

有限グラフの Zeta 函数と p -進群の表現について

早大・理工 橋本喜一郎
(Ki-ichiro Hashimoto)

§0 序

1987 の 同研究集会で、筆者と堀(東大・理)は f -進体 K 上の K -rank = 1 なる代数群 G の離散群 Γ に対する、Selberg-Ihara 型の Zeta 函数 についての結果を報告した ([H-H1]) が、本稿はその続篇である。前回の結果に於て Zeta 函数 $Z_{\Gamma}(u; \mathfrak{s})$ の 2 つの有理的表示が非対称的であったことの解釈等、いくつかの関連する問題が満足できる形で解決し、更に主結果を任意の有限グラフに対して拡張する Zeta 函数の第 3 の表示式が得られた。この表示式(定理 3 参照)は Zeta 函数をグラフの辺の上の 2 つの対応(correspondence) T_1, T_2 の積の特性多項式として捉えるもので、有限体上の代数的多様体の合同ゼータ函数の場合と極めて類似している。また、この表示式と f -進群の表現に関する A. Borel [Bo.] の結果を組合せ

ると。 $L^2(G/\Gamma)$ のスペクトル分解 に対する $Z_\Gamma(u; s)$ の役割が 素晴しく明快に 記述される (定理4参照)。最後に、半正則型の Zeta 函数の理論を展開できる群 G の category を公理的に記述する結果 11.2 も記述する。

§1. p -進群の Zeta 函数 (復習)

K を p -進体, G を K 上の semi-simple な代数群で $K\text{-rank}(G) = 1$ とする。更に G は affine Tits 系 (G, B, N, S) を有する とする (例: $G = \text{simply connected group}$)。 $\Gamma \subset G$ を torsion のない 離散部分群で $G/\Gamma = \text{compact}$ とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}(n)$ を n 次元表現 とするとき,

$$Z_\Gamma(u; s) := \prod_{\{\gamma\}_\Gamma} \det [I_n - \rho(\gamma) u^{\deg \{\gamma\}_\Gamma}]^{-1}$$

で (Γ, ρ) の Ihara 型 Zeta 函数 が定義される。但し, 積は Γ の primitive な共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ の全体 $\mathcal{P}(\Gamma)$ (=無限集合) 上にあたり, $\deg \{\gamma\}_\Gamma := \min_{x \in G} \ell(\tilde{x}\gamma x)$ 。ここで $\ell: G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ は次の様に定まる函数である: $S = \{s_1, s_2\}$ とするとき, $U_i := B \cup Bs_iB$ ($i=1,2$) は G の max. compact subgroup の共役類の完全代表系をなす。今, $U = U_1$ とし、選んで $x \in G$ に対し $\ell(x) = \ell \iff x \in U(s_1s_2)^{\ell}U$

とおく。次の結果は $G = SL_2(K)$ に対する伊原 [Ih-1] の一般化である：

定理 1. (橋本-伊原 : [H-H 1, 2]) $Z_F(u; s)$ は次の様な有理函数である：

$$Z_F(u; s) = \left\{ (1-u)^{n(r-1)} (1+g_2 u)^{n(h_2-h_1)} \times \det [I_{nh_1} - (A_{1,s} - g_2 + 1)u + g_1 g_2 u^2] \right\}^{-1}$$

記号： $h_i := \#(\mathcal{U}_i \backslash G/\Gamma)$ 。行렬 $A_{1,s}$ は Hecke 作用素 $T(p)$ の Brandt 表現による像で、次の如く定義される。

$\{x_i (1 \leq i \leq h_1)\}$ は $\mathcal{U} \backslash G/\Gamma$ の完全代表系とすると

$$A_{1,s} := (a_{ij}) \quad a_{ij} = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap x_i^{-1} G_1 x_j} s(\gamma)$$

但し、 $G_1 := \mathcal{U} S_2 \mathcal{U} = \{x \in G; \ell(x) = 1\}$ 。

$$g_i := \#(\mathcal{B} \backslash \mathcal{B} S_i \mathcal{B}) \quad r := g_1 h_1 - h_2 + 1 = g_2 h_2 - h_1 + 1$$

