

On a classification of transcendental numbers by Sprindžuk

群馬大学教養部 天羽雅昭 (Masaaki Amou)

Sprindžuk は [11] に於て ([12], [13] もも参照)、Mahler によるものとは異なる、複素数の分類を定義した。この分類によって、複素数全体は4つのクラスに分けられ、それぞれ $\tilde{A}$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{U}$ と名付けられた。これについて、 $\tilde{A} = \overline{\mathbb{Q}}$, $\tilde{S} \neq \emptyset$ 及び $\tilde{U} \neq \emptyset$ は容易に分かるが、 $\tilde{T} \neq \emptyset$ かどうかは不明であった。本稿では、 $\tilde{T} \neq \emptyset$ であることをその特別な場合として含む、一般的な存在定理を述べる。

先ず、Sprindžuk の分類の定義から始めよう。但し、代数的数は初めから除外し、超越数の分類として説明する。 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ とし

$$w_d(\omega, h) := \min \{ |P(\omega)| ; 0 \neq P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq d, H(P) \leq h \}$$

とおく。ここに、 $H(P)$ は P の高さ (height)、即ち P の係数の絶対値の最大値を表す。これに対して

$$v(\omega, h) := \limsup_{d \rightarrow \infty} \frac{\log \log (1/w_d(\omega, h))}{\log d}, \quad v(\omega) := \sup_{h \in \mathbb{N}} v(\omega, h)$$

とおく。 $v(\omega)$ を ω の order と呼ぶ。また

$$H_0(\omega) := \inf \{ h \in \mathbb{N} ; v(\omega, h) = \infty \}$$

とおく。このとき、Sprindžukの分類は次のように定義される:

$$\omega \in \tilde{S} \iff 1 \leq v(\omega) < \infty ;$$

$$\omega \in \tilde{T} \iff v(\omega) = \infty, H_0(\omega) = \infty ;$$

$$\omega \in \tilde{U} \iff v(\omega) = \infty, H_0(\omega) < \infty .$$

$\tilde{S}$ の定義で $1 \leq v(\omega)$ となっているが、 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{Q}}$ ならば $1 \leq v(\omega)$ となるのでこれでよい。Sprindžuk [11] は、2次元(1次元)ルベグ測度の意味で、ほとんど全ての複素数(実数)は order が 2 以下の $\tilde{S}$ -数 ($\tilde{S}$ に属する数を $\tilde{S}$ -数と呼ぶ。他のクラスの数についても同様。)であることを示した。これに関して、Chudnovsky は [4] で、上記の上界 2 を 1 で置き換え得ることを示し、測度論的に最良の結果を得た。具体的な数については、Fel'dman [5] の結果より $v(\pi) \leq 2, v(\log \alpha) \leq 3$ ($\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0, 1$) であり、Chudnovsky [4] の結果より $v(e^\alpha) \leq 2$ ($\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0$), $v(e^{\alpha\pi}) = 1$ ($\alpha \in \bar{\mathbb{Q}} \setminus \sqrt{-1}\mathbb{Q}$) であることなどが知られている。最後の例は、order 1 の $\tilde{S}$ -数の 1 系列を与えて興味深いが、もう 1 つ例を挙げれば、 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{r^k}$ ($r \in \mathbb{N}, r \geq 2$) の 0 以外の代数数も全て order 1 の $\tilde{S}$ -数である ([1] を参照)。

では、主結果(定理 1, 2)の定式化に入ろう。 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{Q}}$ が与えられると、それに対して $h_0 = h_0(\omega) \in \mathbb{N}$ があって、

$h < h_0$ のとき $v(w, h) = 0$, $h \geq h_0$ のとき $1 \leq v(w, h) \leq v(w, h+1) \leq \infty$ が成り立つことが容易にわかる。この事実を照らして、 $h_0 \in \mathbb{N}$ を任意に与え、数列 $v = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ (∞ を含んでもよい) として

(1) $h < h_0$ のとき $v_h = 0$, $h \geq h_0$ のとき $1 \leq v_h \leq v_{h+1} \leq \infty$ を満たすものを任意に取り、このような v に対して

$$\mathcal{R}(v) := \{ \omega ; \omega \in \mathbb{R} \setminus \bar{\mathbb{Q}}, v(\omega, h) = v_h \ (h=1, 2, \dots) \},$$

$$\mathcal{Q}(v) := \{ \sqrt{-1} \omega ; \omega \in \mathbb{R} \setminus \bar{\mathbb{Q}}, v(\sqrt{-1} \omega, h) = v_h \ (h=1, 2, \dots) \}$$

