty$ にとればよい.

参考文献

- [1] Besov, O.V., Trudy Mat. Inst. Steklov 60 (1961), 42-81.
(= A.M.S. Transl (2) 40 (1964), 85-126.)
- [2] Calderón, A.P., Studia Math. 24 (1964) 113-190.
- [3] Grisvard, P., J. Math. Pures Appl. 45 (1966) 143-290.
- [4] Il'in V.P., Trudy Mat. Inst. Steklov 66 (1962) 227-363
(= A.M.S. Transl (1969), 91-256. 91p)
- [5] Lions, J.L.-Peetre, J., Publ. Math. Inst. HES 19 (1964) 5-68.
- [6] Lorentz, G.G., Ann. of Math. 51 (1950) 37-55.
- [7] Muramatu, T., Publ. RIMS, 3 (1968), 393-416.
- [8] " " " 6 (1970), 515-543
- [9] " " " "On Imbedding Th for Besov Spaces..." (to appear)
- [10] Nikolsky, S.M., -J.L. Lions- L.I. Lizorkin, Ann.
Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 115-161.
- [11] Oklander, E.T., Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 44-53.
- [12] O'Neil, R., Duke Math. J. 30 (1963) 129-142.
- [13] Peetre, J., Ric. di Math. 12 (19) 248-261.
- [14] " " " Ann. Fourier 16 (1966), 279-317.
- [15] Taibleson, M.H., J. Math Mech. 13 (1964), 407-479.