

Interaction of Singularities at the Boundary

東大 教養 大学院 加藤 圭一
(Keiichi Kato)

1. 序

次の半線型波動方程式の境界値問題を考える。

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(t, x, y) = F(u, \nabla u) \quad \text{in } \Theta$$

$$(2) \quad u|_{x=0} = g(t, y) \in C^\infty$$

ここで、 $F(\cdot, \cdot) \in C^\infty$ 、 Θ は $\mathbb{R}_+^3 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$ の原点の
開近傍である。(1) の方程式の解の内部での特異性の相互作用
は、Bony [2] と Melrose-Ritter [4] により調べられている。
この小文では、(1) に $x=0$ での Dirichlet 条件 (2) を加し、境界に
おける特異性の相互作用を調べることにする。

結果を述べるため、以下の記号と関数空間を導入する。

$$\Theta^- = \Theta \cap \{t < 0\}$$

$$\Theta^+ = \Theta \cap \{t > 0\} \cap \{\Theta^- \text{ の決定領域} \}$$

定義 (Conormal distribution) Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の領域、 Σ を Ω
内の C^∞ 部分多様体、又は、 Ω 内の互いに横断的に交わる二つ
の超曲面の和集合とする。 $\mathcal{Z}_\Sigma$ を、 Σ に接する任意の C^∞ ベクトル

ル場 ($1 \leq i \leq l$) とするとき、

$$u \in H^s(\Sigma, \infty) \text{ in } \Omega$$

とは、任意の自然数 l に対し、

$$Z_1 \circ Z_2 \circ \cdots \circ Z_l u \in H_{loc}^s(\Omega)$$

なることと定義する。

定理 1. $x_0 \leq 0$ 、 $y_0 \geq 0$ 、 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ とし、 $\Sigma_1 = \{t = x_0 x + y_0 y\}$ 、 $\Sigma_2 = \{t = -x_0 x + y_0 y\}$ とする。 $s > \frac{5}{2}$ に対し、 $u \in H^s(\theta)$ が (1)、(2) をみたすとする。

$$u \in H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, \infty) \text{ in } \theta^-$$

ならば、

$$u \in C^\infty(\theta^+ \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$$

である。

定理 2. $x_1, y_1 < 0$ 、 $x_1^2 + y_1^2 = 1$ とし、 $\Sigma_3 = \{t = x_1 x + y_1 y\}$ 、 $\Sigma_4 = \{t = -x_1 x + y_1 y\}$ とする。 $s > \frac{5}{2}$ に対し、 $u \in H^s(\theta)$ が (1)、(2) をみたすとする。

$$u \in H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4, \infty) \text{ in } \theta^-$$

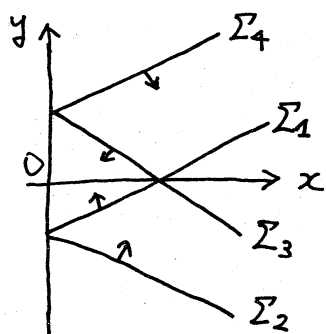
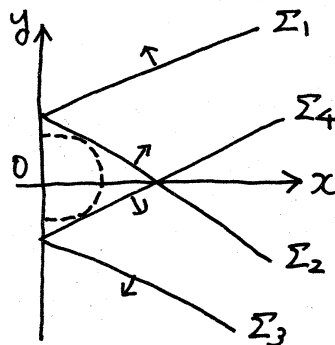
ならば、

$$u \in C^\infty(\theta^+ \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \{t^2 = x^2 + y^2\})$$

である。

注 1. もし非線型項に ∇u が入っていないならば、定理 1、定理 2 は、 $s > \frac{3}{2}$ のときに成り立つ。

注2. 定理2は、 $t < 0$ のとき、解 u が、図1の実線部以外に特異性をもちないならば、 $t > 0$ のとき、図2の実線部と破線部以外には特異性をもちないことを主張している。

図1 ($t < 0$ のとき)図2 ($t > 0$ のとき)