とおく。 v に対して、実数 m_v, M_v (m'_v, M'_v) を次のように定義する。 $h_0 > 1$ ならば、 $m_v = h_0, M_v = h_0 + 1$ ($m'_v = \sqrt{h_0}, M'_v = \sqrt{h_0 + 1}$)。 $h_1 > 1$ なる $h_1 \in \mathbb{N}$ で、 $h < h_1$ に対しては $v_h = 1$ となり、かつ $v_{h_1} > 1$ となるものがあるならば、 $m_v = 1/(h_1 + 1), M_v = 2$ ($m'_v = 1/\sqrt{h_1 + 1}, M'_v = \sqrt{2}$)。最後に、全ての $h \in \mathbb{N}$ に対して $v_h = 1$ ならば、 $m_v = 0, M_v = 2$ ($m'_v = 0, M'_v = \sqrt{2}$)。また、 $0 \leq a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$E(a, b) := \{ x ; x \in \mathbb{R}, a < |x| < b \},$$

$$E'(a, b) := \{ \sqrt{-1} x ; x \in \mathbb{R}, a < |x| < b \}$$

とおく。以上のもとで：

定理 1. (1) を満たす任意の $v = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ に対して：

- (i) $\mathcal{R}(v)$ は $E(m_v, M_v)$ の稠密な部分集合；
- (ii) $\mathcal{Q}(v)$ は $E'(m'_v, M'_v)$ の稠密な部分集合。

この定理は、次の(a)-(c)の全てに肯定的に答える：(a) 任意に与えられた $v \geq 1$ を order に持つ $\tilde{S}$ -数の存在；(b) $\tilde{v}$ -数の存在；(c) 任意に与えられた $h_0 \in \mathbb{N}$ に対して、 $H_0(\omega) = h_0$ を満たす $\tilde{v}$ -数 ω の存在。

さて、 $w_d(\omega, h)$ は多項式 ω が w で取る値の絶対値を用いて定義されたが、次に ω と代数数との距離を用いて別の関数 $\tilde{w}_d(\omega, h)$ を

$$\tilde{w}_d(\omega, h) := \min \{ |\omega - \alpha| ; \alpha \in \bar{\mathbb{Q}}, \deg \alpha \leq d, H(\alpha) = h \}$$

で定義する。ここに、 $H(\alpha)$ は α の高さ、即ち α の互上の定義多項式（既約かつ原始的なもの）の高さを表す。このとき、 $v(\omega, h)$ に対応して

$$\tilde{v}(\omega, h) := \limsup_{d \rightarrow \infty} \frac{\log \log (1/\tilde{w}_d(\omega, h))}{\log d}$$

とおく。 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{Q}}$ が与えられると、それに対して $h_0 = h_0(\omega) \in \mathbb{N}$ があって、 $h < h_0$ のとき $\tilde{v}(\omega, h) = 0$ 、 $h \geq h_0$ のとき $1 \leq \tilde{v}(\omega, h) \leq \infty$ が成り立つことに注意して、逆に、 $h_0 \in \mathbb{N}$ を任意に与え、数列 $\mathbf{v} = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ (∞ を含んでもよい) として

$$(2) \quad h < h_0 \text{ のとき } v_h = 0, \quad h \geq h_0 \text{ のとき } 1 \leq v_h \leq \infty$$

を満たすものを任意に取り、このような $\mathbf{v}$ に対して

$$\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{v}) := \{ \omega ; \omega \in \mathbb{R} \setminus \bar{\mathbb{Q}}, \tilde{v}(\omega, h) = v_h \ (h=1, 2, \dots) \},$$

$$\tilde{\mathcal{I}}(\mathbf{v}) := \{ \sqrt{-1} \omega ; \omega \in \mathbb{R} \setminus \bar{\mathbb{Q}}, \tilde{v}(\sqrt{-1} \omega, h) = v_h \ (h=1, 2, \dots) \}$$

とおく。このとき、次が成り立つ。

定理 2. (2) を満たす任意の $\mathcal{V} = \{v_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ に対して:

(i) $\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ は $E(1/(h+1), h+1) \setminus E(1/h, h)$ の稠密な部分集合;

(ii) $\tilde{\mathcal{J}}(\mathcal{V})$ は $E'(1/\sqrt{h+1}, \sqrt{h+1}) \setminus E'(1/\sqrt{h}, \sqrt{h})$ の稠密な部分集合。

上記 2 つの定理で、包含性の証明は容易である。稠密性の証明は、次に述べる命題 1 を用いて、Schmidt [9] による Mahler の T -数の構成法に類似の方法で行われる。