(注-1) g_1, g_2 は $p^\#$ で一般には $g_1 \neq g_2$ 。 Γ は上記仮定の下で free group となり $r = \text{rank}(\Gamma)$ となる。また、上では $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$ として、 $\mathcal{U}_2$ を選んで同様の $Z_F(u; s)$ が得られることばかりで、 $Z_F(u; s)$ のもう1つの表示式が h_1, h_2 へ g_1, g_2 を交換して得られる ($A_{1,s}$ も変る!) が、上式の非対称性からこれらの2式は自明でない関係式で

と入る様に見える。また、上式と Garland [Ga] の結果と合すると、 $\xi = \mathbb{Q}$ のとき、次のことがわかる。

$$\gamma = (1-u)^{-1} \text{ の重複度 in } Z_{\Gamma}(u; \mathbb{Q})$$

$$= L^2(G/\Gamma) \text{ に含まれる Steinberg 表現 の 重複度}$$

これは [Ih-1] の一般化である。

問題: ① 非対称性の解釈を与えよ

② $Z_{\Gamma}(u; \xi)$ の $(1-u)$ 以外の因子の意味について
上と同様の解釈を与えよ

§2. 有限グラフの Zeta 関数

定義. $X = (VX, EX, \varepsilon, \tau)$ が非有向グラフであるとは
 VX (= 頂点の集合), EX (= 辺の集合) とその間の写像 $\varepsilon: EX \rightarrow VX \times VX$, $\varepsilon(y) = (o(y), t(y))$ & $\tau: EX \rightarrow EX$ s.t.
 $\tau \circ \tau = \text{id}$ $\tau(y) = \bar{y}$ ($\neq y$) の 4-組のことをいう。

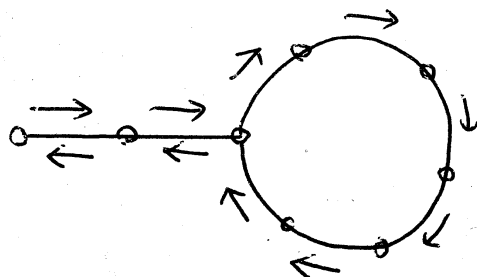
以下では X = 有限グラフ とする i.e., $\# VX < \infty$, $\# EX < \infty$. 対 $e = \{y, \bar{y}\} \in EX / \langle \tau \rangle \Rightarrow \underline{EX}$ を向きのない辺と
いう。 $P \in VX$ に対して $k(P) = \#\{y \in EX; o(y) = P\}$ を
 P の価といい、 $g(P) + 1$ と書く。また、 $\exists y \in EX$ s.t.
 $o(y) = P, t(y) = Q$ なる 2 頂点 P, Q は隣接する (adjacent)
といい、 $VX = V_1 \sqcup V_2$ (disjoint) s.t. $\forall P, Q \in V_1$ (resp.
 V_2) は隣接しない、となるとき X は 2部グラフ (

bipartite) と呼ばれる。 X 上の path C とは, 向きを付いた辺の列 $(y_1, y_2, \dots, y_\ell)$ で $o(y_{i+1}) = t(y_i) \quad \forall i$ なるものをいう。次の用語を定める:

$$\left\{ \begin{array}{ll} C = (y_1, \dots, y_\ell) \text{ が proper} & \Leftrightarrow y_{i+1} \neq \bar{y}_i \quad (\forall i=1, 2, \dots, \ell-1) \\ \text{" closed} & \Leftrightarrow o(y_1) = t(y_\ell) \\ \text{" reduced} & \Leftrightarrow \text{closed} \text{ 且 } C, C^2 = \text{proper} \end{array} \right.$$

例: 右図の様な path C は proper だが closed ではない reduced ではない。

$$\mathcal{C}_\ell^{\text{red}}(X) := \left\{ C; \begin{array}{l} C = \text{reduced} \\ |C| = \ell \end{array} \right.$$



とおき,

$$N_\ell(X) = N_\ell = \# \mathcal{C}_\ell^{\text{red}}(X) \quad (< \infty \Leftarrow X: \text{finite})$$

とおく。 X が S^1 と homotopic なら $N_\ell(X)$ は 2n に有界だが周期的になるが, その他の場合には $N_\ell \rightarrow +\infty$ ($\ell \rightarrow \infty$)。以下後者のみを考えよう。我々の Zeta 関数は次の様に定義される (有限体上の variety の合同ゼータの類似!!)

$$Z_X(u) := \exp \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{N_\ell(X)}{\ell} u^\ell \right\}$$