この定理は、図2の破線部上に特異性が現われることを主張するものではないが、3. において、そこで、特異性が現われる例を作る。

2. 定理1と定理2の証明

定理1の証明 $\Theta^+ \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ を次の三つの部分に分ける。

$$\Theta_1 = \{t < x_0 x + y_0 y\} \cap \Theta^+$$

$$\Theta_2 = \{t > x_0 x + y_0 y\} \cap \{t < -x_0 x + y_0 y\} \cap \Theta^+$$

$$\Theta_3 = \{t > -x_0 x + y_0 y\} \cap \Theta^+$$

Θ_3 が、本質的な部分であるから、まず、 $u \in C^\infty$ in Θ_3 を示す。

$$M \equiv t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad v_1 \equiv M^2 u \quad t < 0$$

$$\square v_1 = \square (M^2 u)$$

$$= M \{ \square (Mu) \} + [\square, M] (Mu)$$

$$= M^2 F(u, \nabla u) + 2MF(u, \nabla u) + 2\square (Mu)$$

$$= M^2 F(u, \nabla u) + 4 M F(u, \nabla u) + 4 F(u, \nabla u)$$

であるから、

$$\square v_1 + G_1(u, \nabla u) \cdot \nabla v_1 = G_2(u, \nabla u, DDu)$$

の形に書ける。ここで、 $G_1(\cdot, \cdot) \in C^0$, $G_2(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^0$, であり $G_2(u, \nabla u, DDu)$ の一般項は、 $G(u, \nabla u) \times (u \text{ の } 2 \text{ 階微分の } 2 \text{ 次式})$ の形である。 $u \in H^s(\theta)$ ($s > \frac{5}{2}$) であるから、

$$(3) \quad G_2(u, \nabla u, DDu) \in H^{2s - \frac{n}{2} - \epsilon} \quad (\epsilon > 0) \quad \text{in } \theta$$

を得る。これは、 $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 、 $0 < s < \frac{n}{2}$ ならば、 $uv \in H^{2s - \frac{n}{2} - \epsilon}$ であることを用いればすぐわかる。 $\nabla u \in H^{s-1}$ 、 $s-1 > \frac{3}{2}$ であるから、

$$(4) \quad G_1(u, \nabla u) \in H^{s-1} \quad \text{in } \theta$$

$$(5) \quad v_1|_{x=0} = M^2 u|_{x=0} = t^2 \partial_t^2 g + t \partial_t g + y^2 \partial_y^2 g + y \partial_y g \in C^0$$

$$(6) \quad v_1 \in H^s \quad \text{in } \theta^- \quad (\odot \quad u \in H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, \infty) \text{ in } \theta^- \quad \text{である})$$

ことと、 M が Σ_1 、 Σ_2 に接していることからわかる。))

(3)、(4)、(5)、(6) と線型の Singularity の反射の理論により、

$$v_1 \in H^t \quad t = \min(s-1, 2s - \frac{5}{2} - \epsilon) \quad \text{in } \theta^+$$

である。 $2s - \frac{5}{2} - \epsilon = (s-2) + (s - \frac{5}{2} - \epsilon)$ であるから、 ϵ を十分小にすれば、 $2s - \frac{5}{2} - \epsilon > s-2$ とできる。したがって、ある $\delta > 0$ があって、 $v_1 \in H^{s-2+\delta} \quad \text{in } \theta^+$ であることがわかった。この議論を繰り返せば、

$$v_1 \in H^{s-1} \quad \text{in } \theta^+$$

を得る。 $M^2 u \in H^{s-1}$ in Θ^+ であるから、 $M^2 F(u, \nabla u) \in H^{s-1}$ in Θ^+ 、則ち、 $G_2(u, \nabla u, D \nabla u) \in H^{s-1}$ を得る。次に $M^3 u$ について同様のことを行えば、 $M^3 u \in H^{s-1}$ in Θ^+ を得、これを繰り返すと

$$(7) \quad M^j u \in H^{s-1} \quad \text{in } \Theta^+ \quad \text{for } \forall j \in \mathbb{N}$$

を得る。 $u \in C^\infty$ in Θ_3 を示すために、次の補題を用意する。

補題3. (Beals[1]) $u \in H^s$ in Θ^+ 、 $M^j u \in H^{s-1}$ in Θ^+ ($s > \frac{5}{2}$)