命題 1. (i) $\xi \in E(1/(h+1), h+1)$, $\xi \neq 1$ とせよ。こ

のとき、次の性質を満たす無限個の $d \in \mathbb{N}$ が存在する:

次数が d で高さが h の少くとも $(zh)^{d/10}$ 個の実代数的数 α があって、それらは全て

$$|\xi - \alpha| < \exp(-c(\xi)d)$$

を満たす。ここに、 $c(\xi)$ は ξ のみによる正定数である;

(ii) $\sqrt{-1}\xi \in E'(1/\sqrt{h+1}, \sqrt{h+1})$, $1 \neq \xi \in \mathbb{R}$ とせよ。こ

のとき、次の性質を満たす無限個の $d \in \mathbb{N}$ が存在する:

次数が d で高さが h の少くとも $(zh)^{d/20}$ 個の純虚代数的数 α があって、それらは全て

$$|\sqrt{-1}\xi - \alpha| < \exp(-c(\xi)d)$$

を満たす。ここに、 $c(\xi)$ は ξ のみによる正定数である。

よく知られているように (例えば, [10] 参照), $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$,

$\alpha \neq 0$ の高さが h のとき、 $1/(h+1) < |\alpha| < h+1$, が成り立

つ。また、 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \sqrt{-1}\mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ の高さが h のとき、上記

の不等式を $1/\sqrt{h+1} < 1/2 < \sqrt{h+1}$ と改良できることも容易に示せる。従って、高さが h の代数的数全体を $\tilde{\mathcal{O}}(h)$ とかくと、命題1の系として次が得られる。

系. (i) $\tilde{\mathcal{O}}(h) \cap \mathbb{R}$ は $E(1/(h+1), h+1)$ の稠密な部分集合;

(ii) $\tilde{\mathcal{O}}(h) \cap \sqrt{-1}\mathbb{R}$ は $E'(1/\sqrt{h+1}, \sqrt{h+1})$ の稠密な部分集合。

命題1の証明には、次の命題2を用いる。

命題2. $h \in \mathbb{N}$ とし、 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を高さが h

以下の互いに素な多項式とする。もし、 $g(x)$ の次数が十分大きいならば、既約で原始的な $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ で、

$P \equiv f \pmod{g}$, $\deg P < 5 \deg g$ かつ $H(P) = h$ を

満たすものが存在する。

これは、Kornblum [8] によって証明された Dirichlet の算術級数定理の多項式アナログをエフェクティブにしたもので、最近の石橋 [7] の結果の1つの系である。但し、関数体上の“円分体論” (Carlitz [3], Hayes [6] を参照) も必要である。

謝辞: 石橋誠氏には文献 [7] を送って頂き、小松啓一氏には文献 [6] の存在ともども関数体上の円分体論について教えて頂きました。また、証明のチェック等全般に亘って、若林功氏には大変お世話になりました。ここに感謝の意を表します。

REFERENCES

- [1] M. Amou, Algebraic independence of the values of certain functions at a transcendental number, *Acta Arith.* 59 (1991) 71-82.
- [2] M. Amou, On a classification of transcendental numbers by Sprindzuk, in preparation.
- [3] L. Carlitz, A class of polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938), 167-182.
- [4] G.V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers, A. M. S., Mathematical surveys and monographs, no. 19, Providence, R. I., 1984.
- [5] N.I. Fel'dman, The approximation of some transcendental numbers I, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 15 (1951), 53-74; English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl.* 59 (1966), 224-245.
- [6] D.R. Hayes, Explicit class field theory for rational function fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* 189 (1974), 77-91.
- [7] M. Ishibashi, Bertrand-Tschebysheff theorem in function fields over finite fields, to appear in *Proceedings of the symposium on analytic number theory and related topics*.
- [8] H. Kornblum, Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression, *Mathematische Zeitschrift* 5 (1919), 100-111.
- [9] W.M. Schmidt, Mahler's T-numbers, *Proc. Symposia Pure Math.*, vol. 20 (1971), 275-286.
- [10] Th. Schneider, *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

- [11] V.G. Sprindzuk, On a classification of transcendental numbers,
Litovsk Mat. Sb. 2 (1962), 215-219 (Russian).
- [12] V.G. Sprindzuk, Mahler's problem in metric number theory,
A. M. S., Translations of mathematical monographs, vol. 25,
Providence, R. I., 1969.
- [13] V.G. Sprindzhuk, Achievements and problems in Diophantine
approximation theory, Uspekhi Mat. Nauk 35 (1980); English
transl. in Russian Math. Surveys 35:4 (1980), 1-80.