合同ゼータの時の様に, $Z_X(u)$ は 有理関数になることが

期待される。実際 そうなることが我々の結果である：

定理 2 X は 有限非有向グラフ Z' , $\#EX = 2m$
 $VX = \{P_1, \dots, P_h\}$ とし, P_i の値を $g_i + 1$ とすると

1) $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m} \in \mathbb{C}$ (代数的整数) s.t.

$$N_\ell(X) = \alpha_1^\ell + \alpha_2^\ell + \dots + \alpha_{2m}^\ell$$

即ち
$$Z_X(u) = \left\{ \prod_{j=1}^{2m} (1 - \alpha_j u) \right\}^{-1}$$

2) $\alpha_1 \cdots \alpha_{2m} = (-1)^h g_1 \cdots g_h$

3) $\#\{j; \alpha_j = 1\}$ ($= (1-u)^{-1}$ の重複度)
 $= \dim_{\mathbb{C}} H_1(X, \mathbb{C})$ ($X \sim S^1$ とする
以下も同じ)

4) $\#\{j; \alpha_j = -1\}$ ($= (1+u)^{-1}$ の重複度)
 $= \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} H_1(X, \mathbb{C}) & \cdots X = \text{bipartite} \\ \dim_{\mathbb{C}} H_1(X, \mathbb{C}) - 1 & \cdots X \neq \text{bipartite} \end{cases}$

X に正則性を仮定すると, $Z_X(u)$ は更に 合同ゼータ
 函数に近くなる。次の結果は伊原 [Ih-1] の主結果
 のグラフによる解釈(一般化)で, Serre の指摘によるものを
 具体化したものである (石村 [Su-1, 2] を参照)。

定理 2* 上記に於て $X = \text{regular}$ ($\Leftrightarrow \forall q_j = q > 1$)
 とすると, $\exists! j$ s.t. $\alpha_j = q$. 更に $\{\alpha_j \neq \pm 1, 0\}$
 $= \bigsqcup_{j=1}^{h-1} \{\alpha_j, \alpha'_j\}$ と分解でき, $\alpha_j \alpha'_j = q$, $\alpha_j + \alpha'_j$
 $= a_j \in \mathbb{R}$ となる。即ち,

$$Z_X(u) = \left\{ (1-u)^r (1+u)^{r-1} (1-qu) \prod_{j=1}^{h-1} (1-a_j u + q u^2) \right\}^{-1}$$

(注-2) 上記の表示中の $\prod_{j=1}^{h-1} (1-a_j u + q u^2)$ の部分で, $\mathbb{F}_q$
 上の Curve の合同セータの分子と同じ形をしている。実際,
 Γ が X を $G = \text{SL}_2(\mathbb{O}_p)$ の離散群で数論的写像から得る
 場合は, この因子は ある level N の modular curve
 $X_0(N) \otimes \mathbb{F}_q$ ($q = p \nmid N$) の合同セータの分子と一致している
 (cf. [Ih-2])。よって: この様な問題が生ずる:

問題: $\mathbb{F}_q$ 上の curve C に対して 有限 graph X を対応
 させ, 両者のセータ函数の主要部が一致するように
 できるだろうか?

次に X が 2部 Γ として反正則とすると, 即ち, $VX =$
 $V_1 \sqcup V_2$ に於て V_i ($i=1, 2$) の各頂点は一定の値 q_i
 を与える。 $\# V_1 = h_1$, $\# V_2 = h_2$ とすると, 自明な
 関係式 $(1+q_1)h_1 = (1+q_2)h_2$ が成立する。今, $q_1 \geq q_2$ と
 仮定しておく。次の結果は §1 の定理 1 を含む (G の
 Tits building を Γ で割って X が得られる場合がある)。

定理 2** X は上記の如く 倆 (g_1, g_2) の 反正則
有限 Γ であるとき, α_i ($1 \leq i \leq 2m$) を 適当に 並び換える
と,
 $\alpha_{j+m} = -\alpha_j$ ($\forall j=1, \dots, m$) とできる。更に,
 $\{\alpha_1^2, \dots, \alpha_m^2\} = \{1 \text{ (} r \text{ 回)}, g_1 g_2, -g_2 (h_2 - h_1 \text{ 回}), \beta_j, \beta'_j\}$
 と 分解 できる
 $(1 \leq j \leq h_1 - 1)$
 $\beta_j \cdot \beta'_j = g_1 g_2, \beta_j + \beta'_j = b_j \in \mathbb{R}$