かつ、 u は (1) をみたすならば、

$$u \in C^\infty \quad \text{in } \{t^2 > x^2 + y^2\} \cap \Theta^+$$

が成り立つ。

補題3の証明 $Q_0 = (t, x, y) \in \Theta^+ \cap \{t^2 > x^2 + y^2\}$ を任意に固定し、 $(Q_0, P_0) = (t, x, y, \tau, \xi, \eta) \in T^*(\Theta) \setminus 0$ を任意にとる。 $\tau\tau + x\xi + y\eta \neq 0$ ならば、 M は (Q_0, P_0) によりて微局所的に楕円型となる。一方、 $\tau\tau + x\xi + y\eta = 0$ ならば、 $\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 \neq 0$ なので、 $\square$ が、 (Q_0, P_0) によりて微局所的に楕円型となる。 $M^2 u \in H^{s-1}$ in Θ^+ 、 $\square u = F(u, \nabla u) \in H^{s-1}$ in Θ^+ であるから、 $u \in H^{s+1}$ at Q_0 を得る。これを繰り返すと、 $u \in H^t$ at Q_0 for $\forall t \in \mathbb{R}$ を得、これは、則ち、 $u \in C^\infty$ at Q_0 を意味してゐる。 Q_0 は $\Theta^+ \cap \{t^2 > x^2 + y^2\}$ の中で任意にとれたから、 $u \in C^\infty$ in $\{t^2 > x^2 + y^2\}$ が示された。(証明終)

$M_\epsilon = (t - y_0 \epsilon) \partial_t + x \partial_x + (y - \epsilon) \partial_y$ とする。この M_ϵ

も、 Σ_1, Σ_2 に接するから、(7)を示したのと同様の方法で、

$$M_{\varepsilon}^j u \in H^{s-1} \text{ in } \theta^+ \text{ for } \forall j \in \mathbb{N}$$

を示すことができる。これを用いて、補題3と同様の方法で、

$$u \in C^\infty \text{ in } \theta^+ \cap \{t > y_0 \varepsilon\} \cap \{(t - y_0 \varepsilon)^2 > x^2 + (y - \varepsilon)^2\}$$

を示すことができる。 ε を正負をとわず動かすと、

$$u \in C^\infty \text{ in } \theta_3$$

を得る。 $u \in C^\infty$ in θ_1 は、有限伝播性を用いて、 $u \in C^\infty$ in θ_2 は、Bony [7] の Commutator argument により示すことができる。(証明終)

定理2の証明 $\theta^+ \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \{t^2 = x^2 + y^2\})$ を以下の4つの部分に分ける。

$$\theta_1 = (\{t < x_0 x + y_0 y\} \cup \{t < x_1 x + y_1 y\}) \cap \theta^+$$

$$\theta_2 = (\{t < -x_0 x + y_0 y\} \cup \{t < -x_1 x + y_1 y\}) \cap \theta_1^c \cap \theta^+$$

$$\theta_3 = \{x^2 + y^2 > t^2\} \cap \{t > -x_0 x + y_0 y\} \cap \{t > -x_1 x + y_1 y\} \cap \theta^+$$

$$\theta_4 = \{x^2 + y^2 < t^2\} \cap \{t > -x_0 x + y_0 y\} \cap \{t > -x_1 x + y_1 y\} \cap \theta^+$$

$u \in C^\infty$ in $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の証明は定理1の証明と同様にしてできる。 $u \in C^\infty$ in θ_4 は、 M が $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ に接していることに注意すると、定理2の u に対し (7) 及び、補題3が成立することからわかる。(証明終)

3. 図2の破線上に特異性が現われる例

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \omega_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \omega_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \omega_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

とする。

定理3. $F(s) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ を

$F(s)$ は奇関数、

$$-1 \leq F(s) \leq 1,$$

$$F(s) = 0 \quad \text{for } 0 < s < \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{3} < s,$$

$$F(s) = 1 \quad \text{for } \frac{5}{3} < s < \frac{7}{3}$$

なる関数とする。そのとき、 $\square u = F(u)$ for $-8 < t < 8, x \in \mathbb{R}^2$,

$u|_{x=0} = 0$ の解 u で、

$$(8) \quad \text{sing supp } u \cap \{-8 < t < 0\} = \bigcup_{i=1}^4 \{t - \omega_i \cdot x = 0\}$$

$$(9) \quad \text{sing supp } u \cap \{0 < t < 8\} = \bigcup_{i=1}^4 \{t - \omega_i \cdot x = 0\} \cup \{t^2 = x^2 + y^2\}$$

