

ノルム形式の整数解について

都立大理 藤原正彦

$f(x, y)$ を $\mathbb{Q}$ 上既約な binary form で degree ≥ 3 なるものとする。「 $f(x, y) = m \in \mathbb{Z}$ なる不定方程式の整数解が、有限個しかない」という定理は、60 年程前に、Thue により証明されており、その一般性から、不定方程式論に於る最大定理の一つとなっている。さて、この定理を拡張する為、次の考え方をする。 $f(x, 1) = 0$ の根を一つとり、それを α とする。すると $f(x, y) = (x - \alpha y)(x - \alpha^{(2)}y) \cdots (x - \alpha^{(n)}y)$ と書き直せる。ただし、 $[\mathbb{Q}(\alpha); \mathbb{Q}] = \deg f$ を n とし、 $\alpha^{(i)}$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の共役を表す。さて右辺は、再び $\text{Norm}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(x - \alpha y)$ となるから、結局、Thue の定理は

$\text{Norm}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(x + \alpha y) = m$ なる方程式の整数解が有限であることを示している。そこで、次のような一般化を考えることが出来る。

K を有限次代数体, K の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ を fix した時

$$\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x_1\alpha_1 + \dots + x_m\alpha_m) = n \in \mathbb{Z}$$

なる不定方程式の整数解は有限個に抑えられるか。

この問題に関して、最近、W.M. Schmidt [2] が著しい結果を得た。この小論では、Schmidt の定理を、いくつかのタイプの Norm 形式に適用することを目的とする。

代数体 K に於る加群 $\mathcal{N}$ が degenerate とは次の時を言う。

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \supset \exists \mathcal{N} \text{ submodule} \quad K \supset \exists K' \text{ subfield} \neq \mathbb{Q}, \text{ 虚 2 次} \\ K \ni \exists \alpha \quad \text{such that } \alpha \mathcal{N} \subset K', \text{ rank } \mathcal{N} = \deg K \end{aligned}$$

なお、degenerate でない時に、non-degenerate という。

定理 (W.M. Schmidt) [2]

K : 代数体 $[K; \mathbb{Q}] \geq 3$, $K \ni \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 一次独立 $/\mathbb{Q}$ とする。この時、もしも、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の $\mathbb{Z}$ 上生成する module が、non-degenerate ならば、次の不定方程式

$$N(x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) = C$$

ただし、 N は K から $\mathbb{Q}$ へのノルム, C は勝手な有理数, は、高々有限個の整数解 $x_1, \dots, x_n$ しか持たない。

この定理は、すぐ分るように Thue の定理を含んでいる。

なお、Schmidt の証明は、Thue の定理のもとでの証明のように、Diophantine approximation を用いて行われるが、Thue の定理が Roth の定理から直ちに導かれるの反して、かなりの苦に要する。

さて、一つの応用として

(定理) h : 整数 > 0 θ : 代数的数 で $\text{degree } \theta = n > 2h$ とする。 N を $\mathbb{Q}(\theta)$ から $\mathbb{Q}$ へのノルムとすれば、任意の有理数 C に対して、次の方程式

$$N(x_0 + x_1\theta + \cdots + x_h\theta^h) = C$$

は高々有限個の整数解しか持たない。

なお C. L. Siegel が同じ結果をより強い条件の下で得ている [3]。そこでは、 $n > h^2 \left(\frac{n}{n+1} + \Delta \right)$ ただし $2\Delta = \sqrt{4n+1} - 1$ なる仮定をしている。

ここで注意として、上の定理は、ある意味で best possible である。何故なら、 $n = 2h$ とおいた時、 $\theta^h = \alpha$ が実の 2 次数に作るように θ を選べば、 $N(x_0 + x_h\alpha) = N(x_0 + x_h\theta^h) = C$ は、適当な C に対して、単数定理により無限個の整数解 x_0, x_h を持つ。従って、 $N(x_0 + x_1\theta + \cdots + x_h\theta^h) = C$ は無限個の整数解をもつ。又、Thue の定理は、 $n \geq 3$, $h = 1$ の special case となっている。

なお、この定理の証明、及び他のいくつかの方程式への応用は文献[1]を見て頂ければ分ります。

～ 文 献 ～

- [1] M. Fujiwara : Some applications of a Theorem of W.M. Schmidt , Michigan Math. J. to appear
- [2] W.M. Schmidt : Linearformen mit algebraischen Koeffizienten II, Math. Annalen 191 (1971)
- [3] C. L. Siegel : Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeit. 10 (1921)