となる。即ち,

$$Z_X(u) = \left\{ (1-u^2)^r (1+g_2 u^2)^{h_2-h_1} (1-g_1 g_2 u^2) \times \prod_{j=1}^{h_2-1} (1-b_j u^2 + g_1 g_2 u^4) \right\}^{-1}$$

§3 主結果 (第3の表示)

§2 の結果を証明する。そのためには $Z_X(u)$ を 更に 一般
化してこれに新しい有限型の表示を与えることから導
かれる。まず、次のことに注意する。 X の 基本群 を
 $\pi_1(X, p_0) = \Gamma$ とおく ($p_0 \in VX$ は fixed)。以下、簡単
のため $X = \text{連結}$ とする。 Γ の 各元 γ は p_0 を 始点
とある proper path C_γ で 代表される。この時、 Γ の 元
の 共役類 には X 上の closed path の free homotopy
class が 対応し、従って C_γ の reduced part C_γ^*
が (unique に) 対応する。更に primitive な 共役類

には, primitive な (i.e. 重複のない) reduced cycle が対応する。但し $\text{cycle} = \text{reduced path}$ には必ず始点と終点 s, t がある。他方, 各 $e_i = (y_i, \bar{y}_i) \in \underline{EX}$ に対して変数 u_i を与えておく。 $\rho: \Gamma \rightarrow U(n)$ を基本群の n -次元表現とすると, $u = (u_1, \dots, u_m)$ と略記して

$$\begin{aligned} Z_X(u; \rho) &:= \prod_{\{\gamma\}_\Gamma: \text{primitive}} \det [I_n - \rho(\gamma) u^\gamma]^{-1} & \gamma \\ &= \prod_{[C]: \text{primitive cycle}} \det [I_n - \rho(\langle C \rangle) u^C]^{-1} & \langle C \rangle \end{aligned}$$

但し, $\{\gamma\}_\Gamma$ は reduced cycle $[C] = C$ の class を代表する。 $u^\gamma = u^C = u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_\ell} \iff C = (y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_\ell})$ 。

上式の $\log$ を取り Euler の作用素を apply すると容易に次式を得る:

$$\sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \log Z_X(u; \rho) = \sum_{\ell=1}^{\infty} N_{\ell, \rho}(u)$$

$$N_{\ell, \rho}(u) := \sum_{C \in \mathcal{C}_\ell^{\text{red}}(X)} \text{tr } \rho(\langle C \rangle) u^C$$

ゆえに $\rho = \mathbb{1}$, $u_1 = \dots = u_m = 1$ とすると

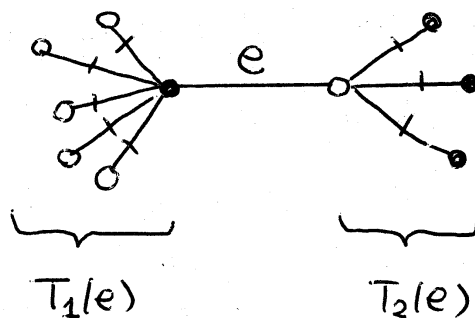
$$N_{\ell, \mathbb{1}}(1, \dots, 1) = \#(\mathcal{C}_\ell^{\text{red}}(X)) = N_\ell$$

ゆえに, $Z_X(u, \dots, u; \mathbb{1}) = Z_X(u)$ (§2 の通り) と得る。

ここで、まず次の仮定を置く: $X =$ 2部グラフ $VX = V_1 \sqcup V_2$
 更に、 $\tilde{X}$ を X の universal covering とする。 $\tilde{X}$ は (無限)
 tree で、 X から induce した $T =$ 2部グラフ 構造 を 用い:
 $V\tilde{X} = \tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2$. $e \in \underline{E\tilde{X}}$ に対して $\tilde{E}_i(e) = \{e \text{ と}$
 $\text{同じ } \tilde{V}_i \text{ の頂点から出る辺の全体}\}$ とおく。