なるものが存在する。

注. 言うまでもないが、この定理は、図2の破線上に特異性が現われる例である。

定理3の証明 h をハビサイド関数、則ち、 $h(t) = 0$ for $t \leq 0$,

$h(t) = 1$ for $t > 0$ なる関数とする。

$$\chi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 h(t - \omega_j \cdot x) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$\chi_5 = h(t - \omega_3 \cdot x) h(\omega_2 \cdot x - t) - h(t - \omega_4 \cdot x) h(\omega_1 \cdot x - t)$$

とおく。次の2つの補題を用意する。

補題3.1 V_1 を次の初期値問題の解とする。

$$\begin{cases} \square V_1 = \chi_1 - \chi_2 - \chi_3 + \chi_4 \\ V_1 \equiv 0 \quad \text{for } t < 0 \end{cases}$$

そのとき、

$$\text{sing supp } V_1 \supset \{t^2 = x_1^2 + x_2^2, t \geq 0\}$$

が成り立つ。

補題 3.2 $a(t) \in C^\infty$ を、 $0 \leq a(t) \leq 1$ であって、 $t \leq -2\delta$ のとき $a(t) = 0$ で、 $t \geq -\delta$ のとき $a(t) = 1$ なる関数とする。 V_2 を次の初期値問題の解とする。

$$\begin{cases} \square V_2 = a(t) \chi_5 \\ V_2 \equiv 0 \quad \text{for } t < -2\delta \end{cases}$$

そのとき、

$$\text{sing supp } V_2 \subset \bigcup_{i=1}^4 \{t - \omega_i \cdot x = 0\}$$

と、十分小さい $\delta > 0$ に対し、

$$|V_1 + V_2| < \frac{1}{3} \quad \text{for } t \in (-\delta, \delta), x \in \mathbb{R}^2$$

が成り立つ。

定理 3 の証明を続けよう。 $V_3 = -h(t - \omega_1 \cdot x) + h(t - \omega_2 \cdot x) + 2h(t - \omega_3 \cdot x) - 2h(t - \omega_4 \cdot x)$ 、 $u = V_1 + V_2 + V_3$ とおく。

$\text{sing supp } V_3 \subset \bigcup_{i=1}^4 \{t - \omega_i \cdot x = 0\}$ であるから、補題 3.1, 補題 3.2 と合わせて、(8)、(9) を得る。 $\chi = \chi_1 - \chi_2 - \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$ とおくと、明らかにわかるように、 $\square u = \chi$ である。一方、 u と χ の定義から、 $F(u) = \chi$ となる。 $u|_{x_1=0} = 0$ については、 $\chi|_{x_1=0} = 0$ 、 $V_3|_{x_1=0} = 0$ からわかる。(証明終)

補題 3.1 の証明は、Rauch-Reed [5] と同様なので、略す。

補題 3.2 は、 $\square$ の基本解を用いて、 V_2 を表示してみれば、容易にわかる。

注. T. Sasaki [6] は、 $\square u = F(\nabla u)$ の場合について、同様の例を作っている。

参考文献

- [1] Beals, M. Interaction of radially smooth nonlinear waves, L. N. in Math. 1256 Springer 1-27 (1987)
- [2] Bony, J.M. Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations, Tamaguchi Symp. H.E.R.T. Katata, 11-49 (1984)
- [3] Kato, K. Interaction of singularities of solutions to semilinear wave equation at the boundary, Sci. Papers of College of Arts and Sciences, Univ. of Tokyo, vol 38. No 2. (1988)
- [4] Melrose, R. - Ritter, N. Interaction of nonlinear progressing waves for semilinear wave equations, Ann. of Math. 121, 187-213 (1985)
- [5] Rauch, J. - Reed, M. Singularities produced by the nonlinear interaction of three progressing waves; examples, Comm. P.D.E. 7(9), 1117-1133 (1982)
- [6] Sasaki, T. Interaction of two nonlinear waves at the boundary Proc. of the Japan Acad. 63 Ser. A No.10 375-378 (1987)

[7] Bony J.M, Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaire, Séminaire Goulaouic-Schwartz exp. n° 22 (1979-1980)