定義 $T_i \in \text{End}(\mathbb{Z}[E\tilde{X}])$: $E\tilde{X}$ 上の correspondence
 を次の様に定める:

$$T_i(e) := \sum_{e' \in \tilde{E}_i(e) \setminus \{e\}} e'$$



この様に定める、積 $T_1 \circ T_2$ 及び $T_2 \circ T_1$ は $\tilde{X}$ 上 (従って X 上) 互いに逆方向の backtracking のような smooth な長さを定めることが出来る。次に

$$M_\Gamma := \left\{ f: \underline{E\tilde{X}} \rightarrow \mathbb{C}^n; f(e, \gamma) = f(e) f(\gamma) \right\}$$

$\forall \gamma \in \Gamma$

とおく。これは nm -次元の vector space 上自然な形の Γ -
 不変な内積を置く。 $A = \mathbb{C}[u]$ とし、 $M_\Gamma \otimes A$ を
 $\underline{E\tilde{X}}$ 上の A^n -値関数の空間と同一視する。 $M_\Gamma \otimes A$ の
 作用素 $S_u^*(T_i)$, $i=1,2$ を

$$S_u^*(T_2)f(e) := \sum_{e' \in E_2(e)} f(e') u^{e'}$$

と定める。この時、次の等式が成立する (T_1, T_2 を有限体上の Curve の Frobenius 写像の類似とすると、これは合同関係式に相当する)。 $S_u^*(T_i) \in \text{End}_A(M_S \otimes A)$ である

Key lemma $\text{tr}(S_u^*(T_1)S_u^*(T_2))^g + \text{tr}(S_u^*(T_2)S_u^*(T_1))^g = N_{\mathbb{Z}, S}(u)$

証明は初等的に出来る。これより直ちに次の結果が導かれる:

定理 3 X が連結 2 部 グラフ の時

$$Z_X(u; S) = \det[I_{nm} - S_u^*(T_1)S_u^*(T_2)]^{-1}$$

特に, $(u_1 = u_2 = \dots = u \text{ として})$

$$Z_X(u; S) = \det[I_{nm} - S^*(T_1 T_2) u^2]^{-1}$$

(注-3) 1) $u = (u_1, \dots, u_m)$ の場合, $S^*: \mathbb{C}[T_1, T_2] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M_S)$ は (反) 表現 となることとなる。 $X^{(2)}$

2) $X \neq$ 2 部 グラフ の時は, X の 重心分割 を 取れば 2 部 グラフ となり, しかも Zeta 函数 は 本質的に 何れも 変わらない!! よって 一般 の 場合は

$$Z_X(u_1^2, \dots, u_m^2; S) = Z_{X^{(2)}}(u_1, u_1, u_2, u_2, \dots, u_m, u_m; S)$$

により 定理3 に帰する。

3) §2 の 定理2, $2^*, 2^{**}$ は 定理3 から導かれる。

(1-u) の重複度については 少し立入った議論が必要だが,

定理2 の 2) は 次の如く示される: $S = \mathbb{Z}$ とする。

$$EX = \bigsqcup_{P \in V_1} E(P) = \bigsqcup_{Q \in V_2} E(Q) \quad \text{と分解する。}$$

ここで $E(P) = \{P \text{ より出る辺の全体}\}$ 等。この分解は 各々

T_1, T_2 により stable である。即ち, $E(P)$ の生成する

free $\mathbb{Z}$ -module は T_1 -stable であり, 従って $\mathbb{Z}$ は

$$T_1|E(P) \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{g(P)+1} \quad \text{固有値は} \quad \begin{cases} g(P) & \cdots 1 \text{ 回} \\ -1 & \cdots g(P) \text{ 回} \end{cases}$$

$$\text{従って} \quad \det T_1|E(P) = g(P) \cdot (-1)^{g(P)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \det T_1 &= \det S^*(T_1) = \left(\prod_{P \in V_1} g(P) \right) \cdot (-1)^{\sum R(P) - \#V_1} \\ &= \left(\prod_{P \in V_1} g(P) \right) \cdot (-1)^{\#EX - \#V_1} \end{aligned}$$

T_2 についても同様であるから 合計

$$\det T_1 T_2 = \prod_{j=1}^{2m} \alpha_j = g_1 \cdots g_h \cdot (-1)^h \quad h = \#VX$$

§ 4. 応用 — $L^2(G/\Gamma)$ の分解と $Z_\Gamma(u)$

定理3より $Z_X(u; \mathfrak{s}) = Z_\Gamma(u; \mathfrak{s})$ の性質は全2. (反)表現 $\rho^*: \mathbb{C}[\Gamma_1, \Gamma_2] \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M_{\mathfrak{s}})$ を調べることにやり得られることになる。但し、一般の Γ に対して環 $\mathbb{C}[\Gamma_1, \Gamma_2]$ は勿論非可換で、しかも複雑な構造を持ち、統一的な性質を導くのは容易でない。ここでは、 X が半正則 Γ である場合を論じる。 X の価を (g_1+1, g_2+1) $g_1 \geq g_2 > 1$ とする。この時、

$$\mathbb{C}[\Gamma_1, \Gamma_2] = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \\ i_k \neq i_{k+1}}} \mathbb{C} \cdot T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k} \quad (\text{直和})$$

である、各 T_i は $T_i^2 = (g_i - 1)T_i + g_i$ ($i=1, 2$) を満たす。これは、 p -進代数群の時によく知られている、岩堀部分群 B の Hecke 環 $\mathcal{H}(G, B)$ と一致する ($T_i = B\zeta_i B$)。次の事実も良く知られている、直接証明も容易である：

命題 $X = \text{半正則}$ Γ の価 $= (g_1+1, g_2+1)$ とすると、 $\mathbb{C}[\Gamma_1, \Gamma_2]$ の既約表現は高々2次元に限る。さらに次の通りに分類でき、 $T_1 T_2$ の特性多項式 $P_{\varphi}(u) := \det[I - \varphi(T_1 T_2)u]$ で parametrize できる：

(1) 1次元表現 (4>)

空間	$\varphi(T_1)$	$\varphi(T_2)$	$\varphi(T_1 T_2)$	$P_\varphi(u)$
$W(q_1, q_2)$	q_1	q_2	$q_1 q_2$	$1 - q_1 q_2 u$
$W(q_1, -1)$	q_1	-1	$-q_1$	$1 + q_1 u$
$W(-1, q_2)$	-1	q_2	$-q_2$	$1 + q_2 u$
$W(-1, -1)$	-1	-1	1	$1 - u$

(2) 2次元 $\lambda \mapsto x - y : \mathbb{C} \in \mathbb{C} \setminus \{0, (q_1+1)(q_2+1)\}$

$$W(c) \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 \\ -c & c - q_2 \end{pmatrix} \quad 1 - (c - q_1 - q_2)u + q_1 q_2 u^2$$

以下, §1 の状況に戻る. 即ち G は p -連体 K 上の S.S. alg. grp として K -rank = 1 とし, Tits system (G, B, N, S) を与える. この時, (π, V) を G の smooth な既約表現とあるとき, V は Hecke 環 $\mathcal{H}(G)$ 上の non-deg. な module となり, 逆も成立する. 更に $(\pi, V) = \text{admissible}$ $\Leftrightarrow \pi(f) = 0$ of finite rank ($\forall f \in \mathcal{H}(G)$). ± 2 , $K \subset G$ を open compact subgroup とすると $V^K = \{v \in V; \pi(k)v = v \forall k \in K\}$ は 有限次元の $\mathbb{C}$ -space として, (π, V^K) は $\mathcal{H}(G, K)$ -module となる. $K=B$ に対しては 次のことが知られている (K -rank = 1 の仮定は不要)

定理 (A. Borel, [Bo]) 対応 $(\pi, V) \longrightarrow (\pi, V^B)$

は G の既約 admissible 表現 なら 有限次元既約 $\mathcal{H}(G, B)$ -

module への exact functor を与える。

(π, H) を G の Hilbert 空間 H 上の unitary 表現とすると $V = H_\infty = \{\text{smooth vectors in } H\}$ は G の admissible な表現空間となる。以上の事柄と定理3とを組合せると $L^2(G/\Gamma)$ の分解と Zeta 函数 $Z_\Gamma(u)$ の関係が明快に述べられる:

定理4 (π, H) が G の既約 ∞ -リ表現で、 $H_\infty \neq \{0\}$ とする。この時、

$$\begin{aligned} L^2(G/\Gamma) \text{ における } (\pi, H) \text{ の重複度} \\ = Z_\Gamma(u)^{-1} \text{ における } P_\pi(u) := \det [I - (\pi(\Gamma_2)|_{H_\infty})u] \\ \text{の重複度} \end{aligned}$$

特に、 $P_\pi(u) = (1-u)$ の場合が G の Steinberg 表現であるから、Garland の結果を用いると §1 の結果が再度得られたことになる。

(注-4) 上記の結果と Hecke 環 $\mathcal{H}(G, B)$ 及び $\mathcal{H}(G, U_1)$ $\mathcal{H}(G, U_2)$ の関係を少し丁寧にみれば §1 の問題① (定理1の非対称性) の解答が得られる。更に定理3 $\Rightarrow$ 定理1 という新証明も得られる。

§5 群とグラフと Hecke 環

最後に、 $\Gamma \subset G$ に対し 以上の結果が適用される様な群 G の category 的な特徴付け により考察する。
まず、次の様な群 G と 其の上的函数 $\ell: G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ の pair を考えよう。

公理 I $\forall \ell \geq 0$ に対し $G_\ell := \{x \in G; \ell(x) = \ell\} \neq \emptyset$
更に $G_0 \supset \Gamma$ は G の 部分群 ぞ、 $G_\ell = G_\ell^{-1} = \cup G_\ell \cup$
が成立し、 $\#(\Gamma \backslash G_\ell) < \infty$.

この時、 G は Γ の commensurator と一致するぞ Hecke 環 $\mathcal{H}(G, \Gamma)$ が考えられるぞ、 以下により

公理 II $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\begin{cases} G_1^2 = G_2 + (q_2 - 1)G_1 + q_2(1 + q_1)\Gamma \\ G_1 G_\ell = G_{\ell+1} + (q_2 - 1)G_\ell + q_1 q_2 G_{\ell-1} \quad (\ell \geq 2) \end{cases}$$

より直ちにわかること: $\#(\Gamma \backslash G_1) = q_2(1 + q_1)$, 更に

$\#(\Gamma \backslash G_\ell) = (q_1 q_2)^{\ell-1} q_2(1 + q_1)$. また $\mathcal{H}(G, \Gamma)$ の 中ぞ

$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{C} G_\ell = \mathbb{C}[G_1]$ は 部分環 を成し、公理 II は次の等式と同値である: $\mathbb{C}[G_1][u]$ の 中ぞ

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} G_\ell \cdot u^\ell = \frac{(1-u)(1+q_2 u)}{1 - (q_1 q_2 + 1)u + q_1 q_2 u^2}$$

従って、公理 I-II をみたす (G, ℓ) に対して [H-H 1, 2] の議論がそのまま適用できるので、 $\Gamma \subset G$ 部分群で

- i) $\Gamma = \text{torsion free}$ ii) $\Gamma \cap \bar{x}' \cup x = \{1\} \quad \forall x \in G$
 iii) $\#(\mathcal{U} \setminus G/\Gamma) \Rightarrow h < \infty$

なるものに対して $Z_T(u; s)$ が定義され、定理 1 が成立する。公理 I, II を満たす群 G の例として

- 1°) p -adic groups of K -rank 1
- 2°) $G = \text{Aut}(\tilde{X}(g_1, g_2))$ $\tilde{X}(g_1, g_2) :=$ 半正定, 2部 tree
 "正定" (g_1+1, g_2+1)
- 3°) $G (= \Gamma) =$ free group of finite rank

しかし、このままでは (G, ℓ) の全体がどの位大きなものか不明である。次の結果(特に (3))は、それが非常に大きいことを示す：

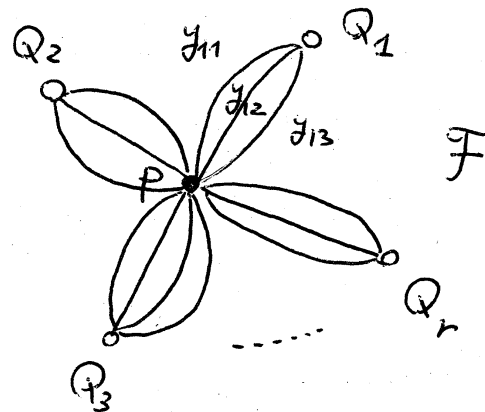
定理 5 Cat is a category 同値である

- (1) $\{(\Gamma, \ell) ; \text{公理 I, II 成立する}\}$
- (2) $\{\Gamma \subset \tilde{X}(g_1, g_2) \wedge \text{作用 } Z'', \tilde{V}_1 \text{ 上可移なるもの}\}$
- (3) $\{\pi_1(\Gamma, \mathcal{F}, I) ; \text{flower } \mathcal{F} \text{ の上の群の graph } \Gamma \text{ の max. subtree } I \text{ に属する基本群} + \text{半正則条件}\}$

$\equiv z'$, flower $\mathcal{F}$ とは 下図の様な 有限 グラフ $\mathcal{G}$ は その 各頂点, 辺に 群を対応させる assignment z' あり

$G_y \hookrightarrow G_{0(y)}$, $G_y \hookrightarrow G_{x(y)}$, $G_y \cong G_{\bar{y}}$ なる条件を
 みたす, 更に 半正則条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{t_i} [G_{Q_i} : G_{y_j}] = g_i + 1 \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{t_i} [G_P : G_{\bar{y}_j}] = g_1 + 1 \end{cases}$$



をみたすとする。これに対応する

基本群 $\pi_1(\mathcal{G}, \mathcal{F}, T)$ とは

$G_P, G_{Q_i} (1 \leq i \leq r)$, と 記号 $g_y (y \in E\mathcal{F})$
 で生成され, 関係式

$$\begin{cases} g_y^{-1} a^y g_y = a^{\bar{y}}, & g_{\bar{y}} = g_y^{-1} & (\forall y \in E\mathcal{F}, \forall a \in G_y) \\ g_y = 1 & \forall y \in ET & \end{cases}$$

$a \rightarrow a^y \in G_{0(y)}$
 $a \rightarrow a^{\bar{y}} \in G_{x(y)}$

で定まる群のことである。これは Serre [Ser] による。

特に, $G_P, G_Q = \{1\}$ であるとき 普通の基本群と一致する。

(注-5) 上記定理の (2) に $\lambda \in \mathbb{Z}$,

G が $\tilde{EX}/(g_1, g_2)$ 上可移 $\iff G = U_1 *_B U_2$ (融合積)

$$U = U_1 = \text{Stab}(P), U_2 = \text{Stab}(Q)$$

$$P \bullet \text{---} Q$$

さらに, $V(P; \ell) = \{Q \in VX; d(Q, P) = \# \text{ 通り} = \ell\}$ と

おくと, これは $\#(V(P; 1)/\mathcal{U}) = 1$ と同値である。

より一般に 次のことが示される:

定理 6 G は 定理 5 の 場合とすると,

G は Tits system (G, B) s.t. $B = U_1 \cap U_2$

$$\Leftrightarrow \mathcal{H}(G, B) = \mathbb{C}[T_1, T_2]$$

$$\Leftrightarrow \#(\mathcal{U} \backslash G_\ell / \mathcal{U}) = 1 \quad (\forall \ell \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{U} \cap V(P; \ell) \text{ の作用が可移 } (\forall \ell \in \mathbb{N})$$

Tits system を持たない 群 (G, ℓ) の例も $\mathbb{Z}$ に存在する。

——— 以上の結果は [H-H2], [Has] に出る予定
 である。詳しい証明等は 此を参照して下さい。

** References **

- [Bo] A. Borel : Admissible representations of a s.s. Group over a local field with vectors fixed under Iwahori subgroup, Inv math. 35 (1976) 233-259
- [Ga] H. Garland : P-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups Ann. of Math 97 (1973) 375-423

- [H-H1] K. Hashimoto & A. Hori; p -進 discrete 群の
Ihara-Selberg 型 ϵ - γ 函数 数理解析研 講究録
617, 176-192
- [H-H2] ——— ; Selberg-Ihara's Zetafunction
for p -adic discrete groups, Adv. Study in Pure
Math. Vol 15
- [Has] K. Hashimoto; Zetafunctions of finite graphs
and representations of p -adic groups, Adv. Study
in Pure Math. Vol 15.
- [Ih-1] Y. Ihara; On discrete subgroups of the two
by two projective linear group over p -adic fields
J. Math. Soc. Japan 18 (1966) 219-235
- [Ih-2] ——— ; Discrete subgroup of $PL(2, k_p)$,
Proc. Symp. Pure Math. IX AMS 1966, 272-278.
- [Ser] J.-P. Serre; Arbres, Amalgames, SL_2 ,
Astérisque no 46, Soc. Math. France 1977
- [Su-1] T. Sunada; L-functions in geometry and
some applications, SLN 1201 266-284.
- [Su-2] — ; Twisted Pólya-Frobenius Theorem and
L-functions, J. Funct. Analysis 71 (1987) 1-46